UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Departamento de Matemática

Análisis III

Julio Deride

Cristopher Hermosilla

Alberto Mercado

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso - Chile

https://sites.google.com/view/deride-home
http://chermosilla.mat.utfsm.cl/
http://amercado.mat.utfsm.cl/

Versión Marzo 2023

Para la confección de este texto, se ha utilizado como base el template LaTeX desarrollado por Mathias Legrand, disponible en http://www.latextemplates.com/template/the-legrand-orange-book.

Índice general

Bibliografía & Índice alfabético

Prefacio

Este apunte ha sido redactado con la finalidad de cubrir los contenidos del curso Análisis III (MAT227), que imparte regularmente el Departamento de Matemática de la Universidad Técnica Federico Santa María, y cuyo objetivo es familiarizar al estudiantado con conceptos básicos del análisis funcional tales como operadores lineales y topologías débiles, así como con algunos teoremas clásicos habitualmente utilizados cursos más avanzados de Matemáticas.

La organización de este apunte consiste principalmente en tres partes, a saber (i) *Teoremas clásicos del análisis funcional*, (ii) *Topologías débiles* y (iii) *Introducción a la teoría espectral*. En estas notas también hemos incluido un apéndice que contiene elementos básicos estudiados en los cursos previos de la línea de análisis, necesarios para la buena comprensión de los contenidos principales del apunte. Adicionalmente, hemos incorporado algunos problemas de certámenes de años anterior, con sus respectivas soluciones, que pueden servir de apoyo al estudio personal y a la buena comprensión de los tópicos presentados en este apunte.

Todo posible error que quien lea pueda encontrar en estas notas es de nuestra exclusiva responsabilidad. Agradecemos hacer llegar comentarios y observaciones a cualquiera de los autores.

Julio DERIDE, Santiago
Cristopher HERMOSILLA, Valparaíso
Alberto MERCADO, Valparaíso
Marzo 2023

Teoremas Clásicos

1. Espacio dual topológico

Comenzaremos estas notas introduciendo la noción de espacio dual topológico de un e.v.n. y mostrando algunas de sus propiedades básicas, así como algunos ejemplos concretos.

1.1 El dual topológico

Dados dos e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$, recordemos que $\mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$ denota la colección de todos los operadores lineales continuos $L : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$. Este conjunto también tiene la estructura de e.v.n. con la norma

$$\|L\|_{\mathscr{L}C} := \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}} \leq 1} \|L(x)\|_{\mathbf{F}}, \qquad \forall\, L \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F}).$$

Definición 1.1.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n.. Al conjunto $\mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbb{R})$ lo llamaremos el **dual topológico** de $\mathbf{E}$ y a $\|\cdot\|_{\mathscr{L}C}$ la **norma dual**. En tal caso, usaremos la notación

$$(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})^* := \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbb{R}) \qquad \text{y} \qquad \|\ell\|_{\mathbf{E}^*} := \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}} \leq 1} |\ell(x)|, \quad \forall\, \ell \in (\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})^*.$$

A veces también escribiremos $\mathbf{E}^*$ en vez de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})^*$ si no hay confusión.

Supongamos que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son dos normas equivalentes en $\mathbf{E}$. Luego:
- los duales topológicos de $\mathbf{E}$ coinciden, es decir, $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_1)^* = (\mathbf{E}, \|\cdot\|_2)^*$.
- las normas duales $\|\cdot\|_{\mathbf{E}_1^*}$ y $\|\cdot\|_{\mathbf{E}_2^*}$ son equivalentes (no necesariamente iguales).

Notación 1.1. *Escribiremos* $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})^* \cong (\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ *para denotar que* $(\mathbf{E}^*, \|\cdot\|_{\mathbf{E}^*})$ *y* $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ *son* ***isométricamente isomorfos****, es decir, existe* $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E}^*,\mathbf{F})$ *biyectiva tal que*

$$\|T(\ell)\|_{\mathbf{F}} = \|\ell\|_{\mathbf{E}^*}, \qquad \forall \ell \in \mathbf{E}^*.$$

1.1.1 Caso dimensión finita

Proposición 1.1.1 Dados $p,q \in (1,+\infty)$ tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, tenemos $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_p)^* \cong (\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_q)$.

Demostración. Denotemos por $\mathbf{E}^* = (\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_p)^*$ y $\{e_1,\dots,e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Dado $\ell \in \mathbf{E}^*$ tenemos

$$\ell(x) = \ell\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k \ell(e_k), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Consideremos el operador $T : \mathbf{E}^* \to \mathbb{R}^n$ dado por $T(\ell) = (\ell(e_1),\dots,\ell(e_n))$.

Este operador es:

- **inyectivo**: Si $T(\ell)=0$, entonces por (1.1) tenemos que $\ell(x)=0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, y por lo tanto $\ell = 0$.
- **sobreyectivo**: dado $a \in \mathbb{R}^n$, definiendo

  $$\ell_a(x) = \sum_{k=1}^n x_k a_k, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

  tenemos $\ell_a(e_k) = a_k$, y luego, $T(\ell_a) = a$.
- **lineal** por construcción. Además, como T es biyectiva necesariamente $\dim(\mathbf{E}^*) = n$ y por lo tanto T es **continuo**.
- **isométrico**: Por Hölder, tenemos que

  $$|\ell(x)| \le \|x\|_p \|T(\ell)\|_q, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

  lo que implica que $\|\ell\|_{\mathbf{E}^*} \le \|T(\ell)\|_q$. Por otro lado, si $\ell \neq 0$, reemplazando

  $$\bar{x}_k = \frac{\operatorname{sign}(\ell(e_k))|\ell(e_k)|^{q-1}}{\|T(\ell)\|_q^{q-1}}$$

  en (1.1), con la convención que $\operatorname{sign}(0)=0$, en obtenemos $\ell(\bar{x}) = \|T(\ell)\|_q$.
  Dado que

  $$|\bar{x}_k|^p = \frac{|\ell(e_k)|^{pq-p}}{\|T(\ell)\|_q^{pq-p}} = \frac{|\ell(e_k)|^q}{\|T(\ell)\|_q^q},$$

  tenemos que $\|\bar{x}\|_p = 1$, luego $\|T(\ell)\|_q = \ell(\bar{x}) \le \|\ell\|_{\mathbf{E}^*}$.

$\square$

Las siguientes son algunas propiedades generales del dual topológico de un e.v.n.

Proposición 1.1.2 Supongamos que $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n.
1. $(\mathbf{E}^*,\|\cdot\|_{\mathbf{E}^*})$ siempre es un espacio de Banach.
2. Si $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ espacio de Banach y $B \subseteq \mathbf{E}^*$ es un conjunto tal que para todo $x \in \mathbf{E}$ tenemos que $\{\ell(x) \mid \ell \in B\}$ es acotado, entonces necesariamente B es acotado.

Demostración.
1. Dado que $(\mathbb{R},|\cdot|)$ es un espacio de Banach, tenemos que $(\mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbb{R}),\|\cdot\|_{LC})$ también lo es.

2. Dado que $\{\ell(x) \mid \ell \in B\}$ es acotado, por cada $x \in \mathbf{E}$ fijo tenemos que existe $c_x > 0$ tal que
$$\sup_{\ell \in B} |\ell(x)| \leq c_x.$$
Aplicamos Teorema de Banach-Steinhaus a $\{\ell\}_{\ell \in B}$, luego existe $c > 0$ tal que
$$\sup_{\ell \in B} \|\ell\|_{\mathbf{E}^*} \leq c$$
y por lo tanto B es acotado en $\mathbf{E}^*$.

$\square$

1.1.2 Espacio bi-dual

Dado que $(\mathbf{E}^*, \|\cdot\|_{\mathbf{E}^*})$ es un e.v.n., tiene sentido estudiar su dual topológico.

Definición 1.1.2 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n.

- A $\mathscr{L}C(\mathbf{E}^*, \mathbb{R})$ lo llamaremos el **bi-dual topológico** de $\mathbf{E}$ y usaremos la notación
$$(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})^{**} := \mathscr{L}C(\mathbf{E}^*, \mathbb{R}).$$
También escribiremos $\mathbf{E}^{**}$ en vez de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})^{**}$ si no hay confusión.
La **norma bi-dual** será
$$\|\varphi\|_{\mathbf{E}^{**}} := \sup_{\|\ell\|_{\mathbf{E}^*} \leq 1} |\varphi(\ell)|, \quad \forall\, \varphi \in \mathbf{E}^{**}.$$
- Dado $x \in \mathbf{E}$, definimos el funcional de evaluación $J_x : \mathbf{E}^* \to \mathbb{R}$ via la fórmula:
$$J_x(\ell) := \ell(x), \qquad \forall\, \ell \in \mathbf{E}^*.$$

Notemos que para todo $x \in \mathbf{E}$ tenemos que $J_x \in \mathbf{E}^{**}$, pues $J_x : \mathbf{E}^* \to \mathbb{R}$ es

- **lineal:** dados $\ell_1, \ell_2 \in \mathbf{E}^*$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos que
$$J_x(\ell_1 + \lambda \ell_2) = (\ell_1 + \lambda \ell_2)(x) = \ell_1(x) + \lambda \ell_2(x) = J_x(\ell_1) + \lambda J(\ell_2).$$
- **continua:** dado $\ell \in \mathbf{E}^*$, tenemos $|J_x(\ell)| = |\ell(x)| \leq \|x\|_{\mathbf{E}} \|\ell\|_{\mathbf{E}^*}$.

Definición 1.1.3 Definimos la **inyección canónica en E** como el mapeo $J : \mathbf{E} \to \mathbf{E}^{**}$ dado por
$$J(x) := J_x, \qquad \forall x \in \mathbf{E},$$
donde J_x es el funcional de evaluación asociado a x.

- Sabemos que $J_x \in \mathbf{E}^{**}$, luego $J : \mathbf{E} \to \mathbf{E}^{**}$ es una función lineal pues además
$$J(x + \lambda y)(\ell) = J_{x+\lambda y}(\ell) = \ell(x + \lambda y) = \ell(x) + \lambda \ell(y) = J(x)(\ell) + \lambda J(y)(\ell),$$
cualquiera sean $x, y \in \mathbf{E}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\ell \in \mathbf{E}^*$.

- Se probará, usando el Teorema de Hahn-Banach Analítico, que si $x \neq 0$ entonces $J_x \neq 0$ (ver Corolario 2.3.3). Por lo tanto, J es inyectivo y el nombre **inyección** está justificado.
- Para todo $x \in \mathbf{E}$ tenemos directamente que $\|J_x\|_{\mathbf{E}^{**}} = \sup_{\|\ell\|_{\mathbf{E}^*} \leq 1} |J_x(\ell)| = \sup_{\|\ell\|_{\mathbf{E}^*} \leq 1} |\ell(x)| \leq \|x\|_{\mathbf{E}}$.
  De hecho, de nuevo por el Teorema de Hahn-Banach Analítico, se verá que $\|J_x\|_{\mathbf{E}^{**}} = \|x\|_{\mathbf{E}}$ para todo $x \in \mathbf{E}$ (ver Corolario 2.3.4).
- Por todos los puntos anteriores, se tiene que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es **isométricamente isomorfo** al s.e.v. $J(\mathbf{E}) \subseteq \mathbf{E}^{**}$ dotado de la norma bi-dual.[1]

La observación anterior permite pensar a $\mathbf{E}$ como un subconjunto de $\mathbf{E}^{**}$. Más aún, en el caso que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ sea un espacio de Banach, $\mathbf{E}$ lo podemos interpretar como un s.e.v. cerrado de $\mathbf{E}^{**}$.

Proposición 1.1.3 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach, entonces $J(\mathbf{E})$ es un s.e.v. cerrado de $\mathbf{E}^{**}$:

Demostración. Supongamos la sucesión $\{J_{x_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\bar{\varphi}$ en $\mathbf{E}^{**}$, en particular es de Cauchy.

Dado que

$$\|x_k - x_j\|_{\mathbf{E}} = \|J_{x_k} - J_{x_j}\|_{\mathbf{E}^{**}}, \qquad \forall k, j \in \mathbb{N},$$

la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$, y como $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es completo, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

Finalmente, para todo $\ell \in \mathbf{E}^*$ tenemos

$$\bar{\varphi}(\ell) = \lim_{k\to+\infty} J_{x_k}(\ell) = \lim_{k\to+\infty} \ell(x_k) = \ell(\bar{x}) = J_{\bar{x}}(\ell),$$

es decir, $\bar{\varphi} = J_{\bar{x}} \in J(\mathbf{E})$.

1.2 Ejemplos de espacios duales

Ahora revisaremos algunos ejemplos concretos donde podemos dar una estructura precisa para el espacio dual, identificándolo con algún otro espacio conocido.

1.2.1 Espacios de Hilbert

Proposición 1.2.1 Si $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert, entonces $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})^* \cong (\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$.

Demostración. Definamos $T : \mathbf{E}^* \to \mathbf{E}$ via la fórmula: $T(\ell) = \varphi_\ell \in \mathbf{E}$, donde $\varphi_\ell \in \mathbf{E}$ está dado por el Teorema de representación de Riesz, es decir, satisface

$$\|\varphi_\ell\|_{\mathbf{E}} = \|\ell\|_{\mathbf{E}^*} \quad \text{y} \quad \ell(x) = \langle x, \varphi_\ell \rangle, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Notemos que $T : \mathbf{E}^* \to \mathbf{E}$ es:

- una **función**: φ_ℓ está únicamente determinado para cada $\ell \in \mathbf{E}^*$.
- **inyectiva**: si $T(\ell) = 0$ entonces $\ell(x) = \langle x, 0 \rangle = 0$ para todo $x \in \mathbf{E}$, es decir $\ell = 0$.
- **sobreyectiva**: gracias a Cauchy-Schwarz, cada $\varphi \in \mathbf{E}$ define un elemento en $\mathbf{E}^*$: $x \mapsto \langle x, \varphi \rangle$.

[1] $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ son **isométricamente isomorfos** si existe $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ biyectiva tal que $\|T(x)\|_{\mathbf{F}} = \|x\|_{\mathbf{E}}$, $\forall x \in \mathbf{E}$.

- **lineal**: dados $\ell_1, \ell_2 \in \mathbf{E}^*$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos que para todo $x \in \mathbf{E}$

$$\begin{aligned}\langle x, T(\ell_1 + \lambda \ell_2) - T(\ell_1) - \lambda T(\ell_2)\rangle &= \langle x, T(\ell_1 + \lambda \ell_2)\rangle - \langle x, T(\ell_1)\rangle - \lambda \langle x, T(\ell_2)\rangle \\ &= (\ell_1 + \lambda \ell_2)(x) - \ell_1(x) - \lambda \ell_2(x) = 0.\end{aligned}$$

  Evaluando en $x = T(\ell_1 + \lambda \ell_2) - T(\ell_1) - \lambda T(\ell_2)$, obtenemos

$$\|T(\ell_1 + \lambda \ell_2) - T(\ell_1) - \lambda T(\ell_2)\|_{\mathbf{E}}^2 = 0.$$

- una **isometría (continua)**: como $\|\varphi_\ell\|_{\mathbf{E}} = \|\ell\|_{\mathbf{E}^*}$ y $T(\ell) = \varphi_\ell$, tenemos $\|T(\ell)\|_{\mathbf{E}} = \|\ell\|_{\mathbf{E}^*}$.

□

1.2.2 Producto dualidad

Notación 1.2. *El* ***producto dualidad*** *entre $\mathbf{E}^*$ y $\mathbf{E}$ corresponde al operador bilineal $B \colon \mathbf{E}^* \times \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ definido por la fórmula:*

$$B(\ell, x) := \ell(x), \qquad \forall\, \ell \in \mathbf{E}^*,\ \forall\, x \in \mathbf{E}.$$

En general usaremos la notación $\langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} := B(\ell, x)$ para enfatizar la dependencia del producto dualidad con los espacios respectivos y el hecho que ℓ es continuo.

Notemos que el producto dualidad entre $\mathbf{E}^*$ y $\mathbf{E}$ es continuo si dotamos a $\mathbf{E}^*$ de la norma dual pues

$$|\langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| = |\ell(x)| \leq \|\ell\|_{\mathbf{E}^*}\|x\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall\, \ell \in \mathbf{E}^*,\ \forall\, x \in \mathbf{E}.$$

O El producto dualidad generaliza de cierta forma la noción de producto interno de espacios de Hilbert:
Si $(\mathbf{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Hilbert, entonces

$$\langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \ell(x) = \langle \varphi_\ell, x\rangle, \qquad \forall x \in \mathbf{E},\ \ell \in \mathbf{E}^*.$$

1.2.3 Espacio L^1

En el caso de espacio L^p para $p \in [1, +\infty)$, el espacio dual se puede identificar con L^q, donde q es el exponente conjugado de p que satisface $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. La demostración de este hecho, al igual que en el caso de espacio de Hilbert, recae fuertemente en un teorema de representación. En esta parte del curso veremos el caso $p = 1$. En el siguiente capítulo demostraremos esta afirmación para el caso $p \in (1, +\infty)$, usando una herramienta llamada *reflevidad*.

Teorema 1.2.2 — Representación de Riesz caso $p = 1$. Supongamos que $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida σ-finita. Luego, para todo $\ell \in (L^1_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^1})^*$ existe un único $u \in L^\infty_\mu(\Omega)$ tal que

$$\langle \ell, f\rangle_{L^1_\mu(\Omega)^*, L^1_\mu(\Omega)} = \int_\Omega u f d\mu, \qquad \forall\, f \in L^1_\mu(\Omega). \tag{1.2}$$

También se cumple que $\|u\|_{L^\infty} = \|\ell\|_{L^1_\mu(\Omega)^*}$

Demostración. Sea $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{A}$ tal que $0 < \mu(\Omega_k) < +\infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$ con $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k = \Omega$.

Sin pérdida de generalidad asumimos que $\Omega_k \subseteq \Omega_{k+1}$; basta redefinir

$$\Omega'_k = \bigcup_{j=0}^{k} \Omega_k, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Veamos primero la unicidad de u. Supongamos que, dado $\ell \in (L^1_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^1})^*$, existen $u_1, u_2 \in L^\infty_\mu(\Omega)$ que verifican (1.2). En particular,

$$\int_\Omega (u_1 - u_2) f d\mu = 0, \qquad \forall f \in L^1_\mu(\Omega). \tag{1.3}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos

$$f_k = \frac{u_1 - u_2}{|u_1 - u_2|} \mathbb{1}_{\Omega_k \cap \{u_1 \neq u_2\}}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dado que $\mu(\Omega_k) < +\infty$, entonces $f_k \in L^1_\mu(\Omega)$. Luego, evaluando (1.3) en f_k obtenemos

$$\int_{\Omega_k} |u_1 - u_2| d\mu = 0.$$

Como $|u_1 - u_2| \mathbb{1}_{\Omega_k} \nearrow |u_1 - u_2|$ c.t.p. , por el Teorema de Convergencia Monótona, deducimos que $\|u_1 - u_2\|_{L^1} = 0$, y luego $u_1 = u_2$ c.t.p.

Para la existencia, vamos a construir un candidato a representante usando el Teorema de representación de Riesz en el espacio de Hilbert $(L^2_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^2})$.

Definamos

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{2\mu(\Omega_0)}} \mathbb{1}_{\Omega_0} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{k+2}\mu(\Omega_{k+1})}} \mathbb{1}_{\Omega_{k+1} \setminus \Omega_k}$$

Claramente θ es medible y por definición $\theta(x) > 0$ c.t.p en Ω. Además, $\theta \in L^2_\mu(\Omega)$, pues

$$\|\theta\|^2_{L^2} = \int_{\Omega_0} \theta^2 d\mu + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega_{k+1} \setminus \Omega_k} \theta^2 d\mu = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu(\Omega_{k+1} \setminus \Omega_k)}{2^{k+2}\mu(\Omega_{k+1})} \leq 1.$$

Por Hölder tenemos que $\theta f \in L^1_\mu(\Omega)$ para todo $f \in L^2_\mu(\Omega)$, con $\|\theta f\|_{L^1} \leq \|\theta\|_{L^2} \|f\|_{L^2}$.

Fijemos $\ell \in (L^1_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^1})^*$ y consideremos el funcional

$$f \mapsto \langle \ell, \theta f \rangle_{L^1_\mu(\Omega)^*, L^1_\mu(\Omega)}$$

definido en $L^2_\mu(\Omega)$. No es difícil ver que este funcional es lineal. Afirmamos también que es continuo es $L^2_\mu(\Omega)$, pues dado $f \in L^2_\mu(\Omega)$ tenemos

$$|\langle \ell, \theta f \rangle_{L^1_\mu(\Omega)^*, L^1_\mu(\Omega)}| \leq \|\ell\|_{L^1_\mu(\Omega)^*} \|\theta f\|_{L^1} \leq \|\ell\|_{L^1_\mu(\Omega)^*} \|\theta\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \leq \|\ell\|_{L^1_\mu(\Omega)^*} \|f\|_{L^2}.$$

En particular, $f \mapsto \langle \ell, \theta f \rangle_{L^1_\mu(\Omega)^*, L^1_\mu(\Omega)}$ pertenece a $(L^2_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^2})^*$.

Gracias al Teorema de representación de Riesz, existe un único $v \in L^2_\mu(\Omega)$, tal que

$$\langle \ell, \theta f \rangle_{L^1_\mu(\Omega)^*, L^1_\mu(\Omega)} = \int_\Omega v f d\mu, \qquad \forall\, f \in L^2_\mu(\Omega). \tag{1.4}$$

Veamos que $u = \frac{v}{\theta}$ verifica las propiedades buscadas.

- Notemos que $u \in L^\infty_\mu(\Omega)$ con $\|u\|_{L^\infty} \leq \|\ell\|_{L^1_\mu(\Omega)^*}$:
Sea $c > 0$ tal que $c > \|\ell\|_{L^1_\mu(\Omega)^*}$ y definamos $A = \{x \in \Omega \mid |u(x)| > c\}$, veamos que $\mu(A) = 0$.
Si es el caso, tendremos $\|u\|_{L^\infty} \leq c$, y en particular, $u \in L^\infty_\mu(\Omega)$.
Tomemos
$$f_k = \frac{u}{|u|\theta} \mathbb{1}_{A \cap \Omega_k}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$
Por construcción, para cada k existe $\delta_k > 0$ tal que $\theta \geq \delta_k$ en Ω_k. Entonces, dado que $\mu(\Omega_k) < +\infty$, deducimos que $f_k \in L^2_\mu(\Omega)$ para cada k.
Notemos que
$$\int_\Omega v f_k d\mu = \int_{A\cap\Omega_k} \frac{uv}{|u|\theta} d\mu = \int_{A\cap\Omega_k} \frac{u^2}{|u|} d\mu = \int_{A\cap\Omega_k} |u| d\mu \geq c\mu(A \cap \Omega_k).$$
Por otro lado,
$$\left| \int_\Omega v f_k d\mu \right| = \left| \langle \ell, \theta f_k \rangle_{L^1_\mu(\Omega)^*, L^1_\mu(\Omega)} \right| \leq \|\ell\|_{L^1_\mu(\Omega)^*} \|\theta f_k\|_{L^1} = \|\ell\|_{L^1_\mu(\Omega)^*}\ \mu(A \cap \Omega_k).$$
Esto implica que, $c\mu(A \cap \Omega_k) \leq \|\ell\|_{L^1_\mu(\Omega)^*}\ \mu(A \cap \Omega_k)$. Sin embargo, dado que $c > \|\ell\|_{L^1_\mu(\Omega)^*}$, obtenemos $\mu(A \cap \Omega_k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de Teorema de Convergencia Monótona, concluimos que $\mu(A) = 0$. Por lo tanto $\|u\|_{L^\infty} \leq c$, y en particular, $u \in L^\infty_\mu(\Omega)$.
Finalmente, haciendo $c \searrow \|\ell\|_{L^1_\mu(\Omega)^*}$, vemos que $\|u\|_{L^\infty} \leq \|\ell\|_{L^1_\mu(\Omega)^*}$.
- Veamos finalmente que $u = \frac{v}{\theta}$ verifica (1.2) y que además $\|\ell\|_{L^1_\mu(\Omega)^*} \leq \|u\|_{L^\infty}$:
Tomemos $h \in L^1_\mu(\Omega)$ fijo (pero arbitrario) y definamos
$$f_k = \frac{h}{\theta} \mathbb{1}_{\{|h| \leq k\} \cap \Omega_k} + \frac{kh}{\theta|h|} \mathbb{1}_{\{|h| > k\} \cap \Omega_k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$
Gracias al Teorema de representación de Riesz, tenemos
$$\langle \ell, \theta f_k \rangle_{L^1_\mu(\Omega)^*, L^1_\mu(\Omega)} = \int_\Omega v f_k d\mu = \int_\Omega u\theta f_k d\mu = \int_{\{|h| \leq k\} \cap \Omega_k} uh d\mu + \int_{\{|h| > k\} \cap \Omega_k} u \frac{kh}{|h|} d\mu.$$
Usando el Teorema de Convergencia Dominada vemos que
$$\int_{\{|h| > k\} \cap \Omega_k} u \frac{kh}{|h|} d\mu \to 0 \quad \text{y} \quad \int_{\{|h| \leq k\} \cap \Omega_k} uh d\mu \to \int_\Omega uh d\mu.$$
Por otro lado, $\theta f_k \to h$ c.t.p y además, $\theta f_k \to h$ en $L^1_\mu(\Omega)$. Esto implica que
$$\langle \ell, \theta f_k \rangle_{L^1_\mu(\Omega)^*, L^1_\mu(\Omega)} \to \langle \ell, h \rangle_{L^1_\mu(\Omega)^*, L^1_\mu(\Omega)},$$
de donde concluimos que
$$\langle \ell, h \rangle_{L^1_\mu(\Omega)^*, L^1_\mu(\Omega)} = \int_\Omega uh d\mu$$
Finalmente, por la Desigualdad de Hölder tenemos $|\langle \ell, h \rangle_{L^1_\mu(\Omega)^*, L^1_\mu(\Omega)}| \leq \|uh\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^\infty} \|h\|_{L^1}$, y por tanto $\|\ell\|_{L^1_\mu(\Omega)^*} \leq \|u\|_{L^\infty}$.

$\square$

Proposición 1.2.3 Si $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida σ-finita, entonces

$$(L^1_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^1})^* \cong (L^\infty_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^\infty}).$$

Demostración. Denotemos por $\mathbf{E}^* = (L^1_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^1})^*$ y definamos $T : \mathbf{E}^* \to L^\infty_\mu(\Omega)$ via la fórmula: $T(\ell) = u$, donde $u \in L^\infty_\mu(\Omega)$ está dado por el Teorema de Representación de Riesz para $L^1_\mu(\Omega)$, es decir, satisface

$$\langle \ell, f \rangle_{\mathbf{E}^*, L^1_\mu(\Omega)} = \int_\Omega u f d\mu, \qquad \forall\, f \in L^1_\mu(\Omega) \quad \text{y} \quad \|u\|_{L^\infty} = \|\ell\|_{\mathbf{E}^*}$$

Notemos que $T : \mathbf{E}^* \to L^\infty_\mu(\Omega)$ es:

- una **función**: u está únicamente determinado para cada $\ell \in \mathbf{E}^*$.
- **inyectiva**: si $T(\ell) = 0$ entonces $\ell(f) = \langle \ell, f \rangle_{\mathbf{E}^*, L^1_\mu(\Omega)} = 0$ para todo $f \in L^1_\mu(\Omega)$, es decir $\ell = 0$.
- **sobreyectiva**: gracias a la Desigualdad de Hölder, cada $u \in L^\infty_\mu(\Omega)$ define un único elemento en $\mathbf{E}^*$:
$$f \mapsto \int_\Omega u f d\mu.$$
- **lineal**: dados $\ell_1, \ell_2 \in \mathbf{E}^*$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos que para todo $f \in L^1_\mu(\Omega)$
$$\int_\Omega [T(\ell_1 + \lambda \ell_2) - T(\ell_1) - \lambda T(\ell_2)] f d\mu = \langle \ell_1 + \lambda \ell_2, f \rangle_{\mathbf{E}^*, L^1_\mu(\Omega)} - \langle \ell_1, f \rangle_{\mathbf{E}^*, L^1_\mu(\Omega)} - \lambda \langle \ell_2, f \rangle_{\mathbf{E}^*, L^1_\mu(\Omega)}.$$
Esto implica que
$$\int_\Omega [T(\ell_1 + \lambda \ell_2) - T(\ell_1) - \lambda T(\ell_2)] f d\mu = 0.$$
Dado que μ es σ-finita, usando el Teorema de Convergencia Monótona obtenemos que
$$T(\ell_1 + \lambda \ell_2) = T(\ell_1) + \lambda T(\ell_2) \text{ c.t.p.}$$
- una **isometría (continua)**: como $\|u\|_{L^\infty} = \|\ell\|_{\mathbf{E}^*}$ y $T(\ell) = u$, tenemos $\|T(\ell)\|_{L^\infty} = \|\ell\|_{\mathbf{E}^*}$.

$\square$

2. Teorema de Hahn-Banach Analítico

Ahora presentaremos y demostraremos uno de los principios fundamentales de análisis funcional, el llamado Teorema de extensión de Hahn-Banach. Veremos también algunas consecuencias relacionadas con espacios duales.

2.1 Lema de Zorn

Recordemos que si P es un conjunto no vacío, entonces un **orden parcial** en P es una relación que cumple

- $x \preceq x, \qquad \forall\, x \in P. \qquad$ (Reflexividad)
- $x \preceq y \quad \wedge \quad y \preceq x \quad \Longrightarrow \quad x = y, \qquad \forall\, x, y \in P. \qquad$ (Antisimetría)
- $x \preceq y \quad \wedge \quad y \preceq z \quad \Longrightarrow \quad x \preceq z, \qquad \forall\, x, y, z \in P. \qquad$ (Transitividad)

En tal caso, diremos que $(P, \preceq)$ es un conjunto ordenado.

Definición 2.1.1 Sea $(P, \preceq)$ un conjunto ordenado y $Q \subseteq P$.

- Diremos que Q es **totalmente ordenado** si $x \preceq y$ o bien $y \preceq x$ para todo $x, y \in Q$.
- Diremos que $c \in P$ es **cota superior** de Q si $x \preceq c$ para todo $x \in Q$.

Antes de enunciar y demostrar el teorema de Hahn-Banach analítico debemos recordar un resultado fundamental de la teoría axiomática de **Zermelo-Fraenkel**.

Lema — Zorn. Supongamos que $(P, \preceq)$ un conjunto ordenado y no vacío. Si todo subconjunto totalmente ordenado de P tiene una cota superior, entonces P tiene un elemento maximal, es decir, existe $m \in P$ que verifica

$$\forall\, x \in P, \;\; m \preceq x \quad \Longrightarrow \quad m = x.$$

- En el lema, un elemento maximal m no es necesariamente una cota superior de P. Por ejemplo, tomemos $P = (-\infty, 0] \times \mathbb{R}$ y con el orden

$$(x_0, y_0) \preceq (x_1, y_1) \iff x_0 \leq x_1 \wedge y_0 = y_1$$

Notemos que $(0, y)$ es un elemento maximal de P, con $y \in \mathbb{R}$ cualquiera, pues

$$(0, y) \preceq (x_0, y_0) \iff 0 \leq x_0 \wedge y = y_0 \implies x_0 = 0 \implies (x_0, y_0) = (0, y).$$

Sin embargo, $(0, y+1)$ no es comparable con $(0, y)$. Por lo tanto $(0, y)$ no es cota superior.
- El Lema de Zorn es equivalente al **Axioma de elección**:

Dada una familia de conjuntos $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ tales que $A_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in \Lambda$ y $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ si $\alpha \neq \beta$. Entonces, existe un conjunto B tal que $A_\alpha \cap B$ contiene un único elemento cualquiera sea $\alpha \in \Lambda$

Detalles sobre esta equivalencia pueden ser revisados en el libro de P. Halmos [**HalBook1974**].
- El Axioma de elección, y por lo tanto el Lema de Zorn, tiene consecuencias contraintuitivas, como por ejemplo la **paradoja de de Banach-Tarski**.

2.2 Teorema de Hahn-Banach Analítico

Recordemos que en general $\mathbf{E}$ denota a un e.v. real.

Definición 2.2.1 Diremos que una función $p : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ es **sublineal** si es:

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall\, x, y \in \mathbf{E},\ \forall\, \lambda > 0.$ **(Positivamente homogénea)**
2. $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall\, x, y \in \mathbf{E}.$ **(Subaditiva)**

- Las funciones sublineales son también llamadas **funcionales de Minkowski**.
- Toda **(semi)norma** es una función sublineal.
- Debido a la naturaleza del resultado, el Hahn-Banach Analítico también se conoce como el **Teorema de extensión Hahn-Banach**.

Teorema 2.2.1 — Hahn-Banach Analítico. Supongamos que $p : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ es una función sublineal. Sean $\mathbf{E}_0$ un s.e.v. de $\mathbf{E}$ y $\ell_0 : \mathbf{E}_0 \to \mathbb{R}$ una función lineal tales que

$$\ell_0(x) \leq p(x), \quad \forall\, x \in \mathbf{E}_0.$$

Entonces, existe una función lineal $\ell : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ tal que $\ell|_{\mathbf{E}_0} = \ell_0$ y que verifica

$$\ell(x) \leq p(x), \quad \forall\, x \in \mathbf{E}.$$

Demostración. Definamos el conjunto

$$\mathrm{P} := \left\{ (\mathbf{E}', \ell') \;\middle|\; \begin{array}{c} \mathbf{E}' \text{ es un s.e.v de } \mathbf{E} \text{ tal que } \mathbf{E}_0 \subseteq \mathbf{E}', \\ \ell' : \mathbf{E}' \to \mathbb{R} \text{ es lineal con } \ell'|_{\mathbf{E}_0} = \ell_0, \\ \text{tales que } \ell'(x) \leq p(x),\ \forall x \in \mathbf{E}' \end{array} \right\}.$$

y consideremos en P la siguiente relación en

$$(\mathbf{E}', \ell') \preceq (\mathbf{E}'', \ell'') \iff \mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}'' \text{ y } \ell''|_{\mathbf{E}'} = \ell'.$$

No es difícil verificar que $\preceq$ es un orden parcial en P; es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Idea de la demostración:

1. Justificar la existencia de un elemento $(\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\ell})$ maximal de $(\mathrm{P},\preceq)$ (Lema de Zorn).
2. Probar que $\tilde{\mathbf{E}}=\mathbf{E}$: por definición $(\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\ell})$ es una extensión de $\ell_0:\mathbf{E}_0\to\mathbb{R}$ que verifica $\tilde{\ell}\leq p$.

Verifiquemos ahora las hipótesis del Lema de Zorn:

- Primero, notemos que $\mathrm{P}\neq\emptyset$, pues $(\mathbf{E}_0,\ell_0)\in\mathrm{P}$.
- Veamos ahora que si $Q\subseteq P$ es totalmente ordenado, entonces existe $(\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\ell})\in P$ cota superior de Q:
$$(\mathbf{E}',\ell')\preceq(\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\ell}),\qquad\forall(\mathbf{E}',\ell')\in Q.$$

Sea $Q\subseteq P$ totalmente ordenado. Por simplicidad supongamos que $\mathrm{Q}=\big\{(\mathbf{E}_i,\ell_i)\big\}_{i\in I}$ y definamos

$$\tilde{\mathbf{E}}=\bigcup_{i\in I}\mathbf{E}_i\quad\text{y}\quad\tilde{\ell}(x)=\ell_i(x),\qquad\text{para algún } i\in I \text{ tal que } x\in\mathbf{E}_i.$$

Vamos a probar que $(\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\ell})$ es una cota superior:

Primero veamos que $(\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\ell})\in P$:

- Claramente $\mathbf{E}_0\subseteq\tilde{\mathbf{E}}$.
- **$\tilde{\mathbf{E}}$ es un s.e.v de $\mathbf{E}$**: dados $x,y\in\tilde{\mathbf{E}}$, existen $i,j\in I$ tales que $x\in\mathbf{E}_i$ e $y\in\mathbf{E}_j$. Al ser Q es totalmente ordenado, tenemos que $\mathbf{E}_i\subseteq\mathbf{E}_j$ o bien $\mathbf{E}_j\subseteq\mathbf{E}_i$. En particular,
$$x+\lambda y\in\mathbf{E}_i\cup\mathbf{E}_j\subseteq\tilde{\mathbf{E}},\qquad\forall\lambda\in\mathbb{R}.$$
- **$\tilde{\ell}:\tilde{\mathbf{E}}\to\mathbb{R}$ es lineal**: dados $x,y\in\tilde{\mathbf{E}}$ y $\lambda\in\mathbb{R}$, existen $i,j,k\in I$ tales que
$$\tilde{\ell}(x)=\ell_i(x)\text{ con } x\in\mathbf{E}_i,\quad\tilde{\ell}(y)=\ell_j(y)\text{ con } y\in\mathbf{E}_j\quad\text{y}\quad\tilde{\ell}(x+\lambda y)=\ell_k(x+\lambda y)\text{ con } x+\lambda y\in\mathbf{E}_k$$
Dado que Q es totalmente ordenado, existe $\beta\in\{i,j,k\}$ tal que
$$(\mathbf{E}_\alpha,\ell_\alpha)\preceq(\mathbf{E}_\beta,\ell_\beta),\qquad\forall\alpha\in\{i,j,k\}.$$
Esto implica que $\ell_i(x)=\ell_\beta(x)$, $\ell_j(y)=\ell_\beta(y)$ y $\ell_k(x+\lambda y)=\ell_\beta(x+\lambda y)$.
Dado que ℓ_β es lineal y también tenemos $x,y,x+\lambda y\in\mathbf{E}_\beta$, obtenemos
$$\tilde{\ell}(x+\lambda y)=\ell_k(x+\lambda y)=\ell_\beta(x+\lambda y)=\ell_\beta(x)+\lambda\ell_\beta(y)=\ell_i(x)+\lambda\ell_j(y)=\tilde{\ell}(x)+\lambda\tilde{\ell}(y).$$
- $\tilde{\ell}\leq p$: si $x\in\tilde{\mathbf{E}}$ entonces $x\in\mathbf{E}_i$ para algún $i\in I$ tal que $\tilde{\ell}(x)=\ell_i(x)$, pero $\ell_i(x)\leq p(x)$.
- $\tilde{\ell}|_{\mathbf{E}_0}=\ell_0$: si $x\in\mathbf{E}_0$ entonces $\mathbf{E}_0\subseteq\mathbf{E}_i$ para todo $i\in I$, lo que implica que $\tilde{\ell}(x)=\ell_i(x)=\ell_0(x)$.

Veamos ahora que $(\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\ell})$ es cota superior de Q: Consideremos un elemento arbitrario $(\mathbf{E}_j,\ell_j)$ en Q para algún $j\in I$ fijo. Debemos probar que $(\mathbf{E}_j,\ell_j)\preceq(\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\ell})$, es decir, $\mathbf{E}_j\subseteq\tilde{\mathbf{E}}$, y $\tilde{\ell}|_{\mathbf{E}_j}=\ell_j$.

- $\mathbf{E}_j\subseteq\tilde{\mathbf{E}}$: Dado que j pertenece a I, tenemos que $\mathbf{E}_j\subseteq\bigcup_{i\in I}\mathbf{E}_i=\tilde{\mathbf{E}}$.
- $\tilde{\ell}|_{\mathbf{E}_j}=\ell_j$: Sea $x\in\mathbf{E}_j$. Luego existe $i\in I$ tal que $x\in\mathbf{E}_i$ y $\tilde{\ell}(x)=\ell_i(x)$ (i y j pueden ser diferentes). Dado que Q es totalmente ordenado, necesariamente tenemos
$$(\mathbf{E}_i,\ell_i)\preceq(\mathbf{E}_j,\ell_j)\quad\text{o}\quad(\mathbf{E}_j,\ell_j)\preceq(\mathbf{E}_i,\ell_i).$$
Es decir,
$$\mathbf{E}_i\subseteq\mathbf{E}_j\ \text{ y }\ \ell_j|_{\mathbf{E}_i}=\ell_i,\qquad\text{o}\qquad\mathbf{E}_j\subseteq\mathbf{E}_i\ \text{ y }\ \ell_i|_{\mathbf{E}_j}=\ell_j.$$
Dado que $x\in\mathbf{E}_i\cap\mathbf{E}_j$, tenemos que $\ell_i(x)=\ell_j(x)$ y por ende $\tilde{\ell}(x)=\ell_i(x)=\ell_j(x)$, de donde concluimos que
$$\tilde{\ell}|_{\mathbf{E}_j}=\ell_j,$$
y entonces Q tiene una cota superior, que en este caso es $(\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\ell})$.

Luego por Lema de Zorn, P tiene un elemento maximal que denotaremos por $(\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\ell})$:

$$\forall\,(\mathbf{E}',\ell')\in P,\;\; \tilde{\mathbf{E}}\subseteq\mathbf{E}' \text{ y } \ell'|_{\tilde{\mathbf{E}}}=\tilde{\ell} \quad\Longrightarrow\quad (\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\ell})=(\mathbf{E}',\ell').$$

Finalmente, para concluir tenemos que probar que $\tilde{\mathbf{E}}=\mathbf{E}$.
Supongamos por contradicción que existe $\bar{x}\in\mathbf{E}\setminus\tilde{\mathbf{E}}$ de donde $\bar{x}\neq 0$. Ahora definimos

$$\mathbf{E}'=\tilde{\mathbf{E}}+\mathbb{R}\bar{x}=\big\{(x+t\bar{x})\mid\; x\in\tilde{\mathbf{E}}\;,\; t\in\mathbb{R}\big\}.$$

Tenemos que $\tilde{\mathbf{E}}\subsetneq\mathbf{E}'\subseteq\mathbf{E}$. Sea $\ell':\mathbf{E}'\to\mathbb{R}$ dada por

$$\ell'(x+t\bar{x})=\tilde{\ell}(x)+t\alpha,\qquad \forall\, x\in\tilde{\mathbf{E}},\; t\in\mathbb{R}$$

donde $\alpha\in\mathbb{R}$ a determinar es tal que $(\mathbf{E}',\ell')\in$ P.

Notemos que $(\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\ell})\preceq(\mathbf{E}',\ell')$ pues $\tilde{\mathbf{E}}\subseteq\mathbf{E}'$ y $\ell'|_{\tilde{\mathbf{E}}}=\tilde{\ell}$. Además $(\mathbf{E}',\ell')\neq(\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\ell})$.

Luego si efectivamente $(\mathbf{E}',\ell')\in$ P, entonces $(\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\ell})$ no sería un elemento máximal de P.

Para ver que $(\mathbf{E}',\ell')\in$ P sólo necesitamos ver que es posible encontrar $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{\ell}(x)+t\alpha\leq p(x+t\bar{x}),\qquad \forall\, x\in\tilde{\mathbf{E}},\;\forall\, t\in\mathbb{R}.$$

Esto va a ser posible si $\alpha\in\mathbb{R}$ satisface

$$\tilde{\ell}(x)-\alpha\leq p(x-\bar{x})\quad \text{y}\quad \tilde{\ell}(x)+\alpha\leq p(x+\bar{x}),\qquad \forall\, x\in\tilde{\mathbf{E}}. \tag{2.1}$$

En efecto, si (2.1) es cierto, entonces para $t>0$

$$\tilde{\ell}(x)\pm t\alpha=t\left(\tilde{\ell}\left(\tfrac{1}{t}x\right)\pm\alpha\right)\leq t\,p\left(\tfrac{1}{t}x\pm\bar{x}\right)=p\left(t\left(\tfrac{1}{t}x\pm\bar{x}\right)\right)=p(x\pm t\bar{x}).$$

Notemos que obtener (2.1) es equivalente a encontrar $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{x\in\tilde{\mathbf{E}}}\tilde{\ell}(x)-p(x-\bar{x})\leq\alpha\leq\inf_{x\in\tilde{\mathbf{E}}}p(x+\bar{x})-\tilde{\ell}(x). \tag{2.2}$$

Sean $x,y\in\tilde{\mathbf{E}}$, luego sigue que

$$\tilde{\ell}(x)+\tilde{\ell}(y)=\tilde{\ell}(x+y)\leq p(x+y)=p(x-\bar{x}+\bar{x}+y)\leq p(x-\bar{x})+p(\bar{x}+y).$$

Esto implica que

$$\tilde{\ell}(x)-p(x-\bar{x})\leq p(\bar{x}+y)-\tilde{\ell}(y).$$

Tomando supremo sobre x e ínfimo sobre y, obtenemos (2.2), y por lo tanto tal $\alpha\in\mathbb{R}$ existe.

Con esto obtenemos que $(\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\ell})\preceq(\mathbf{E}',\ell')$ con $(\mathbf{E}',\ell')\neq(\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\ell})$, lo cual contradice la maximalidad de $(\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\ell})$. En consecuencia no puede existir $\bar{x}\in\mathbf{E}\setminus\tilde{\mathbf{E}}$ y por lo tanto, $\tilde{\mathbf{E}}=\mathbf{E}$. □

2.3 Consecuencias en e.v.n.

Ahora veremos algunas consecuencias importantes del Teorema de Hahn-Banach Analítico en el caso que **E** esté dotado de una norma.

El primer corolario que veremos dice que la extension de un funcional lineal definido sobre un s.e.v. se puede hacer preservando la norma de este.

Corolario 2.3.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y que $\mathbf{E}_0 \subseteq \mathbf{E}$ es un s.e.v. de $\mathbf{E}$. Si $\ell_0 \in (\mathbf{E}_0, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})^*$, entonces existe $\ell \in \mathbf{E}^*$ tal que $\ell|_{\mathbf{E}_0} = \ell_0$ con $\|\ell_0\|_{\mathbf{E}_0^*} = \|\ell\|_{\mathbf{E}^*}$.

Demostración. Consideremos la función $p : \mathbf{E}_0 \to \mathbb{R}$ definida por

$$p(x) := \|\ell_0\|_{\mathbf{E}_0^*}\|x\|_{\mathbf{E}}, \qquad x \in \mathbf{E}_0.$$

Claramente p es positivamente homogénea y subaditiva, luego en particular es sublineal.

Además, dado que ℓ_0 es lineal continuo, tenemos

$$\ell_0(x) \leq |\ell_0(x)| \leq \|\ell_0\|_{\mathbf{E}_0^*}\|x\|_{\mathbf{E}} = p(x), \qquad \forall\, x \in \mathbf{E}_0.$$

Luego, por el Teorema de Hahn-Banach Analítico tenemos que existe $\ell : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ lineal tal que $\ell|_{\mathbf{E}_0} = \ell_0$ y

$$\ell(x) \leq p(x) = \|\ell_0\|_{\mathbf{E}_0^*}\|x\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall\, x \in \mathbf{E}.$$

Reemplazando x por $-x$ obtenemos que $\ell \in \mathbf{E}^*$ con $\|\ell\|_{\mathbf{E}^*} \leq \|\ell_0\|_{\mathbf{E}_0^*}$.

Por otro lado, notemos que

$$\|\ell_0\|_{\mathbf{E}_0^*} = \sup_{\substack{\|x\|_{\mathbf{E}}\leq 1\\ x\in\mathbf{E}_0}} |\ell_0(x)| = \sup_{\substack{\|x\|_{\mathbf{E}}\leq 1\\ x\in\mathbf{E}_0}} |\ell(x)| \leq \sup_{\substack{\|x\|_{\mathbf{E}}\leq 1\\ x\in\mathbf{E}}} |\ell(x)| = \|\ell\|_{\mathbf{E}^*}.$$

Por lo tanto, $\|\ell\|_{\mathbf{E}^*} = \|\ell_0\|_{\mathbf{E}_0^*}$. □

Ahora veremos dos corolarios que permiten construir funcionales lineales continuos con valores prescritos de antemano en ciertos puntos de interés.

Corolario 2.3.2 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n., que $\{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq \mathbf{E}$ son vectores linealmente independientes y que $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ son dados. Luego existe $\ell \in \mathbf{E}^*$ tal que

$$\ell(x_k) = \alpha_k, \qquad \forall k = 1,\ldots,n.$$

Demostración. Directa usando el Corolario 2.3.1 con $\mathbf{E}_0 = \langle\{x_1,\ldots,x_n\}\rangle$ y $\ell_0 \in \mathbf{E}_0^*$ dado por

$$\ell_0\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ell_0(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k,$$

para cualquier conjunto de escalares $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$.

Dado que $\{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq \mathbf{E}$ son vectores linealmente independientes, cada $x \in \mathbf{E}_0$ se puede escribir de forma única como

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, \quad \text{con } \{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\} \subset \mathbb{R}.$$

Por lo tanto ℓ_0 está bien definido y cumple $\ell_0(x_k) = \alpha_k$ para todo $k = 1,\ldots,n$. □

Corolario 2.3.3 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. Luego, para todo $x_0 \in \mathbf{E}$ con $x_0 \neq 0$ existe $\ell \in \mathbf{E}^*$ tal que

$$\ell(x_0) = \|x_0\|_{\mathbf{E}} \quad \text{y} \quad \|\ell\|_{\mathbf{E}^*} = 1.$$

Demostración. Sean $\mathbf{E}_0 = \langle \{x_0\} \rangle$ y $\ell_0(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|_{\mathbf{E}}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Claramente, $\ell_0 \in \mathbf{E}_0^*$, luego por Corolario 2.3.1, tenemos que existe $\ell \in \mathbf{E}^*$ tal que $\|\ell_0\|_{\mathbf{E}_0^*} = \|\ell\|_{\mathbf{E}^*}$ y $\ell_0 = \ell|_{\mathbf{E}_0}$.

Notemos que $\ell(x_0) = \ell_0(x_0) = \|x_0\|_{\mathbf{E}}$. Además,

$$\|\ell\|_{\mathbf{E}^*} = \|\ell_0\|_{\mathbf{E}_0^*} = \sup_{\substack{\|\lambda x_0\|_{\mathbf{E}} \leq 1 \\ \lambda x_0 \in \mathbf{E}_0}} |\ell_0(\lambda x_0)| = \sup_{\substack{|\lambda| \leq 1 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \left| \ell_0 \left(\frac{\lambda x_0}{\|x_0\|_{\mathbf{E}}} \right) \right| = \sup_{t \in [0,1]} t \frac{|\ell(x_0)|}{\|x_0\|_{\mathbf{E}}} = \sup_{t \in [0,1]} t = 1.$$

□

Corolario 2.3.4 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n.. Luego, para todo $x \in \mathbf{E}$ tenemos que

$$\|x\|_{\mathbf{E}} = \max_{\|\ell\|_{\mathbf{E}^*} \leq 1} |\ell(x)|.$$

Demostración. Fijemos $x \in \mathbf{E}$ arbitrario. Sea $\ell \in \mathbf{E}^*$ tal que $\|\ell\|_{\mathbf{E}^*} \leq 1$. Luego tenemos $|\ell(x)| \leq \|\ell\|_{\mathbf{E}^*} \|x\|_{\mathbf{E}} \leq \|x\|_{\mathbf{E}}$, lo cual implica que

$$\sup_{\|\ell\|_{\mathbf{E}^*} \leq 1} |\ell(x)| \leq \|x\|_{\mathbf{E}}.$$

Notemos que si $x = 0$, el resultado es directo. Por otro lado, si $x \neq 0$ usando Corolario 2.3.3, tenemos que existe $\ell \in \mathbf{E}^*$ tal que $\ell(x) = \|x\|$ con $\|\ell\|_{\mathbf{E}^*} = 1$.

Por lo tanto, el supremo se alcanza, y en consecuencia tenemos $\max_{\|\ell\|_{\mathbf{E}^*} \leq 1} |\ell(x)| = \|x\|_{\mathbf{E}}$. □

Recordemos que la inyección canónica en $\mathbf{E}$ es el mapeo $J : \mathbf{E} \to \mathbf{E}^{**}$ dado por $J(x) := J_x$ para todo $x \in \mathbf{E}$, donde J_x es el funcional de evaluación asociado a x.

Luego $J : \mathbf{E} \to \mathbf{E}^{**}$ es una isometría, pues para todo $x \in \mathbf{E}$ tenemos

$$\|J_x\|_{\mathbf{E}^{**}} = \sup_{\|\ell\|_{\mathbf{E}^*} \leq 1} |J_x(\ell)| = \sup_{\|\ell\|_{\mathbf{E}^*} \leq 1} |\ell(x)| = \max_{\|\ell\|_{\mathbf{E}^*} \leq 1} |\ell(x)| = \|x\|_{\mathbf{E}}.$$

3. Teorema de Hahn-Banach Geométrico

Ahora presentaremos y demostraremos el Teorema de Hahn-Banach en su versión geométrica. También mostraremos algunas consecuencias relacionadas con espacios duales y la caracterización de conjuntos convexos.

3.1 Teorema de Hahn-Banach: primera versión

Definición 3.1.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. Diremos que un conjunto $H \subseteq \mathbf{E}$ es un **hiperplano (cerrado)** si existe una función **lineal (continua)** $\ell : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$H = \{x \in \mathbf{E} \mid \ell(x) = \alpha\}.$$

La primera versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach entrega condiciones para poder **separar** dos conjuntos convexos mediante un hiperplano cerrado:

$$A \subseteq \{x \in \mathbf{E} \mid \langle \ell, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \geq \alpha\} \quad \text{y} \quad B \subseteq \{x \in \mathbf{E} \mid \langle \ell, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \leq \alpha\}$$

Teorema 3.1.1 — Hahn-Banach Geométrico, primera versión. Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y que $A, B \subseteq \mathbf{E}$ son dos conjuntos convexos, disjuntos y no vacíos. Si A es abierto, entonces existe $\ell \in \mathbf{E}^*$ no nula tal que

$$\langle \ell, y \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \leq \langle \ell, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \qquad \forall\, x \in A,\ \forall\, y \in B.$$

Demostración. Vamos a usar el Teorema de Hahn-Banach Analítico, para ello primero vamos a construir una función sublineal, para luego construir un s.e.v. $\mathbf{E}_0$ apropiado y una función lineal definida en este s.e.v.

Sea $W = x_0 + B - A - y_0$, donde $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$. Notemos que $0 \in$ W.

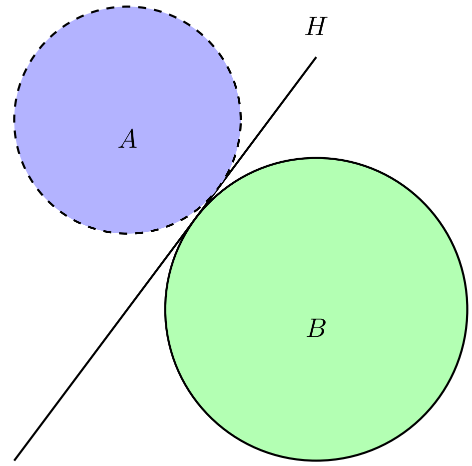


Figura 3.1: Ilustración de separación de conjuntos mediante un hiperplano.

Además, dado A es un conjunto abierto y W resulta también ser abierto pues se escribe como unión arbitraria de conjuntos abiertos:

$$W = \bigcup_{b \in B} x_0 + b - y_0 - A.$$

Más aún, W es convexo, pues A y B son convexos. En efecto, tomando $\lambda \in [0,1]$ obtenemos

$$\begin{aligned}\lambda(x_0 + b_1 - a_1 - y_0) &+ (1-\lambda)(x_0 + b_2 - a_2 - y_0) \\ &= x_0 + \underbrace{\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2}_{\in B} - \underbrace{(\lambda a_1 + (1-\lambda) a_2)}_{\in A} - y_0 \in x_0 + B - A - y_0 = W.\end{aligned}$$

Luego sigue que W es una vecindad convexa del origen en $\mathbf{E}$.

A partir de esta vecindad definamos la función

$$p(x) := \text{ínf}\{t \geq 0 \mid x \in tW\}, \qquad x \in \mathbf{E}.$$

Esta función se conoce en la literatura como función de **Minkowski** o función ***gauge***. Notemos que si $x \in W$ entonces $p(x) \leq 1$ y si $x \notin W$ entonces $p(x) \geq 1$; ver Figura 3.2.

Afirmamos que la función de **Minkowski** es **sublineal**:

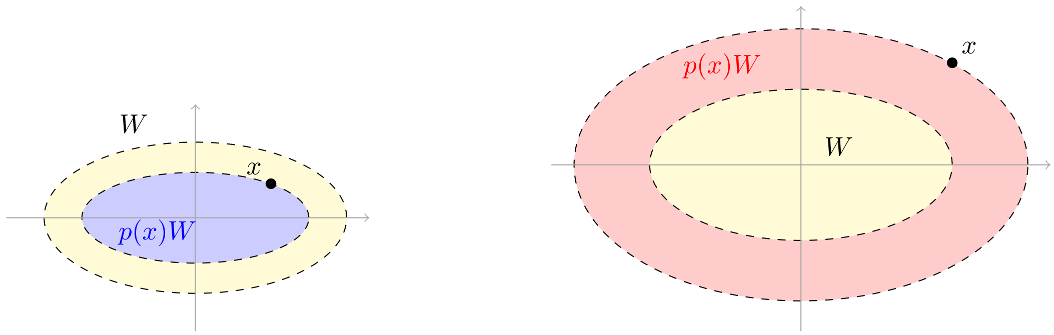
1. p es **positivamente homogénea**: dados $\lambda > 0$ y $x \in \mathbf{E}$, tenemos $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, pues

$$p(\lambda x) = \text{ínf}\{t \geq 0 \mid \lambda x \in tW\} = \text{ínf}\left\{t \geq 0 \,\middle|\, x \in \frac{t}{\lambda} W\right\} = \text{ínf}\left\{\lambda \frac{t}{\lambda} \geq 0 \,\middle|\, x \in \frac{t}{\lambda} W\right\}.$$

   Luego, usando el cambio de variables $s = \frac{t}{\lambda}$ obtenemos

$$p(\lambda x) = \text{ínf}\{\lambda s \geq 0 \mid x \in sW\} = \lambda\, \text{ínf}\{s \geq 0 \mid x \in sW\} = \lambda p(x).$$

2. p es **subaditiva**: dados $x, y \in \mathbf{E}$, tenemos $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.
   En efecto, sean $t, s \geq 0$ (no ambos cero al mismo tiempo) tales que $x \in tW$ e $y \in sW$.



(a) $x \in W$ (b) $x \notin W$

Figura 3.2: Ilustración gráfica de la función de Minkowski según casos

Sean $w, v \in W$ tales que $x = tw$ e $y = sv$. Dado que W es un conjunto convexo, tenemos

$$x + y = tw + sv = (t+s)\left(\frac{t}{t+s}w + \frac{s}{t+s}v\right) \in (t+s)W.$$

Notemos que $p(x+y) = \text{ínf}\{r \geq 0 \mid x+y \in rW\} \leq t+s$. Tomando ínfimo sobre t y s, obtenemos

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y).$$

Sea $\mathbf{E}_0 = \langle\{x_0 - y_0\}\rangle$. Este s.e.v. es distinto del s.e.v. trivial $\{0\}$ pues $A \cap B = \emptyset$, y por lo tanto $x_0 \neq y_0$. Definimos también $\ell_0 : \mathbf{E}_0 \to \mathbb{R}$ vía la fórmula

$$\ell_0(\lambda(x_0 - y_0)) = \lambda, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Veamos que se verifican las hipótesis de Teorema de Hahn-Banach analítico, es decir, se cumple que

$$\ell_0(x) \leq p(x), \qquad \forall\, x \in \mathbf{E}_0.$$

Notemos que todos los elementos de $\mathbf{E}_0$ son de la forma $\lambda(x_0 - y_0)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Además, del hecho que p es positivamente homogénea tenemos que

$$p(\lambda(x_0 - y_0)) = \lambda p(x_0 - y_0), \qquad \forall \lambda > 0.$$

Notemos también que $x_0 - y_0 \notin W$ pues de lo contrario, dado que $W = x_0 + B - A - y_0$, tendríamos que $0 \in A - B$ y esto implicaría que $A \cap B \neq \emptyset$.

Sigue por definición que $p(x_0 - y_0) \geq 1$. De esto último concluimos que si $\lambda \geq 0$ entonces

$$\ell_0(\lambda(x_0 - y_0)) = \lambda = \lambda \cdot 1 \leq \lambda p(x_0 - y_0) = p(\lambda(x_0 - y_0)).$$

Por otro lado, si $\lambda < 0$ tenemos $\ell_0(\lambda(x_0 - y_0)) = \lambda < 0 \leq p(\lambda(x_0 - y_0))$, de donde concluimos que $\ell_0(x) \leq p(x)$ para todo $x \in \mathbf{E}_0$.

Luego, por el Teorema de Hahn-Banach Analítico, existe $\ell : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ lineal tal que $\ell|_{\mathbf{E}_0} = \ell_0$ y

$$\ell(x) \leq \text{ínf}\{t \geq 0 \mid x \in tW\}.$$

Para concluir tenemos que ver que ℓ es continua y satisface $\langle \ell, y\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \leq \langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}$ para todo $x \in A$, $y \in B$.

- Notemos que si $\tilde{x} \in W$ entonces $p(\tilde{x}) \leq 1$ y por lo tanto

$$\ell(x_0+y-x-y_0) \leq p(x_0+y-x-y_0) \leq 1, \qquad \forall\, x \in A,\ \forall\, y \in B$$

esto implica que

$$\ell(y) \leq \underbrace{1-\ell(x_0-y_0)}_{=0} + \ell(x), \qquad \forall\, x \in A,\ \forall\, y \in B,$$

por lo que concluimos que $\ell(y) \leq \ell(x)$ para todo $x \in A$ e $y \in B$.
Es decir, A y B pueden ser separados por un hiperplano.

- Resta ver que ℓ es continua. Ahora, como ℓ es lineal es suficiente ver que ℓ es continua en $x = 0$.
Dado que $\ell(x) \leq \text{ínf}\{t \geq 0 \mid x \in tW\}$, si $x \in W$ entonces $\ell(x) \leq p(x) \leq 1$.
Por otro lado, si $x \in W$ entonces $\ell(-x) = -\ell(x) \geq -p(x) \geq -1$ y por ende

$$|\ell(x)| \leq 1, \qquad \forall\, x \in W \cap (-W)$$

Como W es abierto y $0 \in W$, entonces $W \cap (-W)$ es una vecindad abierta del origen.
Dado que $\ell(0) = 0$ y para todo $\varepsilon > 0$, tenemos $|\ell(\varepsilon x)| \leq \varepsilon$ cualquiera sea $x \in (W \cap (-W))$, concluimos que ℓ es continua en $x = 0$. Por lo tanto $\ell \in \mathbf{E}^*$

Finalmente, por construcción ℓ_0 es no nulo, y por lo tanto ℓ también lo es. □

3.2 Consecuencias de Hahn-Banach Geométrico

Ahora revisaremos algunas consecuencias del Teorema de Hahn-Banach Geométrico. En particular veremos una segunda versión de este resultado que permite separar conjuntos convexos de forma *estricta*.

Corolario 3.2.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y que $C \subseteq \mathbf{E}$ es un conjunto cerrado, convexo y no vacío. Luego, para todo $x_0 \notin C$, existen $\ell \in \mathbf{E}^* \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\langle \ell, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \leq \alpha < \langle \ell, x_0 \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \qquad \forall\, x \in C.$$

Demostración. Definimos $A = \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(x_0, \varepsilon)$ y $B = C$, con $\varepsilon > 0$ tal que $A \cap B = \emptyset$.

Dado que C es cerrado y $x_0 \notin C$, x_0 no puede ser un punto de adherencia de C, luego esto garantiza la existencia de $\varepsilon > 0$.

Dado que A es abierto y convexo, por el Teorema de Hahn-Banach Geométrico existe $\ell \in \mathbf{E}^* \setminus \{0\}$ tal que

$$\langle \ell, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \leq \langle \ell, x_0 + \varepsilon b \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \qquad \forall\, x \in C,\ \forall\, b \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1).$$

De donde tenemos que

$$\langle \ell, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \leq \langle \ell, x_0 \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} + \varepsilon \langle \ell, b \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \qquad \forall\, x \in C,\ \forall\, b \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1).$$

Tomamos $b \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1)$ tal que $\langle \ell, b \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = -\frac{1}{2}\|\ell\|_{\mathbf{E}^*}$, y con esto podemos concluir que

$$\langle \ell, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \leq \langle \ell, x_0 \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} - \frac{\varepsilon}{2}\|\ell\|_{\mathbf{E}^*} < \langle \ell, x_0 \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \qquad \forall x \in C.$$

Tomando $\alpha = \langle \ell, x_0 \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} - \dfrac{\varepsilon}{2}\|\ell\|_{\mathbf{E}^*}$ obtenemos la conclusión buscada. □

Definición 3.2.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. Diremos que un conjunto $M \subseteq \mathbf{E}$ es un **semi-espacio (cerrado)** si existe una función **lineal (continua)** $\ell : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$M = \{x \in \mathbf{E} \mid \ell(x) \leq \alpha\}.$$

La siguiente es una caracterización de conjuntos convexos.

Corolario 3.2.2 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y que $C \subseteq \mathbf{E}$ es un conjunto cerrado, convexo y no vacío. Luego C coincide con la intersección de todos los semi-espacios cerrados que lo contiene, es decir,

$$S := \bigcap_{C \subseteq M} \{M \subseteq \mathbf{E} \mid M \text{ es un semi-espacio cerrado}\} = C$$

Demostración. Claramente $C \subseteq S \subseteq \mathbf{E}$. En particular, si $C = \mathbf{E}$, el resultado es trivial.

Supongamos que $C \neq \mathbf{E}$. Por el Corolario 3.2.1, para todo $x_0 \notin C$, existe $\ell_{x_0} \in \mathbf{E}^* \setminus \{0\}$ y $\alpha_{x_0} \in \mathbb{R}$ tales que

$$\langle \ell_{x_0}, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \leq \alpha_{x_0} < \langle \ell_{x_0}, x_0\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \qquad \forall\, x \in C.$$

Lo que implica que

$$C \subseteq M := \{x \in \mathbf{E} \mid \langle \ell_{x_0}, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \leq \alpha_{x_0}\},$$

en donde M es un semi-espacio cerrado; en particular $S \subseteq M$.

Dado que $x_0 \notin C$ y $\alpha_{x_0} < \langle \ell_{x_0}, x_0\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}$, entonces $x_0 \in M^c \subseteq S^c$ y luego $C^c \subseteq S^c$. Por lo tanto $S \subseteq C$. □

Corolario 3.2.3 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y que $M \subseteq \mathbf{E}$ es un s.e.v. tal que $\overline{M} \neq \mathbf{E}$. Luego existe $\ell \in \mathbf{E}^* \setminus \{0\}$ tal que

$$\langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 0, \qquad \forall\, x \in M.$$

Demostración. Sea $x_0 \in \mathbf{E} \setminus \overline{M}$, por Corolario 3.2.1 existe $\ell \in \mathbf{E}^* \setminus \{0\}$ tal que

$$\langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \leq \langle \ell, x_0\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \qquad \forall\, x \in M.$$

Si existiese un $\bar{x} \in M$ tal que $\langle \ell, \bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \neq 0$, entonces

$$\lambda \langle \ell, \bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle \ell, \lambda\bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \leq \langle \ell, x_0\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Si $\langle \ell, \bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} > 0$, haciendo $\lambda \to +\infty$ tendríamos que $+\infty \leq \langle \ell, x_0\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}$.
- Si $\langle \ell, \bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} < 0$, haciendo $\lambda \to -\infty$ también tendríamos que $+\infty \leq \langle \ell, x_0\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}$.

En ambos casos obtendríamos algo absurdo. Luego, necesariamente $\langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 0$ para todo $x \in M$. □

El contrarecíproco del Corolario 3.2.3 resulta útil para demostrar que un s.e.v. $M \subseteq \mathbf{E}$ es denso en $\mathbf{E}$. En efecto, M será denso en $\mathbf{E}$ si para cualquier $\ell \in \mathbf{E}^*$ tal que $\ell|_M \equiv 0$ tenemos necesariamente que $\ell \equiv 0$. Aplicaremos esto a continuación en el estudio de espacio ortogonales.

3.2.1 Espacios Ortogonales

Definición 3.2.2 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n.

- Supongamos que $M \subseteq \mathbf{E}$ es un s.e.v. de $\mathbf{E}$. Definimos el **espacio ortogonal a M** como el

conjunto
$$M^{\perp} := \{\ell \in \mathbf{E}^* \mid \langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 0, \quad \forall\, x \in M\}$$

- Supongamos que $N \subseteq \mathbf{E}^*$ es un s.e.v. de $\mathbf{E}^*$. Definimos el **espacio ortogonal a N** como el conjunto
$$N^{\perp} := \{x \in \mathbf{E} \mid \langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 0, \quad \forall\, \ell \in N\}$$

Notemos que $M^{\perp}$ y $N^{\perp}$ son s.e.v. de $\mathbf{E}^*$ y $\mathbf{E}$, respectivamente. Además, ambos son cerrados pues

$$M^{\perp} = \bigcap_{x\in M} \{\ell \in \mathbf{E}^* \mid \langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 0\} \quad \text{y} \quad N^{\perp} = \bigcap_{\ell \in N} \{x \in \mathbf{E} \mid \langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 0\}.$$

Lo que implica que tanto $M^{\perp}$ como $N^{\perp}$ pueden ser escrito como intersección arbitraria de conjuntos cerrados en $\mathbf{E}^*$ y $\mathbf{E}$, respectivamente.
Más aún, dado que tenemos

$$\langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 0, \qquad \forall\, x \in M,\ \forall\, \ell \in M^{\perp}.$$

Si $x \in M$ entonces $x \in (M^{\perp})^{\perp}$ y por lo tanto $M \subseteq (M^{\perp})^{\perp}$. Luego, como $(M^{\perp})^{\perp}$ es cerrado en $\mathbf{E}$, obtenemos $\overline{M} \subseteq (M^{\perp})^{\perp}$. De forma similar tenemos que $\overline{N} \subseteq (N^{\perp})^{\perp}$.

Proposición 3.2.4 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y $M \subseteq \mathbf{E}$ es un s.e.v. de $\mathbf{E}$. Entonces $\overline{M} = (M^{\perp})^{\perp}$

Demostración. Denotemos por $\mathbf{E}_0 = (M^{\perp})^{\perp}$. Sigue que $\mathbf{E}_0$ es un s.e.v. de $\mathbf{E}$, $(\mathbf{E}_0, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y M es un s.e.v. de $\mathbf{E}_0$. Tomemos $\ell_0 \in \mathbf{E}_0^*$ tal que $\ell_0|_M \equiv 0$, es decir,

$$\langle \ell_0, x\rangle_{\mathbf{E}_0^*,\mathbf{E}_0} = 0, \qquad \forall x \in M.$$

Por el Corolario 2.3.1, existe $\ell \in \mathbf{E}^*$ tal que $\ell|_{\mathbf{E}_0} = \ell_0$. En particular tenemos que $\ell \in M^{\perp}$ pues

$$\langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle \ell_0, x\rangle_{\mathbf{E}_0^*,\mathbf{E}_0} = 0, \qquad \forall x \in M.$$

Por otro lado, dado $x \in \mathbf{E}_0 = (M^{\perp})^{\perp}$, por definición de espacio ortogonal, debemos tener

$$\langle \tilde{\ell}, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 0 \qquad \forall \tilde{\ell} \in M^{\perp}.$$

Dado que $\ell \in M^{\perp}$, Esto implica que $\ell_0 \equiv 0$ pues

$$\langle \ell_0, x\rangle_{\mathbf{E}_0^*,\mathbf{E}_0} = \langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 0, \qquad \forall x \in \mathbf{E}_0.$$

Finalmente, por el Corolario 3.2.3, concluimos que M es denso en $\mathbf{E}_0$, es decir, $\overline{M} = (M^{\perp})^{\perp}$. □

3.3 Teorema de Hahn-Banach Geométrico: segunda versión

Definición 3.3.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y que $A, B \subseteq \mathbf{E}$ son dos subconjuntos no vacíos. Diremos que A y B se pueden **separar estrictamente** por un hiperplano $H = \{x \in \mathbf{E} \mid \ell(x) = \alpha\}$ si

$$\sup_{x\in A} \ell(x) < \alpha < \inf_{y\in B} \ell(y).$$

La segunda versión del Teorema de Hahn-Banach Geométrico también entrega condiciones para poder separar dos conjuntos convexos mediante un hiperplano cerrado. La gran diferencia es que permite hacerlo en un sentido estricto (Ver Figura 3.3): para algún $\varepsilon > 0$

$$A \subseteq \{x \in \mathbf{E} \mid \langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \geq \alpha + \varepsilon\} \quad \text{y} \quad B \subseteq \{x \in \mathbf{E} \mid \langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \leq \alpha - \varepsilon\}$$

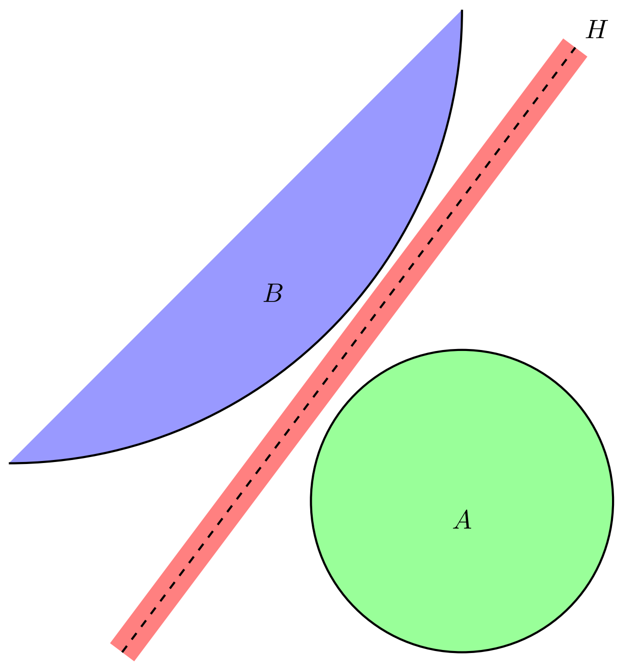


Figura 3.3: Ilustración de separación estricta de conjuntos mediante un hiperplano.

Teorema 3.3.1 — Hahn-Banach Geométrico, segunda versión. Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y que $A, B \subseteq \mathbf{E}$ son dos conjuntos cerrados, convexos, disjuntos y no vacíos. Si A es compacto, entonces existen $\ell \in \mathbf{E}^* \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sup_{x\in A} \langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} < \alpha < \inf_{y\in B} \langle \ell, y\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}.$$

Demostración. Usando el Corolario 3.2.1 con $C = A - B$ (resta entre los elementos de los conjuntos A y B) y $x_0 = 0$ concluimos.

En efecto, como $A \cap B = \emptyset$ entonces $0 \notin A - B$. Además, dado que A es compacto y B es cerrado entonces $A - B$ es cerrado. No es difícil ver que C es también convexo. Luego, Corolario 3.2.1 implica que existen $\ell \in \mathbf{E}^* \setminus \{0\}$ y $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$ tales que

$$\langle \ell, x-y \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \leq \tilde{\alpha} < \langle \ell, 0 \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 0, \qquad \forall\, x \in A,\ \forall\, y \in B.$$

En particular

$$\langle \ell, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \leq \tilde{\alpha} + \langle \ell, y \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \qquad \forall x \in A, y \in B.$$

Tomando ínfimo y supremo respectivamente, y recordando que $\tilde{\alpha} < 0$ obtenemos

$$\sup_{x \in A} \langle \ell, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \leq \tilde{\alpha} + \operatorname{ínf}_{y \in B} \langle \ell, y \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} < \frac{1}{2}\tilde{\alpha} + \operatorname{ínf}_{y \in B} \langle \ell, y \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} < \operatorname{ínf}_{y \in B} \langle \ell, y \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}.$$

Tomando $\alpha = \frac{1}{2}\tilde{\alpha} + \operatorname{ínf}_{y \in B} \langle \ell, y \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}$ concluimos. □

4. Teorema de Aplicación Abierta

Ahora estudiaremos un segundo principio fundamental en análisis funcional, el llamado Teorema de la Aplicación Abierta, que es una consecuencia del Lema de Baire. Veremos algunas consecuencias relacionadas con operadores lineales y también mostrares una consecuencia importante de este resultado, el teorema del Grafo Cerrado que permite caracterizar la continuidad de un operador lineal.

Teorema 4.0.1 — Aplicación Abierta. Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ son dos espacios de Banach. Si $L \in \mathscr{L}C(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ es sobreyectiva, entonces L es abierta, es decir, $L(\mathscr{O})$ es abierto en $\mathbf{F}$ para todo $\mathscr{O} \subseteq \mathbf{E}$ abierto.

- La forma más habitual de usar el Teorema de la Aplicación Abierta es la siguiente:
  Si $L \in \mathscr{L}C(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ es sobreyectiva, entonces existe $r > 0$ tal que
  $$\mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0, r) \subseteq L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0, 1))$$
- Toda aplicación (lineal) abierta es sobreyectiva, luego el Teorema de la Aplicación Abierta es en realidad una equivalencia.

Demostración. Dividiremos la demostración en 4 pasos:

1) Veamos que int $\left(\overline{L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))}\right) \neq \emptyset$.

Definamos $F_k = k\,\overline{L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))}$. Notemos que por definición F_k es cerrado en $\mathbf{F}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Dado que L es sobreyectiva, tenemos que $\displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k = \mathbf{F}$, pues si $y \in \mathbf{F}$, existe $x \in \mathbf{E}$ tal que $y = L(x)$.

Notemos que x no está necesariamente en $\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1)$, pero para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$kL\left(\frac{1}{k}x\right) = L(x) = y.$$

Tomando $k = \text{ínf}\{j \in \mathbb{N} \mid \|x\|_{\mathbf{E}} < j\}$, vemos que $y \in kL(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))$ pues $\dfrac{1}{k}\|x\|_{\mathbf{E}} < 1$.

Ahora bien, por el Lema de Baire, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(F_{k_0}) \neq \emptyset$, es decir,

$$\text{int}\left(k_0\overline{L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))}\right) \neq \emptyset.$$

En particular, esto implica que

$$\text{int}\left(\overline{L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))}\right) \neq \emptyset.$$

2) Veamos ahora que $0 \in \text{int}\left(\overline{L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))}\right)$. De hecho, vamos a ver que existe $r > 0$ tal que,

$$\mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0,2r) \subseteq \overline{L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))}.$$

Por la parte anterior $\text{int}\left(\overline{L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))}\right) \neq \emptyset$, luego existen $y_0 \in \overline{L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))}$ y $r > 0$ tales que

$$\mathbb{B}_{\mathbf{F}}(y_0,4r) \subseteq \overline{L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))}.$$

Sabemos que $L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))$ es un conjunto simétrico, y por lo tanto:

$$y \in \overline{L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))} \quad \iff \quad -y \in \overline{L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))}.$$

Para $y \in \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0,4r)$ tenemos que

$$y = y + y_0 - y_0 \in \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(y_0,4r) + \overline{L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))} \subseteq \overline{L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))} + \overline{L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))}.$$

Sigue que

$$\mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0,2r) \subseteq \frac{1}{2}\overline{L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))} + \frac{1}{2}\overline{L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))} = \overline{L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))}.$$

Por tanto $0 \in \text{int}\left(\overline{L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))}\right)$.

3) Veamos que $0 \in \text{int}(L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1)))$.

Probemos que $\mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0,r) \subseteq L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))$, donde $r > 0$ es tal que $\mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0,2r) \subseteq \overline{L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))}$.

Sabemos que para $y \in \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0,r)$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1)$ tal que

$$\|2y - L(x)\|_{\mathbf{F}} < \varepsilon, \tag{4.1}$$

pues $2y$ es un punto de adherencia de $L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))$.

a) Fijemos $\bar{y} \in \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0,r)$ en lo que sigue. Tomemos $\varepsilon = r$ en (4.1) y sea x_1 dado por (4.1) para $y = \bar{y}$. Entonces tenemos

$$\|x_1\|_{\mathbf{E}} < 1 \quad \text{y} \quad \|2\bar{y} - L(x_1)\|_{\mathbf{F}} < r.$$

Definamos $z_1 = \frac{x_1}{2}$. Luego tenemos que $\|z_1\|_{\mathbf{E}} < \frac{1}{2}$ y $\|\bar{y} - L(z_1)\|_{\mathbf{F}} < \frac{r}{2}$.
Notemos también que $y_1 := \bar{y} - L(z_1) \in \mathbb{B}_{\mathbf{F}}\left(0, \frac{r}{2}\right)$ y entonces $2y_1 \in \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0,r)$

b) Tomemos nuevamente $\varepsilon = r$ en (4.1) y sea x_2 dado por (4.1) para $y = 2(\bar{y} - L(z_1))$. Entonces tenemos

$$\|x_2\|_{\mathbf{E}} < 1 \quad \text{y} \quad \|4(\bar{y} - L(z_1)) - L(x_2)\| < r.$$

Definamos $z_2 = \frac{x_2}{4}$. Luego tenemos que $\|z_2\|_{\mathbf{E}} < \frac{1}{4}$ y $\|\bar{y} - L(z_1) - L(z_2)\|_{\mathbf{F}} < \frac{r}{4}$

c) Por inducción, se puede construir una sucesión $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\|z_k\|_{\mathbf{E}} < \frac{1}{2^k}$ y

$$\|\bar{y} - L(z_1 + z_2 + \cdots + z_k)\|_{\mathbf{F}} < \frac{r}{2^k}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Veamos que $S_k = \sum_{j=1}^{k} z_j$ converge. Para ello, veamos que $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbf{E}$.
Notemos que

$$\|S_k - S_{k+j}\|_{\mathbf{E}} = \left\|\sum_{i=k+1}^{k+j} z_i\right\|_{\mathbf{E}} \leq \sum_{i=k+1}^{k+j} \|z_i\|_{\mathbf{E}} \leq \sum_{i=k+1}^{k+j} \frac{1}{2^i} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Por lo tanto, $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbf{E}$, y por ende, converge a un cierto $\bar{x}\in\mathbf{E}$.

d) Para concluir necesitamos que $L(\bar{x}) = \bar{y}$ y $\|\bar{x}\|_{\mathbf{E}} < 1$. Recordemos que

$$\|\bar{y} - L(S_k)\|_{\mathbf{F}} < \frac{r}{2^k}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

Esto implica que $\|\bar{y} - L(\bar{x})\|_{\mathbf{F}} = 0$ puesto que $S_k \to \bar{x}$, y por lo tanto, $L(\bar{x}) = \bar{y}$.
Además, dado que tenemos

$$\|S_k\|_{\mathbf{E}} \leq \sum_{j=1}^{k} \|z_j\|_{\mathbf{E}} = \|z_1\|_{\mathbf{E}} + \sum_{j=2}^{k} \|z_j\|_{\mathbf{E}} < \|z_1\|_{\mathbf{E}} + \sum_{j=2}^{k} \frac{1}{2^j} < \|z_1\|_{\mathbf{E}} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \|z_1\|_{\mathbf{E}} + \frac{1}{2},$$

haciendo $k\to+\infty$, vemos que $\|\bar{x}\|_{\mathbf{E}} \leq \|z_1\|_{\mathbf{E}} + \frac{1}{2} < 1$. Por lo tanto $\mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0,r) \subseteq L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))$.

4) Veamos ahora la conclusión.
Sea $\mathscr{O} \subseteq \mathbf{E}$ abierto. Notemos que para $x\in\mathscr{O}$, existe $r_x > 0$ tal que $\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(x,r_x) \subseteq \mathscr{O}$.
Más aún, $\mathscr{O} = \bigcup_{x\in\mathscr{O}} \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(x,r_x)$. Ahora, fijemos $x\in\mathscr{O}$ y sea $r_x > 0$ el radio asociado.
Sea $\tilde{y} \in L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(x,r_x))$, luego existe $\tilde{x}\in\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(x,r_x)$ tal que $L(\tilde{x}) = \tilde{y}$.
Como el conjunto $\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(x,r_x)$ es abierto, existe un $\rho > 0$ tal que

$$\tilde{x} + \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,\rho) = \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(\tilde{x},\rho) \subseteq \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(x,r_x).$$

Aplicando L en lo anterior y utilizando el hecho de que L es lineal, obtenemos

$$\tilde{y} + L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,\rho)) \subseteq L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(x,r_x)).$$

Usando ahora el paso 3 tenemos que

$$\mathbb{B}_{\mathbf{F}}(\tilde{y},\rho r) = \tilde{y} + \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0,\rho r) = \tilde{y} + \rho\mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0,r) \subseteq \tilde{y} + \rho L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1)) = \tilde{y} + L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,\rho)) \subseteq L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(x,r_x)).$$

Lo que implica que $L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(x,r_x))$ son abiertos en $\mathbf{F}$ para cualquier $x\in\mathscr{O}$.
Finalemente, dado que

$$L(\mathscr{O}) = L\left(\bigcup_{x\in\mathscr{O}} \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(x,r_x)\right) = \bigcup_{x\in\mathscr{O}} L\left(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(x,r_x)\right).$$

tenemos que $L(\mathscr{O})$ es abierto, pues se escribe como unión arbitraria de conjuntos abiertos. $\square$

4.1 Consecuencias del Teorema de la Aplicación Abierta

Revisemos ahora lagunas consecuencias del Teorema de la Aplicación Abierta respecto a operadores lineales biyectivos.

Corolario 4.1.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ son dos espacios de Banach y que $L \in \mathscr{L}C(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ es biyectiva, entonces L^{-1} es un operador lineal continuo, es decir, $L^{-1} \in \mathscr{L}C(\mathbf{F}, \mathbf{E})$.

Demostración.

- L^{-1} es lineal: dados $u, v \in \mathbf{F}$, existen $x, y \in \mathbf{E}$ tales que $u = L(x)$ y $v = L(y)$. Luego, dado $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos

$$L^{-1}(u + \lambda v) = L^{-1}(L(x) + \lambda L(y)) = L^{-1}(L(x + \lambda y)) = x + \lambda y = L^{-1}(u) + \lambda L^{-1}(v).$$

- L^{-1} es continuo: Por el Teorema de la Aplicación Abierta existe $r > 0$ tal que

$$\mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0, r) \subseteq L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0, 1)).$$

En particular, para todo $y \in \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0, r)$ existe $x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0, 1)$ tal que $L(x) = y$. En consecuencia

$$\|L^{-1}(y)\|_{\mathbf{E}} = \|x\|_{\mathbf{E}} < 1, \qquad \forall\, y \in \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0, r).$$

La continuidad de L^{-1} viene de notar que para $y \in \mathbf{F} \setminus \{0\}$ tenemos que $\frac{ry}{2\|y\|_{\mathbf{F}}} \in \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0, r)$ y por lo tanto:

$$\|L^{-1}(y)\|_{\mathbf{E}} = \frac{2\|y\|_{\mathbf{F}}}{r} \cdot \left\| L^{-1}\left(\frac{ry}{2\|y\|_{\mathbf{F}}}\right) \right\|_{\mathbf{E}} \leq \frac{2}{r}\|y\|_{\mathbf{F}}.$$

□

El resultado anterior tiene una consecuencia importante respecto a la equivalencia de normas en espacios de Banach.

Corolario 4.1.2 Supongamos que existen dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ sobre un e.v. $\mathbf{E}$, tales que, tanto $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_1)$ como $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_2)$, son espacios de Banach. Supongamos además que existe $c_1 > 0$ tal que

$$\|x\|_2 \leq c_1 \|x\|_1, \qquad \forall\, x \in \mathbf{E}. \tag{4.2}$$

Luego, las normas son equivalentes, es decir, existe $c_2 > 0$ tal que

$$\|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2, \qquad \forall\, x \in \mathbf{E}.$$

Demostración. Tomemos $\|\cdot\|_{\mathbf{E}} = \|\cdot\|_1$ y $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}}) = (\mathbf{E}, \|\cdot\|_2)$ en el Corolario 4.1.1 con

$$L = \mathrm{id} : (\mathbf{E}, \|\cdot\|_1) \to (\mathbf{E}, \|\cdot\|_2).$$

Así, $L(x) = x$ para todo $x \in \mathbf{E}$. Claramente L es lineal biyectiva, y por (4.2) tenemos L es continua.

Por Corolario 4.1.1, podemos deducir que L^{-1} es continua, lo que implica que

$$\|\mathrm{id}^{-1}(x)\|_1 \leq c_2 \|x\|_2, \qquad \forall\, x \in \mathbf{E},$$

y esto último es equivalente a

$$\|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2, \qquad \forall\, x \in \mathbf{E}.$$

□

4.2 Teorema del Grafo Cerrado

Otra consecuencia importante del Teorema de la Aplicación Abierta es una caracterización de operadores lineales continuos, que dice relación con el grafo del operador.

Notación 4.1. *Supongamos que* $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ *y* $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ *son dos e.v.n. Denotaremos por* $\|\cdot\|_{\mathbf{E}\times\mathbf{F}}$ *a la norma en el espacio producto* $\mathbf{E}\times\mathbf{F}$ *dada por:*

$$\|(x,y)\|_{\mathbf{E}\times\mathbf{F}} := \|x\|_{\mathbf{E}} + \|y\|_{\mathbf{F}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E},\ y \in \mathbf{F}.$$

Teorema 4.2.1 — Grafo Cerrado. Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ son dos espacios de Banach y que $L : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ es un operador lineal tal que su grafo

$$\mathrm{Gr}(L) := \{(x,y) \in \mathbf{E}\times\mathbf{F} \mid y = L(x)\}$$

es cerrado en $(\mathbf{E}\times\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}\times\mathbf{F}})$. Luego, L es un operador continuo.

Demostración. Consideremos dos normas en $\mathbf{E}$:

$$\|x\|_1 = \|x\|_{\mathbf{E}} + \|L(x)\|_{\mathbf{F}} \qquad \text{y} \qquad \|x\|_2 = \|x\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

No es difícil ver que $\|x\|_1$ y $\|x\|_2$ son normas sobre $\mathbf{E}$ y que además $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ para todo $x \in \mathbf{E}$.

Además, por hipótesis, que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Banach. Luego, si $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_1)$ fuese también un espacio de Banach, entonces por el Corolario 4.1.2 existiría $c > 0$ tal que

$$\|L(x)\|_{\mathbf{F}} \leq \|x\|_{\mathbf{E}} + \|L(x)\|_{\mathbf{F}} = \|x\|_1 \leq c\|x\|_2 = c\|x\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall\, x \in \mathbf{E}.$$

Por lo tanto, L sería un operador continuo.

Para concluir entonces tenemos que probar que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach (sólo resta ver la completitud).

Sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_1)$. Luego, para todo $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_k - x_j\|_{\mathbf{E}} + \|L(x_k) - L(x_j)\|_{\mathbf{F}} = \|x_k - x_j\|_1 < \varepsilon, \qquad \forall\, k, j \in \mathbb{N} \text{ tales que } k, j \geq k_0.$$

En particular, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y $\{L(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$.

Dado que tanto $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ como $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ son espacios de Banach, existen $\bar{x} \in \mathbf{E}$ e $\bar{y} \in \mathbf{F}$ tales que

$$\|x_k - \bar{x}\|_{\mathbf{E}} \to 0 \qquad \text{y} \qquad \|L(x_k) - \bar{y}\|_{\mathbf{F}} \to 0 \qquad \text{cuando } k \to +\infty.$$

En particular, tenemos $(x_k, L(x_k)) \to (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{E}\times\mathbf{F}$.

Sin embargo, dado que el grafo de L es cerrado necesariamente tenemos $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Gr}(L)$, es decir, $L(\bar{x}) = \bar{y}$. Por otro lado, notemos que

$$\|x_k - \bar{x}\|_1 = \|x_k - \bar{x}\|_{\mathbf{E}} + \|L(x_k) - L(\bar{x})\|_{\mathbf{F}} = \|x_k - \bar{x}\|_{\mathbf{E}} + \|L(x_k) - \bar{y}\|_{\mathbf{F}} \to 0 \qquad \text{si } k \to \infty.$$

En otras palabras, tenemos que $x_k \to \bar{x}$ en $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_1)$ y por lo tanto $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_1)$ es completo.

Finalmente, la conclusión la obtenemos gracias al Corolario 4.1.2.

□

La completitud en el Teorema del Grafo Cerrado es fundamental.

Por ejemplo, tomemos $\mathbf{E} = C^{\infty}((0,1)) \cap C([0,1])$ y $\mathbf{F} = C([0,1],\mathbb{R})$, ambos espacios dotados de la norma

$$\|x\|_{\mathbf{E}} = \|x\|_{\mathbf{F}} = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)| = \|x\|_{\infty}.$$

Consideremos el operador $D : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ dado por $D(x) = x'$.

- D tiene grafo cerrado: Supongamos que $(x_k, x_k') \to (x,y) \in \mathbf{E}\times\mathbf{F}$, es decir, tenemos que $x_k \to x$ uniformemente y $x_k' \to y$ uniformemente.
  Gracias al Teorema Fundamental del Cálculo y a la convergencia uniforme tenemos

  $$x(t) = \lim_{k\to+\infty} x_k(t) = \lim_{k\to+\infty} x_k(0) + \int_0^t x_k'(s)ds = x(0) + \int_0^t y(s)ds, \qquad \forall t \in [0,1].$$

  Luego $x' = y$. Por lo tanto, $\mathrm{Gr}(D)$ es cerrado en $\mathbf{E}\times\mathbf{F}$.
- D no es continuo: Definamos $x_k(t) := t^{k+1}$ para todo $t \in [0,1]$ y $k \in \mathbb{N}$.
  Luego, tenemos $D(x_k)(t) = (k+1)t^k$ para todo $t \in [0,1]$. Entonces,

  $$\|D(x_k)\|_{\infty} = k+1 \to +\infty, \qquad \text{si } k \to +\infty,$$

  pero $\|x_k\|_{\infty} = 1$ y por tanto D no puede ser un operador continuo.

El problema aquí está en que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ no es completo.

5. Operador adjunto

Ahora vamos a introducir la noción de operador adjunto, mostraremos sus principales propiedades. Este operador corresponde a una generalización de la noción de transpuesta de una matriz a operadores lineales continuos entre e.v.n. de dimensión arbitraria.

Definición 5.0.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ son dos e.v.n.. Diremos que un operador (no necesariamente lineal) $A\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ es **acotado** si existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|A(x)\|_{\mathbf{F}} \leq c\|x\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Notación 5.1. *Dado $A\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$, su **imagen** (también llamado **rango**) será el conjunto*

$$\mathrm{im}(A) := \{y \in \mathbf{F} \mid \exists x \in \mathbf{E},\ y = A(x)\}$$

*y su **núcleo** (también llamado **kernel**) será el conjunto*

$$\ker(A) := \{x \in \mathbf{E} \mid A(x) = 0\}.$$

En el caso que $A\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ sea lineal tenemos que:
- $\ker(A)$ es un s.e.v. de $\mathbf{E}$ (cerrado si A es continuo).
- $\mathrm{im}(A)$ es un s.e.v. de $\mathbf{F}$ (no necesariamente cerrado incluso si A es continuo).
- A es acotado si y sólo si A es continuo.

Definición 5.0.2 Supongamos que $A \in \mathscr{L}C(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ es un operador acotado dado. Definimos el **operador adjunto** de A como el operador lineal $A^*\colon \mathbf{F}^* \to \mathbf{E}^*$ que satisface

$$\langle A^*(\ell), x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle \ell, A(x)\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}, \qquad \forall\, x \in \mathbf{E},\ \forall\, \ell \in \mathbf{F}^*.$$

En otras palabras, el operador adjunto de A viene dado por la fórmula

$$A^*(\ell) = \ell \circ A, \qquad \forall \ell \in \mathbf{F}^*.$$

Notación 5.2. *Si* $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})^* \cong (\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ *y* $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})^* \cong (\mathbf{Y}, \|\cdot\|_{\mathbf{Y}})$*, usaremos indistintamente la notación* $A^* : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ *o* $A^* : \mathbf{F}^* \to \mathbf{E}^*$*.*

Por ejemplo, si $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ *y* $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ *son espacios de Hilbert, entonces asumiremos que*

$$A : \mathbf{E} \to \mathbf{F} \qquad y \quad A^* : \mathbf{F} \to \mathbf{E}.$$

Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}}) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ y $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}}) = (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_q)$ con $p, q \in (1, +\infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $A \in \mathscr{L}C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ está dada por

$$A(x) = Mx, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde M es una matriz de $m \times n$, entonces $A^*(y) = M^\top y$ para todo $y \in \mathbb{R}^m$, pues

$$\langle y, A(x) \rangle_{(\mathbb{R}^m)^*, \mathbb{R}^m} = y^\top M x = (M^\top y)^\top x = \langle M^\top y, x \rangle_{(\mathbb{R}^n)^*, \mathbb{R}^n}, \forall x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m.$$

5.1 Propiedades básicas

Proposición 5.1.1 Para cada $A \in \mathscr{L}C(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, tenemos que $A^* \in \mathscr{L}C(\mathbf{F}^*, \mathbf{E}^*)$, con $\|A^*\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{F}^*, \mathbf{E}^*)} \leq \|A\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E}, \mathbf{F})}$.

Demostración. Recordemos que $A^*(\ell) = \ell \circ A$ para todo $\ell \in \mathbf{F}^*$.

- Es directo por construcción que $A^* : \mathbf{F}^* \to \mathbf{E}^*$ está bien definido como función.
- Por composición de funciones lineales continuas tenemos que $A^*(\ell) \in \mathbf{E}^*$ para todo $\ell \in \mathbf{F}^*$.
- A^* es lineal: dados $\ell_1, \ell_2 \in \mathbf{F}^*$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$A^*(\ell_1 + \lambda \ell_2) = (\ell_1 + \lambda \ell_2) \circ A = \ell_1 \circ A + \lambda \ell_2 \circ A = A^*(\ell_1) + \lambda A^*(\ell_2).$$

- A^* es acotado: dado que $\langle A^*(\ell), x \rangle_{\mathbf{E}^*, \mathbf{E}} = A^*(\ell)(x) = \ell \circ A(x) = \langle \ell, A(x) \rangle_{\mathbf{F}^*, \mathbf{F}}$ tenemos

$$|\langle A^*(\ell), x \rangle_{\mathbf{E}^*, \mathbf{E}}| = |\langle \ell, A(x) \rangle_{\mathbf{F}^*, \mathbf{F}}| \leq \|\ell\|_{\mathbf{F}^*} \|A(x)\|_{\mathbf{F}} \leq \|\ell\|_{\mathbf{F}^*} \|A\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E}, \mathbf{F})} \|x\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Luego, sigue que

$$\|A^*(\ell)\|_{\mathbf{E}^*} = \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}} \leq 1} |\langle A^*(\ell), x \rangle_{\mathbf{E}^*, \mathbf{E}}| \leq \|A\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E}, \mathbf{F})} \|\ell\|_{\mathbf{F}^*}.$$

Por lo tanto

$$\|A^*\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{F}^*, \mathbf{E}^*)} = \sup_{\|\ell\|_{\mathbf{F}^*} \leq 1} \|A^*(\ell)\|_{\mathbf{E}^*} \leq \|A\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E}, \mathbf{F})}.$$

□

■ **Ejemplo 5.1.2** Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}}) = (\ell^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\ell^p})$, con $p \in [1, +\infty)$.

Consideremos el operador **shift a la izquierda** $S_l : \ell^p(\mathbb{R}) \to \ell^p(\mathbb{R})$ dado por

$$S_l(x) = (x_1, x_2, x_3, \dots), \qquad \forall\, x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{R}).$$

Vimos que S_l es lineal y acotado (continuo), pues $\|S_l(x)\|_{\ell^p} \leq \|x\|_{\ell^p}$ para todo $x \in \ell^p(\mathbb{R})$.

Por otro lado, sabemos que $\mathbf{E}^* \cong (\ell^q(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\ell^q})$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y el producto de dualidad se representa via

$$\langle y, x\rangle_{\ell^q,\ell^p} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x_k, \qquad \forall x \in \ell^p(\mathbb{R}),\ y \in \ell^q(\mathbb{R}).$$

Sigue que

$$\langle y, S_l(x)\rangle_{\ell^q,\ell^p} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x_{k+1} = 0 \cdot x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} y_{k-1} x_k = \langle S_r(y), x\rangle_{\ell^q,\ell^p}, \qquad \forall\, x \in \ell^p(\mathbb{R}),\ y \in \ell^q(\mathbb{R}).$$

Luego, $S_l^* = S_r$, donde $S_r : \ell^q(\mathbb{R}) \to \ell^q(\mathbb{R})$ denota al operador **shift a la derecha** dado por

$$S_r(y) = (0, y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, \dots), \qquad \forall\, y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^q(\mathbb{R}).$$

Además, dado que $\|S_l(x)\|_{\ell^p} \leq \|x\|_{\ell^p}$ tenemos que $\|S_l\|_{\mathscr{L}C(\ell^p,\ell^p)} \leq 1$.

Por otro lado, $\|S_r\|_{\mathscr{L}C(\ell^q,\ell^q)} = 1$ pues $\|S_r(y)\|_{\ell^q} = \|y\|_{\ell^q}$ para todo $y \in \ell^q(\mathbb{R})$.

Luego tenemos que $\|S_r\|_{\mathscr{L}C(\ell^q,\ell^q)} = \|S_l\|_{\mathscr{L}C(\ell^p,\ell^p)}$ pues

$$1 = \|S_r\|_{\mathscr{L}C(\ell^q,\ell^q)} = \|S_l^*\|_{\mathscr{L}C(\ell^q,\ell^q)} \leq \|S_l\|_{\mathscr{L}C(\ell^p,\ell^p)} \leq 1.$$

■

Proposición 5.1.3 Para cada $A \in \mathscr{L}C(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, se tiene que $\|A^*\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{F}^*,\mathbf{E}^*)} = \|A\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})}$.

Demostración. Recordemos que, gracias al Teorema de Hahn-Banach Analítico (Corolario 2.3.3), tenemos que:

$$\forall y \in \mathbf{F} \setminus \{0\},\ \exists \ell_y \in \mathbf{F}^* \text{ tal que } \|\ell_y\|_{\mathbf{F}^*} = 1 \text{ y } \ell_y(y) = \|y\|_{\mathbf{F}}.$$

Tomemos $x \in \mathbf{E}$ con $\|x\|_{\mathbf{E}} \leq 1$, y evaluemos la afirmación precedente en $y = A(x)$.

Luego tenemos que

$$\|A(x)\|_{\mathbf{F}} = \ell_{A(x)}(A(x)) = \langle \ell_{A(x)}, A(x)\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} = \langle A^*(\ell_{A(x)}), x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}.$$

Esto implica que

$$\|A(x)\|_{\mathbf{F}} \leq \|A^*(\ell_{A(x)})\|_{\mathbf{E}^*} \|x\|_{\mathbf{E}} \leq \|A^*(\ell_{A(x)})\|_{\mathbf{E}^*} \leq \|A^*\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{F}^*,\mathbf{E}^*)} \|\ell_{A(x)}\|_{\mathbf{F}^*} = \|A^*\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{F}^*,\mathbf{E}^*)}.$$

De esto concluimos que

$$\|A\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})} = \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}} \leq 1} \|A(x)\|_{\mathbf{F}} \leq \|A^*\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{F}^*,\mathbf{E}^*)}.$$

Como ya sabíamos de la Proposición 5.1.1 que $\|A^*\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{F}^*,\mathbf{E}^*)} \leq \|A\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})}$, concluimos el resultado. □

Ahora veremos cómo se relacionan el núcleo y la imagen de un operadores lineal continuo y con el de su operador adjunto asociado.

Proposición 5.1.4 Para cada $A \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$ tenemos que $\ker(A^*) = \operatorname{im}(A)^\perp$ y $\ker(A) = \operatorname{im}(A^*)^\perp$

Demostración.

- $\ker(A^*) = \operatorname{im}(A)^\perp$: Notemos que $\ell \in \ker(A^*)$, es decir, $A^*(\ell) = 0$ si y sólo si

$$\langle \ell, A(x)\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} = \ell \circ A(x) = A^* \circ \ell(x) = 0, \qquad \forall\, x \in \mathbf{E}.$$

  Sin embargo, esto último es equivalente a que $\ell \in (\operatorname{im}(A))^\perp$, con lo cual obtenemos $\ker(A^*) = \operatorname{im}(A)^\perp$.
- $\ker(A) = \operatorname{im}(A^*)^\perp$: Dado $x \in \mathbf{E}$ tenemos que $x \in \ker(A)$ si y sólo si

$$A(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|A(x)\|_{\mathbf{F}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \max_{\|\ell\|_{\mathbf{F}^*}\leq 1} |\langle \ell, A(x)\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}| = 0.$$

  La última equivalencia es gracias al al Teorema de Hahn-Banach Analítico (Corolario 2.3.4). Por otro lado, usando la definición del operador adjunto tenemos que $x \in \ker(A)$ si y sólo si

$$\max_{\|\ell\|_{\mathbf{F}^*}\leq 1} |\langle A^*(\ell), x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| = \max_{\|\ell\|_{\mathbf{F}^*}\leq 1} |\langle \ell, A(x)\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}| = 0$$

  De esto concluimos que $x \in \ker(A)$ si y sólo si $\langle A^*(\ell), x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 0$ para todo $\ell \in \mathbf{F}^*$. Pero esto último corresponde a la condición $x \in (\operatorname{im}(A^*))^\perp$

□

5.2 Inyectividad y sobreyectividad

Notemos que la proposición 5.1.4 nos entrega la siguiente condición:

$$\ker(A^*) = \operatorname{im}(A)^\perp, \quad \text{y} \quad \ker(A) = \operatorname{im}(A^*)^\perp, \qquad \forall A \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F}).$$

Luego:

- Si A es sobreyectivo, entonces A^* es inyectivo pues

$$\ker(A^*) = \mathbf{F}^\perp = \{\ell \in \mathbf{F}^* \mid \langle \ell, y\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} = 0,\ \forall y \in \mathbf{F}\} = \{0\}.$$

- Si A^* es sobreyectivo, entonces A es inyectivo pues

$$\ker(A) = (\mathbf{E}^*)^\perp = \{x \in \mathbf{E} \mid \langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 0,\ \forall \ell \in \mathbf{E}^*\} = \{0\}.$$

  La última igualdad es gracias al Teorema de Hahn-Banach Analítico (Corolario 2.3.3):

$$\forall x \in \mathbf{E}\setminus\{0\},\ \exists \ell \in \mathbf{E}^* \text{ tal que } \|\ell\|_{\mathbf{E}^*} = 1 \text{ y } \ell_x(x) = \|x\|_{\mathbf{E}} > 0.$$

Por otro lado,

- Si A^* es inyectivo, entonces A no es necesariamente sobreyectivo, pero $\overline{\operatorname{im}(A)} = \mathbf{F}$ pues gracias a la Proposición 3.2.4 tenemos

$$\mathbf{F} = \{0\}^\perp = \ker(A^*)^\perp = (\operatorname{im}(A)^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{im}(A)}.$$

- Si A es inyectivo, entonces sólo tenemos $\overline{\operatorname{im}(A^*)} \subseteq \mathbf{E}^*$ y la inclusión podría ser estricta.

Proposición 5.2.1 Supongamos que $A \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$. Luego A^* es inyectivo si y sólo si $\mathrm{im}(A)$ es denso en $\mathbf{F}$.

Demostración. Por Proposición 5.1.4 sabemos que $\ker(A^*) = (\mathrm{im}(A))^{\perp}$. Luego, en vista de la Proposición 3.2.4 tenemos

$$\ker(A^*)^{\perp} = (\mathrm{im}(A)^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathrm{im}(A)}.$$

($\Longrightarrow$) Si A^* es inyectivo, entonces $\ker(A^*) = \{0\}$, luego $\ker(A^*)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = \mathbf{F}$, y por lo tanto $\overline{\mathrm{im}(A)} = \mathbf{F}$.

($\Longleftarrow$) Recordemos que si $N \subseteq \mathbf{F}^*$ es un s.e.v., entonces $\overline{N} \subseteq (N^{\perp})^{\perp}$. Luego, si $\overline{\mathrm{im}(A)} = \mathbf{F}$, gracias a la Proposición 5.1.4 tenemos

$$\ker(A^*) = \overline{\ker(A^*)} \subseteq \left(\ker(A^*)^{\perp}\right)^{\perp} = \left(\left(\mathrm{im}(A)^{\perp}\right)^{\perp}\right)^{\perp} = \left(\overline{\mathrm{im}(A)}\right)^{\perp} = \mathbf{F}^{\perp} = \{0\}.$$

A partir de esto concluimos que $\ker(A^*) = \{0\}$ y por ende A^* es inyectivo.

□

Teorema 5.2.2 Supongamos que $A \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$ con $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ espacios de Banach. Luego:

- A es sobreyectivo si y sólo si existe $c > 0$ tal que $\|\ell\|_{\mathbf{F}^*} \leq c\|A^*(\ell)\|_{\mathbf{E}^*}$ para todo $\ell \in \mathbf{F}^*$.
- A^* es sobreyectivo si y sólo si existe $c > 0$ tal que $\|x\|_{\mathbf{E}} \leq c\|A(x)\|_{\mathbf{F}}$, para todo $x \in \mathbf{E}$.

Demostración. Veremos sólo el primer caso (A es sobreyectivo), la demostración para el segundo es similar y la dejamos como ejercicio (ver Problem 5 - Certamen 1 - 2021).

($\Longrightarrow$) Por el Teorema de la Aplicación Abierta, existe $r > 0$ tal que

$$\mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0,r) \subseteq A(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1)) \subseteq A\left(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1)}\right).$$

Por otro lado, dado $\ell \in \mathbf{F}^*$ tenemos

$$\|A^*(\ell)\|_{\mathbf{E}^*} = \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}}\leq 1} |\langle A^*(\ell), x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| = \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}}\leq 1} |\langle \ell, A(x)\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}| = \sup_{y\in A\left(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1)}\right)} |\langle \ell, y\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}|.$$

Juntando estas dos informaciones obtenemos,

$$\sup_{y\in A\left(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1)}\right)} |\langle \ell, y\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}| \geq \sup_{y\in\mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0,r)} |\langle \ell, y\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}| = \sup_{y\in\mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0,1)} |\langle \ell, ry\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}| = r \sup_{\|y\|_{\mathbf{F}}\leq 1} |\langle \ell, y\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}| = r\|\ell\|_{\mathbf{F}^*}.$$

Tomando $c = \frac{1}{r}$ se obtiene la conclusión.

($\Longleftarrow$) Supondremos ahora que existe $c > 0$ tal que para todo $\ell \in \mathbf{F}^*$,

$$\|\ell\|_{\mathbf{F}^*} \leq c\|A^*(\ell)\|_{\mathbf{E}^*}.$$

Para concluir basta ver, si definimos $\delta = \frac{1}{c}$, entonces

$$\mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0,\delta) \subseteq \overline{A(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))}$$

En efecto, si lo anterior fuese cierto, entonces replicando argumentos usados para demostrar el Teorema de la Aplicación abierta podremos demostrar que

$$\mathbb{B}_{\mathbf{F}}\left(0, \frac{\delta}{2}\right) \subseteq A(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1)),$$

y que por lo tanto A es una aplicación abierta, y en consecuencia A debe ser sobreyectiva.

Tomemos $y_0 \notin \overline{A(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))}$, probaremos que $y_0 \notin \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0,\delta)$.

Notemos que el conjunto $\overline{A(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))}$ es cerrado, convexo y no vacío. Luego, por el Teorema de Hahn-Banach Geométrico (segunda versión), existe $\ell \in \mathbf{F}^* \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sup_{y \in \overline{A(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))}} \langle \ell, y \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} < \alpha < \langle \ell, y_0 \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}.$$

Dado que $y = 0 \in \overline{A(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))}$, tenemos que $\alpha > 0$ y entonces $\langle \ell, y_0 \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} > 0$.

Luego reescalando (dividiendo por α las desigualdades y redefiniendo ℓ), podemos asumir que $\alpha = 1$. En particular tenemos

$$\langle \ell, y \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} \leq 1 < \langle \ell, y_0 \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}, \qquad \forall\, y \in A(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1)).$$

Dado que $A(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1))$ es simétrico, tenemos que

$$|\langle \ell, y \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}| \leq 1 < \langle \ell, y_0 \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}, \qquad \forall\, y \in A(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1)).$$

Sigue que

$$|\langle \ell, A(x) \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}| \leq 1 < \langle \ell, y_0 \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1),$$

y como $\langle \ell, A(x) \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} = \langle A^*(\ell), x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}$ para todo $x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1)$, vemos que

$$|\langle A^*(\ell), x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| \leq 1 < \langle \ell, y_0 \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1).$$

Por continuidad, la desigualdad anterior es válida también para todo $x \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1)}$, y por lo tanto

$$\|A^*(\ell)\|_{\mathbf{E}^*} = \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}} \leq 1} |\langle A^*(\ell), x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| \leq 1 < \langle \ell, y_0 \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} \leq \|\ell\|_{\mathbf{F}^*} \|y_0\|_{\mathbf{F}}.$$

Por hipótesis, tenemos que $\delta \|\ell\|_{\mathbf{F}^*} \leq \|A^*(\ell)\|_{\mathbf{E}^*}$, pues $\delta = \frac{1}{c}$.

Esto implica que $\|y_0\|_{\mathbf{F}} \geq \delta$, es decir, $y_0 \notin \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0,\delta)$.

$\square$

6. Teorema de Stone-Weierstrass

A lo largo de esta sección $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ será un subconjunto compacto y no vacío. Denotaremos por $\mathscr{C}(\mathbf{X})$ al espacio vectorial de funciones continuas $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$. En este espacio consideraremos la norma

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in \mathbf{X}} |f(x)|, \qquad \forall f \in \mathscr{C}(\mathbf{X}).$$

Notación 6.1. *Denotaremos por $\mathbb{R}[x]$ la colección de todos los polinomios a coeficientes reales:*

$$p \in \mathbb{R}[x] \quad \Longleftrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{N},\ a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R} \text{ tales que } p(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Similarmente, denotaremos por $\mathbb{R}[x_1 \ldots, x_n]$ la colección de todos los polinomios de n variables a coeficientes reales:

$$p \in \mathbb{R}[x_1 \ldots, x_n] \quad \Longleftrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{N} \text{ tal que } p(x) = \sum_{\|\kappa\|=0}^{m} a_\kappa x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

donde $\kappa \in \mathbb{N}^n$ está dado por $\kappa = (k_1, \ldots, k_n)$, $\|\kappa\| = k_1 + \ldots + k_n$ y $a_\kappa \in \mathbb{R}$ para todo $\|\kappa\| \leq m$.

En esta sección mostraremos algunos resultados de aproximación de funciones continuas. En particular, presentaremos y demostraremos el Teorema de Stone-Weierstrass, el cual nos permitirá responder la siguiente pregunta:

Dada una función continua $f \in \mathscr{C}(\mathbf{X})$ y $\varepsilon > 0$ ¿Existe $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon$?

6.0.1 Un caso particular

Proposición 6.0.1 Existe una sucesión de polinomios $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}[x]$ que converge uniformemente en $[-1,1]$ a la función valor absoluto $x \mapsto |x|$.

Demostración. Sea $p_0 \in \mathbb{R}[x]$ el polinomio constante igual a cero: $p_0(x) = 0$ para todo $x \in [-1,1]$.

Definamos inductivamente la sucesión $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}([-1,1])$ via la recurrencia:

$$p_{k+1}(x) = p_k(x) + \frac{1}{2}\left(|x| + p_k(x)\right)\left(|x| - p_k(x)\right), \qquad \forall x \in [-1,1],\ k \in \mathbb{N}.$$

No es difícil ver por inducción que efectivamente las funciones $x \mapsto p_k(x)$ son continua en $[-1,1]$.

Notemos que si para cada $x \in [-1,1]$ fijo, la sucesión $\{p_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ converge a $f_x \in \mathbb{R}$, entonces

$$f_x = f_x + \frac{1}{2}\left(|x| + f_x\right)\left(|x| - f_x\right).$$

En particular, tendremos que $f_x^2 = x^2$.

Por otra parte, si $\{p_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ fuese una sucesión creciente para cada $x \in [-1,1]$ fijo, entonces podríamos concluir que $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en $[-1,1]$ a la función valor absoluto $x \mapsto |x|$; esto último es gracias al Teorema de Dini.

Notemos que

$$p_{k+1}(x) = p_k(x) + \frac{1}{2}\left(|x| + p_k(x)\right)\left(|x| - p_k(x)\right) = p_k(x) + \frac{1}{2}\left(x^2 - p_k^2(x)\right), \qquad \forall x \in [-1,1],\ k \in \mathbb{N}.$$

Dado que $p_0(x) = 0$ para todo $x \in [-1,1]$, no es difícil ver que por construcción, $p_k \in \mathbb{R}[x]$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Fijemos ahora $x \in [-1,1]$. Para concluir bastará probar por inducción que

$$0 \leq p_k(x) \leq p_{k+1}(x) \leq |x|, \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{6.1}$$

pues con esto $\{p_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ será creciente y acotada superiormente, y en consecuencia convergente.

- El caso base $k = 0$ viene de notar que

$$p_0(x) = 0 \leq \frac{1}{2}x^2 = p_1(x) = \frac{1}{2}x^2 \leq x^2 \leq |x|.$$

- Si (6.1) es válida para $k \in \mathbb{N}$, en particular tendremos $0 \leq p_{k+1}(x) \leq |x| \leq 1$.
  Luego, por un lado tenemos que

$$p_{k+2}(x) - p_{k+1}(x) = \frac{1}{2}\left(|x| + p_{k+1}(x)\right)\left(|x| - p_{k+1}(x)\right) \geq 0$$

  y por otro

$$p_{k+2}(x) - p_{k+1}(x) = \frac{1}{2}\left(|x| + p_{k+1}(x)\right)\left(|x| - p_{k+1}(x)\right) \leq \frac{1}{2}\left(|x| + 1\right)\left(|x| - p_{k+1}(x)\right) \leq |x| - p_{k+1}(x).$$

  Con esto hemos probado que $0 \leq p_{k+1}(x) \leq p_{k+2}(x) \leq |x|$, y por inducción concluimos. □

6.1 Aproximación de funciones continuas

Ahora veremos algunos resultados intermediarios de aproximación de funciones continuas.

Proposición 6.1.1 Supongamos que $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto y no vacío, y que $H \subseteq \mathscr{C}(\mathbf{X})$ es un conjunto que satisface:

1. Para todo $h_1, h_2 \in H$, tenemos que $\max\{h_1, h_2\}, \min\{h_1, h_2\} \in H$.
2. Dados $x, y \in \mathbf{X}$ distintos y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ existe $h \in H$ tal que $h(x) = \lambda_1$ y $h(y) = \lambda_2$.

Entonces H es denso en $(\mathscr{C}(\mathbf{X}), \|\cdot\|_\infty)$, es decir,

$$\forall f \in \mathscr{C}(\mathbf{X}),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists h \in H \text{ tal que } \|f - h\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Demostración. Fijemos $f \in \mathscr{C}(\mathbf{X})$ y $\varepsilon > 0$. Probemos primero que para todo $x \in \mathbf{X}$, existe $h_x \in H$ tal que

$$h_x(x) = f(x) \quad \text{y} \quad h_x(y) + \varepsilon > f(y), \quad \forall y \in \mathbf{X}.$$

Dado $x \in \mathbf{X}$, por la condición (2), para todo $y \in \mathbf{X} \setminus \{x\}$, existe $h^y \in H$ tal que $h^y(x) = f(x)$ y $h^y(y) = f(y)$. Para cada $y \in \mathbf{X} \setminus \{x\}$, definamos

$$O_y := \{z \in \mathbf{X} \mid h^y(z) + \varepsilon > f(z)\}$$

Notemos que cada O_y es un conjunto relativamente abierto en $\mathbf{X}$ y que

$$\mathbf{X} \subseteq \bigcup_{y \in \mathbf{X} \setminus \{x\}} O_y,$$

pues $x, y \in O_y$. Luego, dado que $\mathbf{X}$ es compacto, existen $y_1, \ldots, y_m \in \mathbf{X} \setminus \{x\}$ tales que

$$\mathbf{X} \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} O_{y_k}.$$

Definamos ahora $h_x := \max\{h^{y_1}, \ldots, h^{y_m}\}$. Usando inductivamente la condición (1), vemos que $h_x \in H$. Además, por un lado tenemos

$$h_x(x) = \max\{h^{y_1}(x), \ldots, h^{y_m}(x)\} = \max\{f(x), \ldots, f(x)\} = f(x).$$

Por otro lado, dado $y \in \mathbf{X}$, tenemos que $y \in O_{y_k}$ para algún $k \in \{1, \ldots, m\}$ y por lo tanto

$$h_x(y) = \max\{h^{y_1}(y), \ldots, h^{y_m}(y)\} \geq h^{y_k}(y) > f(y) - \varepsilon.$$

Ahora vamos a construir la función $h \in H$ que satisface

$$h(y) - \varepsilon < f(y) < h(y) + \varepsilon, \quad \forall y \in \mathbf{X}.$$

Para cada $x \in \mathbf{X}$, definamos ahora

$$U_x := \{y \in \mathbf{X} \mid h_x(y) - \varepsilon < f(y)\}$$

con $h_x \in H$ tal que

$$h_x(x) = f(x) \quad \text{y} \quad f(y) < h_x(y) + \varepsilon, \quad \forall y \in \mathbf{X}.$$

Notemos que cada U_x es un conjunto relativamente abierto en $\mathbf{X}$ y que

$$\mathbf{X} \subseteq \bigcup_{x \in \mathbf{X}} U_x,$$

pues $x \in U_x$. Nuevamente, dado que $\mathbf{X}$ es compacto, existen $x_1, \dots, x_d \in \mathbf{X}$ tales que

$$\mathbf{X} \subseteq \bigcup_{j=1}^{d} U_{x_j}.$$

Definamos finalmente $h := \text{mín}\{h_{x_1}, \dots, h_{x_d}\}$. Usando inductivamente la condición (1), vemos que $h_x \in H$. Dado $y \in \mathbf{X}$, tenemos que $y \in U_{x_j}$ para algún $j \in \{1, \dots, d\}$ y por lo tanto

$$h(y) = \text{mín}\{h_{x_1}(y), \dots, h_{x_d}(y)\} \leq h_{x_j}(y) < f(y) + \varepsilon.$$

Finalmente, como

$$f(y) < h_{x_j}(y) + \varepsilon, \quad \forall j = 1, \dots, d,$$

concluimos que

$$f(y) < \text{mín}\{h_{x_1}(y), \dots, h_{x_d}(y)\} + \varepsilon = h(y) + \varepsilon.$$

□

- Consideremos el conjunto $H = \{h : \mathbf{X} \to \mathbb{R} \mid h \text{ es Lipschitz continua}\}$.
  Notemos primero que H es un s.e.v. de $\mathscr{C}(\mathbf{X})$: dados $h_1, h_2 \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x, y \in \mathbf{X}$ tenemos

  $$|(h_1 + \lambda h_2)(x) - (h_1 + \lambda h_2)(y)| \leq |h_1(x) - h_1(y)| + |\lambda||h_2(x) - h_2(y)| \leq (L_{h_1} + |\lambda| L_{h_2})\|x - y\|_{\mathbb{R}^n},$$

  Notemos también que dada $h \in H$ tenemos que $|h| \in H$ pues

  $$||h(x)| - |h(y)|| \leq |h(x) - h(y)| \leq L_h \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}, \qquad \forall x, y \in \mathbf{X}.$$

  Finalmente, dado que

  $$\text{máx}\{h_1, h_2\} = \frac{1}{2}(h_1 + h_2 + |h_1 - h_2|) \qquad \text{y} \qquad \text{mín}\{h_1, h_2\} = \frac{1}{2}(h_1 + h_2 - |h_1 - h_2|),$$

  podemos concluir que H satisface la condición (1).
- El conjunto de las funciones polinomiales restringidas a $\mathbf{X}$:

  $$H = \{h : \mathbf{X} \to \mathbb{R} \mid \exists p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \text{ tal que } h(x) = p(x), \quad \forall x \in \mathbf{X}\}$$

  no satisface la condición (1). En particular, este resultado no nos permite responder la pregunta puesta al comienzo de la sección, por lo cual debemos buscar un resultado más adecuado al caso que no interesa estudiar.

6.1.1 Conjuntos separantes de funciones continuas

Definición 6.1.1 Diremos que un s.e.v. $H \subseteq \mathscr{C}(\mathbf{X})$ es **separante** si dados $x, y \in \mathbf{X}$ distintos, existe $h \in H$ tal que $h(x) \neq h(y)$.

Ejemplos 6.1.2

- El conjunto $H = \{h : \mathbf{X} \to \mathbb{R} \mid h \text{ es Lipschitz continua}\}$ es un s.e.v. separante de $\mathscr{C}(\mathbf{X})$, pues si $x \neq y$, entonces $x_k \neq y_k$ para algún $k = 1, \dots, n$, pero $x \mapsto x_k$ es Lipschitz continua:

  $$|x_k - y_k| \leq \|x - y\|_1 \leq c\|x - y\|_{\mathbb{R}^n}, \qquad \forall x, y \in \mathbf{X}.$$

- Notemos primero que el conjunto

$$H = \{h : \mathbf{X} \to \mathbb{R} \mid \exists p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \text{ tal que } h(x) = p(x), \quad \forall x \in \mathbf{X}\}$$

es un s.e.v. de $\mathscr{C}(\mathbf{X})$ pues

$$p_1 + \lambda p_2 \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n], \qquad \forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n],\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Este s.e.v. es también separante pues la función proyección sobre las coordenas $x \mapsto x_k$ es un polinomio para todo $k = 1, \dots, n$.

■

Proposición 6.1.3 Supongamos que $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subconjunto compacto y no vacío, y que $H \subseteq \mathscr{C}(\mathbf{X})$ es un s.e.v. separante que contiene a las funciones constantes. Entonces H es denso en $(\mathscr{C}(\mathbf{X}), \|\cdot\|_\infty)$ si H satisface también:

$$\text{máx}\{h_1, h_2\},\ \text{mín}\{h_1, h_2\} \in H, \qquad \forall h_1, h_2 \in H,$$

Demostración. Usaremos la Proposición 6.1.1, para esto solo resta probar que la condición (2) de esa proposición se verifica:

Dados $x, y \in \mathbf{X}$ distintos y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ existe $h \in H$ tal que $h(x) = \lambda_1$ y $h(y) = \lambda_2$.

Fijemos $x, y \in \mathbf{X}$ distintos. Dado que H es separante, existe $\tilde{h} \in H$ tal que $\tilde{h}(x) \neq \tilde{h}(y)$.

Definamos la función $h : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \alpha\tilde{h}(x) + \beta$ para todo $x \in \mathbf{X}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ por fijar. Dado que H es un s.e.v. y contiene a las funciones constantes, tenemos que $h \in H$.

Por otro lado, dados $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, el sistema lineal de 2×2:

$$\begin{aligned} \alpha\tilde{h}(x) + \beta &= \lambda_1 \\ \alpha\tilde{h}(y) + \beta &= \lambda_2 \end{aligned}$$

tiene una única solución (el determinante de la matriz representante es $\tilde{h}(x) - \tilde{h}(y) \neq 0$).

Tomando $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ solución del sistema lineal, vemos que la condición (2) de la Proposición 6.1.1 se verifica. □

Tomando en consideración las observaciones que hemos hecho hasta este punto, la siguiente es una consecuencia directa de la Proposición 6.1.3.

Corolario 6.1.4 Supongamos que $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subconjunto compacto y no vacío. Para toda $f \in \mathscr{C}(\mathbf{X})$ existe una sucesión de funciones Lipschitz continuas que converge uniformemente a f en $\mathbf{X}$.

6.2 Teorema de Stone-Weierstrass

Definición 6.2.1 Diremos que un s.e.v. $H \subseteq \mathscr{C}(\mathbf{X})$ es una **subálgebra** de $\mathscr{C}(\mathbf{X})$ si $h_1 \cdot h_2 \in H$ para todo $h_1, h_2 \in H$.

- Si $H \subseteq \mathscr{C}(\mathbf{X})$ es una subálgebra, entonces para todo $h \in H$ tenemos que $h^j \in H$. En particular, para cualquier polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$ tenemos que $p \circ h \in H$ pues

$$p \circ h = \sum_{j=0}^{m} a_j h^j$$

- Notemos que
$$h_1 \cdot h_2 = \frac{1}{2}\left((h_1+h_2)^2 - h_1^2 - h_2^2\right)$$
Luego, un s.e.v. $H \subseteq \mathscr{C}(\mathbf{X})$ es una subálgebra si y sólo si $h^2 \in H$ para todo $h \in H$.

Ejemplo 6.2.1 El conjunto $H = \{h : \mathbf{X} \to \mathbb{R} \mid \exists p \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n] \text{ tal que } h(x) = p(x), \quad \forall x \in \mathbf{X}\}$ es una subálgebra de $\mathscr{C}(\mathbf{X})$ ya que si $p \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ entonces $p^2 \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$.

Dado que $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ es una subálgebra separante de $\mathscr{C}(\mathbf{X})$ que contiene a las funciones constantes, el Teorema de Stone-Weierstrass que presentaremos a continuación nos permitirá afirmar que dada $f \in \mathscr{C}(\mathbf{X})$ y $\varepsilon > 0$, siempre existe $p \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ tal que $\|f-p\|_\infty \le \varepsilon$.

Teorema 6.2.2 — Stone-Weierstrass. Supongamos que $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subconjunto compacto y no vacío. Si H es una subálgebra separante de $\mathscr{C}(\mathbf{X})$ que contiene a las funciones constantes, entonces H es denso en $(\mathscr{C}(\mathbf{X}), \|\cdot\|_\infty)$.

Demostración. Tenemos que probar que $\overline{H} = \mathscr{C}(\mathbf{X})$. Primero notemos que $\overline{H}$ también es:

- un s.e.v. de $\mathscr{C}(\mathbf{X})$, pues dados $h, g \in \overline{H}$, existen sucesiones $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{g_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq H$ tales que $h_k \to h$ y $g_k \to g$, luego $h + \lambda g \in \overline{H}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ pues $h_k + \lambda g_k \to h + \lambda g$ y $h_k + \lambda g_k \in H$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
- una subálgebra de $\mathscr{C}(\mathbf{X})$, pues dado $h \in \overline{H}$, existe una sucesión $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq H$ tal que $h_k \to h$, luego $h^2 \in \overline{H}$ pues $h_k^2 \to h^2$ y $h_k^2 \in H$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
- separante y contiene a las funciones constantes, pues $H \subseteq \overline{H}$

Luego, para concluir usaremos la Proposición 6.1.3. Para esto es suficiente probar que si $h \in \overline{H}$, entonces también $|h| \in \overline{H}$[1] pues ya vimos que
$$\max\{h_1,h_2\} = \frac{1}{2}(h_1+h_2+|h_1-h_2|) \qquad \text{y} \qquad \min\{h_1,h_2\} = \frac{1}{2}(h_1+h_2-|h_1-h_2|).$$

Gracias a la Proposición 6.0.1, sabemos que existe una sucesión de polinomios $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}[x]$ cuya restricción al intervalo $[-1,1]$ converge uniformemente a la función $t \mapsto |t|$:
$$\sup_{t\in[-1,1]} ||t| - p_k(t)| \to 0$$

Sea $h \in \overline{H} \setminus \{0\}$; si $h(x) = 0$, entonces también $|h(x)| = 0$ y la conclusión sería directa.

Definamos la función $g = \dfrac{1}{\|h\|_\infty} h$. Luego, siendo $\overline{H}$ un s.e.v. tenemos que $g \in \overline{H}$.

Dado que $\overline{H}$ es una subálgebra de $\mathscr{C}(\mathbf{X})$, tenemos que
$$p_k \circ g = \sum_{j=0}^{m_k} a_j^k g^j \in \overline{H}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

[1]Dado $h \in \overline{H}$, existe una sucesión $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq H$ tal que $h_k \to h$, y en particular $|h_k| \to |h|$. A partir de esto no podemos concluir que $|h| \in \overline{H}$, pues para esto necesitaríamos que $|h_k| \in H$, lo que es falso para los polinomios por ejemplo.

Por otro lado $|g(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbf{X}$. Luego sigue que

$$\frac{1}{\|h\|_\infty}\||h| - \|h\|_\infty p_k \circ g\|_\infty = \||g| - p_k \circ g\|_\infty = \sup_{x \in \mathbf{X}} ||g(x)| - p_k(g(x))| \leq \sup_{t \in [-1,1]} ||t| - p_k(t)| \to 0$$

Definiendo $g_k = \|h\|_\infty p_k \circ g$, tenemos que $g_k \in \overline{H}$ pues $\overline{H}$ un s.e.v. y $g_k \to |h|$ uniformemente en $\mathbf{X}$.

Finalmente, dado que $\overline{H}$ es cerrado, concluimos que $|h| \in \overline{H}$. $\square$

A partir de este teorema es fácil ver que $(\mathscr{C}(\mathbf{X}), \|\cdot\|_\infty)$ es un e.v.n. separable.

Proposición 6.2.3 Si $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subconjunto compacto, entonces $(\mathscr{C}(\mathbf{X}), \|\cdot\|_\infty)$ es un e.v.n. separable.

Demostración. Dada $f \in \mathscr{C}(\mathbf{X})$ y $\varepsilon > 0$, por el Teorema de Stone-Weierstrass, existe $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $\|f - p\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Dado que $\mathbf{X}$ es compacto, existe $q \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $\|p - q\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Siendo $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ un conjunto numerable, concluimos lo buscado. $\square$

7. Teorema de Lax-Milgram

El resultado principal de este capítulo está relacionado con las propiedades de dualidad en los espacios de Hilbert y tiene interesantes aplicaciones, en particular en resultados de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales.

Comenzaremos recordando algunas propiedades importantes que poseen tales espacios.

7.1 Dualidad en espacios de Hilbert

Teorema 7.1.1 — Representación de Riesz. Supongamos que $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ es un espacio de Hilbert. Entonces, para cada $\varphi \in H^* = \mathscr{L}C(H, \mathbb{R})$ existe un único $y_\varphi \in H$ tal que

$$\langle \varphi, x \rangle_{H^*,H} = \langle x, y_\varphi \rangle_H, \qquad \forall\, x \in H. \tag{7.1}$$

Demostración. La idea de la demostración puede ser comprendida de esta manera: Dado el funcional $\varphi \in H^*$, $\varphi \neq 0$, consideramos el conjunto $M := ker(\varphi)$, que contiene a todos los puntos donde φ se anula. Entonces y_φ deberá ser, a priori, un vector ortogonal a M. La clave es que tal vector puede encontrarse por medio de P_M, la proyección ortogonal en M. En efecto, M es un subespacio cerrado, no vacío y propio de H. Tomemos $g_0 \notin M$, y definimos

$$g := \frac{g_0 - P_M g_0}{\|g_0 - P_M g_0\|}.$$

Entonces se verifica directamente que $\|g\| = 1$ y $\langle g, v \rangle = 0$ para toda $v \in M$. Probaremos que φ está representada por $y := \varphi(g)g$:

Si $u \in H$, tomamos

$$v := u - \frac{\varphi(u)}{\varphi(g)} g.$$

Entonces $\varphi(v) = \varphi(u) - \frac{\varphi(u)}{\varphi(g)}\varphi(g) = 0$ y por tanto $v \in M$. Se sigue que

$$0 = \langle g, v \rangle = \langle g, u \rangle - \frac{\varphi(u)}{\varphi(g)} \langle g, g \rangle = \langle g, u \rangle - \frac{\varphi(u)}{\varphi(g)},$$

y entonces $\varphi(u) = \varphi(g)\langle g, u \rangle = \langle y, u \rangle$ para todo $u \in H$, con lo que concluye la demostración. $\square$

De la relación (7.1) se deduce, en particular, que

$$\|y_\varphi\|_H = \|\varphi\|_{H^*} \tag{7.2}$$

(ver comentarios después del Teorema A.5.6). La identidad (7.2) significa que el mapeo

$$\varphi \in H^* \longmapsto y_\varphi \in H$$

es un isomorfismo que además es una isometría. En particular, podemos definir, en H^*, el producto interno dado por

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{H^*, H^*} = \langle y_\varphi, y_\psi \rangle_H,$$

el cual genera su norma. En resumen, los espacios H y H^* *se identifican* entre sí: todo espacio de Hilbert es isométricamente isomorfo a su dual. Es decir, cada elemento de H^* es *representado* por algún elemento de H.

7.2 Operadores adjuntos en espacios de Hilbert

Si H es un espacio de Hilbert H y $A \in \mathscr{L}C(H)$, de la definición de operadores adjuntos se tiene que $A^* \in \mathscr{L}C(H^*)$, espacio que por la identificación dada por el Teorema A.5.6, se identifica a su vez con $\mathscr{L}C(H)$. Es decir, tenemos que $A^* \in \mathscr{L}C(H)$, y que este operador está caracterizado por la relación

$$\langle Ax, y \rangle_H = \langle x, A^* y \rangle_H$$

para todo $x, y \in H$.

Por lo tanto, en el contexto de espacios de Hilbert, la Proposición 5.2.2 se convierte en el siguiente resultado.

Proposición 7.2.1 Si H es un espacio de Hilbert, El operador $A \in \mathscr{L}C(H)$ es sobreyectivo si y solo si A^* es acotado por abajo, es decir: existe $\delta > 0$ tal que

$$\|A^* u\|_H \geq \delta \|u\|_H$$

para todo $u \in H$.

7.3 Teorema de Lax-Milgram

El principal resultado de esta parte del texto es una generalización del Teorema de Representación de Riesz. Concierne a las formas bilineales, funciones definidas en $H \times H$ con valores escalares que son lineales en cada entrada (el producto interno en un espacio de Hilbert es una forma bilineal, por lo que éstas son una generalización de aquellos).

Definición 7.3.1 Sea $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal. Decimos que a es:

1. Bicontinua, si existe $C > 0$ tal que
$$|a(x,y)| \leq C\|x\|_H \|y\|_H$$
para todo $x, y \in H$.
2. Coerciva, si existe $\delta > 0$ tal que
$$|a(x,x)| \geq \delta \|x\|_H^2$$
para todo $x \in H$.
3. Simétrica, si
$$a(x,y) = a(y,x)$$
para todo $x, y \in H$.

Teorema 7.3.1 — Teorema de Lax-Milgram. Sea H un espacio de Hilbert, y sea a una forma bilineal en H que es bicontinua y coerciva. Entonces, para cada $\varphi \in H^*$ existe un único $u \in H$ tal que

$$a(u,v) = \varphi(v) \quad \text{para todo } v \in H. \tag{7.3}$$

Si además a es simétrica, entonces $u \in H$ está caracterizado por la relación

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v) \right\}. \tag{7.4}$$

Demostración. Por el Teorema de Representación de Riesz, existe un único $f \in H$ tal que

$$\varphi(v) = \langle v, f \rangle_H \quad \text{para todo } v \in H. \tag{7.5}$$

Por otra parte, dado $u \in H$, definamos $\varphi_u : H \longrightarrow H$ por $\varphi_u(v) = a(u,v)$. Dado que a es bilineal y bicontinua, se tiene $\varphi_u \in H^*$. De nuevo por el teorema de Riesz, existe un único representante de φ_u, al que denotaremos por $Au \in H$. Es decir, para todo $u, v \in H$ se tiene que

$$a(u,v) = \langle Au, v \rangle_H. \tag{7.6}$$

Por la bilinealidad de a, es directo que A es un operador lineal, y por la bicontinuidad se tiene, para $v = Au$, que
$$\|Au\|^2 = (Au, Au)_H = a(u, Au) \leq C\|u\| \|Au\|$$
para todo $u \in H$, y por tanto A es acotado, con $\|A\| \leq C$.

Ahora, por (7.5) y (7.6), tenemos que $u \in H$ cumple (7.3) sí y sólo sí satisface

$$Au = f. \tag{7.7}$$

Veamos que, en efecto, (7.7) tiene una única solución $u \in H$.

Por la coercividad de a, se tiene, para para $v = u$, que

$$\delta \|u\|_H^2 \leq a(u,u) = \langle Au, u \rangle_H \leq \|Au\|_H \|u\|_H$$

y por tanto $\|Au\|_H \geq \delta \|u\|_H$ para todo $u \in H$. En particular A es inyectivo y la unicidad de la ecuación (7.7) está garantizada.

Por otra parte, podemos deducir la propiedad análoga para el operador adjunto. En efecto, si $u = v$ tenemos que

$$\delta\|u\|^2 \leq a(u,u) = (Au,u)_H = (u,A^*u)_H \leq \|A^*u\|_H\|u\|_H$$

y por tanto $\|A^*v\| \geq \delta\|v\|$ para todo $v \in H$. Por la Proposición (7.2.1), obtenemos que A es sobreyectivo.

Por lo tanto existe un único $u \in H$ que satisface (7.7).

Por último, si a es simétrica entonces a define un producto interior y por lo tanto $\|v\|_a := \sqrt{(v,v)}$ define una norma. Entonces $u \in H$ está caracterizado como el minimizador de $\{\|u-v\|_a \ : v \in H\}$. Lo cual, teniendo en cuenta la expresión

$$\|u-v\|_a^2 = a(u-v,u-v) = a(u,u) + a(v,v) - 2a(u,v) = a(u,u) + a(v,v) - 2\varphi(v),$$

equivale a minimizar

$$\frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v), \quad v \in H,$$

lo que concluye la demostración. □

En el teorema anterior se tiene, en particular, que

$$\|u\|_H \leq \delta^{-1}\|\varphi\|_{H^*},$$

lo que se interpreta como una dependencia continua de la solución de la ecuación (7.3) respecto a los datos.

8. Espacios vectoriales cociente

En esta parte estudiaremos una clase particular de espacios vectoriales, los llamados *espacios vectoriales cociente* asociados a un subespacio vectorial. Estudiaremos algunas sus propiedades básicas y mostraremos una caracterización de su dual topológico.

A lo largo de esta sección $M \subseteq \mathbf{E}$ será un s.e.v. de $\mathbf{E}$.

8.1 Espacios Vectoriales Cociente

Comencemos por clarificar algunas nociones de operaciones algebraicas de conjuntos.

Notación 8.1. *Si* $A, B \subseteq \mathbf{E}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$*, entonces*

$$A + B := \{y \in \mathbf{E} \mid \exists a \in A,\ \exists b \in B \text{ tal que } y = a + b\} \quad y \quad \lambda A := \{y \in \mathbf{E} \mid \exists a \in A,\ \text{tal que } y = \lambda a\}.$$

Dado $x \in \mathbf{E}$*, escribiremos* $x + B$ *en vez de* $\{x\} + B$ *para simplificar la notación.*

Dado que $\mathbf{E}$ es un espacio vectorial, el conjunto potencia $\mathscr{P}(\mathbf{E})$ también tiene la estructura de espacio vectorial: dados $A, B \subseteq \mathbf{E}$ (ie. $A, B \in \mathscr{P}(\mathbf{E})$) y $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos

$$A + \lambda B := \{x \in \mathbf{E} \mid \exists a \in A,\ \exists b \in B \text{ tal que } y = a + \lambda b\} \in \mathscr{P}(\mathbf{E})$$

Definición 8.1.1 Supongamos que $M \subseteq \mathbf{E}$ es un s.e.v. de $\mathbf{E}$. Definimos el **espacio vectorial cociente** de $\mathbf{E}$ por M como

$$\mathbf{E}/M := \{[x]_M \in \mathscr{P}(\mathbf{E}) \mid x \in \mathbf{E}\}.$$

donde $[x]_M := x + M = \{y \in \mathbf{E} \mid \exists m \in M \text{ tal que } y = x + m\}$ para todo $x \in \mathbf{E}$.

Dado que $M \subseteq \mathbf{E}$ es un s.e.v. de $\mathbf{E}$ tenemos que $x \in [x]_M$ pues $0 \in M$ y también

$$M + \lambda M = \{x + \lambda y \in \mathbf{E} \mid x, y \in M\} \subseteq M, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Además, $\mathbf{E}/M$ es efectivamente un espacio vectorial, pues dados $x_1, x_2 \in \mathbf{E}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos:

- $[x_1]_M + \lambda [x_2]_M \subseteq [x_1 + \lambda x_2]_M$ ya que

$$[x_1]_M + \lambda [x_2]_M = x_1 + M + \lambda (x_2 + M) = x_1 + \lambda x_2 + M + \lambda M \subseteq x_1 + \lambda x_2 + M = [x_1 + \lambda x_2]_M.$$

- $[x_1 + \lambda x_2]_M \subseteq [x_1]_M + \lambda [x_2]_M$ ya que si $y \in [x_1 + \lambda x_2]_M$, tenemos que $y = x_1 + \lambda x_2 + m$ para algún $m \in M$, luego

$$y = (x_1 + m) + \lambda x_2 \in x_1 + M + \lambda x_2 \subseteq [x_1]_M + \lambda [x_2]_M.$$

Luego,

$$[x_1]_M + \lambda [x_2]_M = [x_1 + \lambda x_2]_M \in \mathbf{E}/M.$$

Además, en este caso el origen en $\mathbf{E}/M$ corresponde a $0 = [m]_M$ para todo $m \in M$.

Notación 8.2. *Dado $M \subseteq \mathbf{E}$ usaremos la notación $\sim_M$ para la relación definida en $\mathbf{E}$ via la expresión:*

$$x \sim_M y \iff x - y \in M.$$

Si M es un s.e.v. de $\mathbf{E}$, entonces no es difícil ver que $\sim_M$ es una relación de equivalencia en $\mathbf{E}$, pues es

- reflexiva: $x \sim_M x$ pues $x - x = 0 \in M$.
- simétrica: $x \sim_M y \Rightarrow y \sim_M x$ pues si $x - y \in M$ también tenemos que $y - x = -(x - y) \in M$.
- transitiva: si $x \sim_M y$ e $y \sim_M z$ entonces $x - z = (x - y) + (y - z) \in M$.

Los conjuntos $[x]_M = x + M$ corresponden a las clases de equivalencia asociadas a la relación $\sim_M$ pues

$$x - y \in M \iff \exists m \in M \text{ tal que } y = x + m.$$

En otras palabras, $\mathbf{E}/M = \mathbf{E}/\sim_M$.

8.1.1 Norma sobre $\mathbf{E}/M$

Veamos ahora que el espacio cociente $\mathbf{E}/M$ se puede dotar de una topología inducida por una norma apropiada.

Proposición 8.1.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y que $M \subseteq \mathbf{E}$ es un s.e.v. cerrado de $\mathbf{E}$, luego $(\mathbf{E}/M, \|\cdot\|_{\mathbf{E}/M})$ es un e.v.n. con

$$\|[x]_M\|_{\mathbf{E}/M} := \operatorname{dist}(x, M) = \inf_{m \in M} \|x - m\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Demostración. Primero notemos que la función $[x]_M \mapsto \|[x]_M\|_{\mathbf{E}/M}$ es una función bien definida (no depende x), pues dados $x, y \in \mathbf{E}$ tales que $[x]_M = [y]_M$, tenemos que $x \sim_M y$, usando el cambio de variables $\tilde{m} = m + y - x$ tenemos

$$\|[x]_M\|_{\mathbf{E}/M} = \inf_{m \in M} \|x - m\|_{\mathbf{E}} = \inf_{m \in M} \|y - (m + y - x)\|_{\mathbf{E}} = \inf_{\tilde{m} \in M} \|y - \tilde{m}\|_{\mathbf{E}} = \|[y]_M\|_{\mathbf{E}/M}.$$

Veamos ahora que es una norma: dados $x, x_1, x_2 \in \mathbf{E}$ y $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$ tenemos

- $\|[x]_M\|_{\mathbf{E}/M} = 0$ si y sólo si $[x]_M = 0$, pues tenemos que $\|[x]_M\|_{\mathbf{E}/M} = 0$ es equivalente a $\operatorname{dist}(x,M) = 0$. Dado que M es cerrado, esto equivale a $x \in M$; pues $[m]_M = 0 \in \mathbf{E}/M$ para todo $m \in M$.
- $\|\lambda[x]_M\|_{\mathbf{E}/M} = |\lambda|\,\|[x]_M\|_{\mathbf{E}/M}$, pues $\lambda[x]_M = [\lambda x]_M$ y por lo tanto
$$\|\lambda[x]_M\|_{\mathbf{E}/M} = \operatorname{dist}(\lambda x, M) = \inf_{m\in M} \|\lambda x - \lambda m\|_{\mathbf{E}} = |\lambda| \inf_{m\in M} \|x-m\|_{\mathbf{E}} = |\lambda| \operatorname{dist}(x,M).$$
- $\|[x_1]_M + [x_2]_M\|_{\mathbf{E}/M} \leq \|[x_1]_M\|_{\mathbf{E}/M} + \|[x_2]_M\|_{\mathbf{E}/M}$ ya que $[x_1]_M + [x_2]_M = [x_1+x_2]_M$ y además
$$\operatorname{dist}(x_1+x_2, M) = \inf_{m_1,m_2\in M} \|x_1+x_2-(m_1+m_2)\|_{\mathbf{E}} \leq \inf_{m_1\in M} \|x_1-m_1\|_{\mathbf{E}} + \inf_{m_2\in M} \|x_2-m_2\|_{\mathbf{E}}.$$

$\square$

Definición 8.1.2 Si $M \subseteq \mathbf{E}$ es un s.e.v. de $\mathbf{E}$, denotaremos por $\pi_M : \mathbf{E} \to \mathbf{E}/M$ a la **proyección canónica** definida por
$$\pi_M(x) := [x]_M, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

La proyección canónica $\pi_M : \mathbf{E} \to \mathbf{E}/M$ es:
- lineal, pues dados $x_1, x_2 \in \mathbf{E}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos
$$\pi_M(x_1+\lambda x_2) = [x_1+\lambda x_2]_M = [x_1]_M + \lambda[x_2]_M = \pi_M(x_1) + \lambda \pi_M(x_2).$$
- sobreyectiva, pues dado $\alpha \in \mathbf{E}/M$ existe $x \in \mathbf{E}$ tal que $\alpha = [x]_M$, es decir, $\alpha = \pi_M(x)$.

Si adicionalmente $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y M es cerrado, entonces
- $\pi_M : \mathbf{E} \to \mathbf{E}/M$ es acotado pues $0 \in M$ y por lo tanto
$$\|\pi_M(x)\|_{\mathbf{E}/M} = \|[x]_M\|_{\mathbf{E}/M} = \operatorname{dist}(x,M) \leq \|x\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$
En particular, $\|\pi_M\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{E}/M)} \leq 1$.

Notemos que si $M = \mathbf{E}$, entonces $\mathbf{E}/M = \{0\}$ y en ese caso $\pi_M(x) = 0$.

Ahora veremos que si M es un s.e.v. **propio** de $\mathbf{E}$ ($M \neq \mathbf{E}$), entonces, $\|\pi_M\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{E}/M)} = 1$.

Lema 8.1 — Riesz. Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y que $M \subseteq \mathbf{E}$ es un s.e.v. cerrado y propio de $\mathbf{E}$. Luego, existe una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ tal que $\|x_k\|_{\mathbf{E}} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\operatorname{dist}(x_k, M) \to 1$. En particular, $\|\pi_M\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{E}/M)} = 1$.

Demostración. Fijemos $y \in \mathbf{E} \setminus M$ y tomemos una sucesión $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq M$ tal que
$$\|y - m_k\|_{\mathbf{E}} \to \operatorname{dist}(y,M).$$

Dado que M es cerrado, entonces necesariamente $\operatorname{dist}(y,M) > 0$. De otra forma tendríamos $m_k \to y$, pero M es cerrado y $m_k \in M$, con lo cual $y \in M$, lo que es absurdo.

Luego $\|y-m_k\|_{\mathbf{E}} \geq \operatorname{dist}(y,M) > 0$. Para concluir, definamos $x_k = \dfrac{y-m_k}{\|y-m_k\|_{\mathbf{E}}}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y veamos que $\operatorname{dist}(x_k, M) \to 1$. Fijemos $m \in M$
$$\|x_k - m\|_{\mathbf{E}} = \left\| \frac{y-m_k}{\|y-m_k\|_{\mathbf{E}}} - m \right\|_{\mathbf{E}} = \frac{\|y-(m_k + \|y-m_k\|_{\mathbf{E}} m)\|_{\mathbf{E}}}{\|y-m_k\|_{\mathbf{E}}} \geq \frac{\operatorname{dist}(y,M)}{\|y-m_k\|_{\mathbf{E}}}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$
Tomando ínfimo sobre $m \in M$ tenemos
$$1 = \|x_k\|_{\mathbf{E}} = \|x_k - 0\|_{\mathbf{E}} \geq \operatorname{dist}(x_k,M) \geq \frac{\operatorname{dist}(y,M)}{\|y-m_k\|_{\mathbf{E}}}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$
Dado que $\|y-m_k\|_{\mathbf{E}} \to \operatorname{dist}(y,M)$, obtenemos que $\operatorname{dist}(x_k,M) \to 1$.

Finalmente, concluimos notando que dado que
$$\operatorname{dist}(x_k,M) = \|\pi_M(x_k)\|_{\mathbf{E}/M} \leq \|\pi_M\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{E}/M)} \|x_k\|_{\mathbf{E}} \leq 1, \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \quad \square$$

8.2 Espacio dual de un espacio cociente

Ahora pasaremos a estudiar el espacio dual de un espacio cociente, en particular no interesa encontrar una caracterización de este espacio dual.

Notación 8.3. *Si $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y $M \subseteq \mathbf{E}$ es un s.e.v. cerrado de $\mathbf{E}$, el operador adjunto de la proyección canónica es el operador lineal continuo $\pi_M^* : (\mathbf{E}/M)^* \to \mathbf{E}^*$ que satisface*

$$\langle \pi_M^*(\ell), x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle \ell, \pi_M(x)\rangle_{(\mathbf{E}/M)^*,\mathbf{E}/M}, \qquad \forall x \in \mathbf{E},\ \forall \ell \in (\mathbf{E}/M)^*.$$

Supongamos que M es un s.e.v. cerrado y propio de $\mathbf{E}$.

- $\pi_M^* : (\mathbf{E}/M)^* \to \mathbf{E}^*$ es inyectivo, pues $\ker(\pi_M^*) = \operatorname{im}(\pi_M)^\perp$ (gracias a la Proposición 5.1.4) y sabemos que $\pi_M : \mathbf{E} \to \mathbf{E}/M$ es sobreyectiva.
- $\|\pi_M^*\|_{\mathscr{L}C((\mathbf{E}/M)^*,\mathbf{E}^*)} = \|\pi_M\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{E}/M)} = 1.$

Proposición 8.2.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y que $M \subseteq \mathbf{E}$ es un s.e.v. cerrado y propio de $\mathbf{E}$. Luego, $\operatorname{im}(\pi_M^*) = M^\perp$ y $\pi_M^* : (\mathbf{E}/M)^* \to M^\perp$ es una isometría:

$$\|\pi_M^*(\ell)\|_{\mathbf{E}^*} = \|\ell\|_{(\mathbf{E}/M)^*}, \qquad \forall \ell \in (\mathbf{E}/M)^*.$$

En particular, $(\mathbf{E}/M)^* \cong M^\perp$.

Demostración. Dado que $\|\pi_M^*\|_{\mathscr{L}C((\mathbf{E}/M)^*,\mathbf{E}^*)} = 1$, tenemos que

$$\|\pi_M^*(\ell)\|_{\mathbf{E}^*} \le \|\pi_M^*\|_{\mathscr{L}C((\mathbf{E}/M)^*,\mathbf{E}^*)}\|\ell\|_{(\mathbf{E}/M)^*} \le \|\ell\|_{(\mathbf{E}/M)^*}, \qquad \forall \ell \in (\mathbf{E}/M)^*.$$

Por definición del operador adjunto de la proyección canónica tenemos

$$\langle \pi_M^*(\ell), x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle \ell, \pi_M(x)\rangle_{(\mathbf{E}/M)^*,\mathbf{E}/M}, \qquad \forall x \in \mathbf{E},\ \forall \ell \in (\mathbf{E}/M)^*.$$

De esta identidad podemos deducir que $\pi_M^*(\ell) \in M^\perp$, puesto que $\pi_M(m) = 0$ para todo $m \in M$.

Con esto obtenemos que $\operatorname{im}(\pi_M^*) \subseteq M^\perp$.

Resta ver que $M^\perp \subseteq \operatorname{im}(\pi_M^*)$ y que $\|\ell\|_{(\mathbf{E}/M)^*} \le \|\pi_M^*(\ell)\|_{\mathbf{E}^*}$ para todo $\ell \in (\mathbf{E}/M)^*$.

Fijemos $\xi \in M^\perp$, tenemos que probar que existe $\ell \in (\mathbf{E}/M)^*$ tal que $\xi = \pi_M^*(\ell)$.

Consideremos el mapeo $\ell_\xi : \mathbf{E}/M \to \mathbb{R}$ dado por

$$\ell_\xi(\alpha) = \langle \xi, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \quad \text{para algún } x \in \mathbf{E} \text{ tal que } \alpha = [x]_M.$$

Este mapeo es efectivamente una función (su imagen está únicamente determinada) pues si $x, y \in \mathbf{E}$ son tales que $\alpha = [x]_M = [y]_M$, entonces $x - y \in M$ y dado que $\xi \in M^\perp$ tenemos que

$$\langle \xi, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle \xi, x - y + y\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle \xi, x - y\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} + \langle \xi, y\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle \xi, y\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}.$$

Notemos que si $\ell_\xi \in (\mathbf{E}/M)^*$, entonces necesariamente tendríamos que $\xi = \pi_M^*(\ell_\xi)$ pues

$$\langle \pi_M^*(\ell_\xi), x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle \ell_\xi, \pi_M(x)\rangle_{(\mathbf{E}/M)^*,\mathbf{E}/M} = \langle \xi, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Con esto habríamos probado que $M^\perp \subseteq \operatorname{im}(\pi_M^*)$, y por lo tanto tendríamos $M^\perp = \operatorname{im}(\pi_M^*)$.

En particular, $\pi_M^* : (\mathbf{E}/M)^* \to M^\perp$ sería una biyección lineal; recordemos que π_M^* es inyectivo.

Veamos que $\ell_\xi \in (\mathbf{E}/M)^*$. Notemos que $\ell_\xi : \mathbf{E}/M \to \mathbb{R}$ es:

- lineal pues si $\alpha_1 = [x_1]_M$ y $\alpha_2 = [x_2]_M$, entonces tenemos que $\alpha_1 + \lambda\alpha_2 = [x_1 + \lambda x_2]_M$, y luego

$$\ell_\xi(\alpha_1 + \lambda\alpha_2) = \langle \xi, x_1 + \lambda x_2\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle \xi, x_1\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} + \lambda\langle \xi, x_2\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \ell_\xi(\alpha_1) + \lambda\ell_\xi(\alpha_2).$$

- continuo pues dado que $\xi \in M^\perp$ tenemos que si $\alpha = [x]_M$ para $x \in \mathbf{E}$ entonces

$$|\ell_\xi(\alpha)| = |\langle \xi, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| = |\langle \xi, x-m\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| \leq \|\xi\|_{\mathbf{E}^*}\|x-m\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall m \in M.$$

  Tomando ínfimo sobre $m \in M$ tenemos

$$|\ell_\xi(\alpha)| \leq \|\xi\|_{\mathbf{E}^*}\operatorname{dist}(x,M) = \|\xi\|_{\mathbf{E}^*}\|[x]_M\|_{\mathbf{E}/M} = \|\xi\|_{\mathbf{E}^*}\|\alpha\|_{\mathbf{E}/M}. \tag{8.1}$$

  Esto implica en particular que $\|\ell_\xi\|_{(\mathbf{E}/M)^*} \leq \|\xi\|_{\mathbf{E}^*}$

Por lo tanto $\xi = \pi_M^*(\ell_\xi)$.

Ahora bien, dado $\ell \in (\mathbf{E}/M)^*$, tomemos $\xi = \pi_M^*(\ell)$. En particular, tendremos

$$\pi_M^*(\ell) = \xi = \pi_M^*(\ell_{\pi_M^*(\ell)}).$$

Dado que π_M^* es inyectivo, concluimos que $\ell = \ell_{\pi_M^*(\ell)}$. Finalmente, por (8.1) tenemos que

$$\|\ell\|_{(\mathbf{E}/M)^*} = \|\ell_{\pi_M^*(\ell)}\|_{(\mathbf{E}/M)^*} \leq \|\xi\|_{\mathbf{E}^*} = \|\pi_M^*(\ell)\|_{\mathbf{E}^*}, \qquad \forall \ell \in (\mathbf{E}/M)^*.$$

Con esto hemos probado π_M^* es una isometría entre $(\mathbf{E}/M)^*$ y $M^\perp$. □

8.3 Completitud de un espacio cociente

Para concluir esta sección, veremos que la completitud es una propiedad heredada por espacio cociente.

Proposición 8.3.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach y que $M \subseteq \mathbf{E}$ es un s.e.v. cerrado de $\mathbf{E}$, luego $(\mathbf{E}/M, \|\cdot\|_{\mathbf{E}/M})$ es un espacio de Banach y $\pi_M : \mathbf{E} \to \mathbf{E}/M$ es una aplicación abierta.

Demostración. Sabemos que $(\mathbf{E}/M, \|\cdot\|_{\mathbf{E}/M})$ es un e.v.n., luego resta ver la completitud; el hecho que $\pi_M : \mathbf{E} \to \mathbf{E}/M$ es una aplicación abierta será una consecuencia directa del Teorema de la Aplicación Abierta.

Sea $\{[x_k]_M\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathbf{E}/M, \|\cdot\|_{\mathbf{E}/M})$. Para concluir, bastará probar que la sucesión tiene al menos una subsucesión convergente.

Consideremos la subsucesión $\{[x_{k_n}]_M\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida via la recurrencia:

$$k_0 = \text{ínf}\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\|[x_i]_M - [x_j]_M\right\|_{\mathbf{E}/M} < 1,\ \forall i,j \geq k\right\}$$

$$k_{n+1} := \underset{k\in\mathbb{N}}{\text{ínf}}\left\{k \geq k_n \mid \left\|[x_i]_M - [x_j]_M\right\|_{\mathbf{E}/M} < \frac{1}{2^{n+1}},\ \forall i,j \geq k\right\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego, por construcción tenemos

$$\operatorname{dist}(x_{k_{n+1}} - x_{k_n}, M) = \left\|[x_{k_{n+1}}]_M - [x_{k_n}]_M\right\|_{\mathbf{E}/M} < \frac{1}{2^{n+1}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por definición de ínfimo, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m_n \in M$ tal que

$$\|x_{k_{n+1}} - x_{k_n} - m_n\|_{\mathbf{E}} < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Definamos $z_0 = 0$ y $z_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} m_j$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $z_n \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

La sucesión $\{x_{k_n} - z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbf{E}$, pues dado $n, N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tenemos

$$(x_{k_n} - z_n) - (x_{k_{n+N}} - z_{n+N}) = \left(\sum_{j=n}^{n+N-1} \left(x_{k_j} - x_{k_{j+1}}\right)\right) - (z_n - z_{n+N}) = \left(\sum_{j=n}^{n+N-1} \left(x_{k_j} - x_{k_{j+1}}\right)\right) - \sum_{j=n}^{n+N} m_j,$$

y por lo tanto

$$\|(x_{k_n} - z_n) - (x_{k_{n+N}} - z_{n+N})\|_{\mathbf{E}} \leq \sum_{j=n}^{n+N-1} \|x_{k_{j+1}} - x_{k_j} - m_j\|_{\mathbf{E}} < \sum_{j=n}^{n+N-1} \frac{1}{2^{j+1}}. \tag{8.2}$$

Luego, como $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach, existe $\bar{x} \in \mathbf{E}$ tal que $x_{k_n} - z_n \to \bar{x}$.

Ahora bien, haciendo $N \to +\infty$ en (8.2) obtenemos que

$$\|(x_{k_n} - z_n) - \bar{x}\|_{\mathbf{E}} \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}}.$$

Finalmente, dado que $z_n \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\|[x_{k_n}]_M - [\bar{x}]_M\|_{\mathbf{E}/M} = \operatorname{dist}(x_{k_n} - \bar{x}, M) \leq \|(x_{k_n} - z_n) - \bar{x}\|_{\mathbf{E}} \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}}.$$

En otras palabras, $[x_{k_n}]_M \to [\bar{x}]_M$ en $\mathbf{E}/M$, y con esto concluimos el resultado pedido. $\square$

9. Espacios vectoriales complejos

Ahora vamos a mostrar la extensión de algunos de los teoremas más importantes que hemos estudiado hasta el momento al caso de espacios vectoriales complejos.

Notación 9.1. *Denotaremos por* $\mathbb{C}$ *al conjunto de número complejos, y usaremos* i *para la unidad imaginaria. Dado* $\lambda \in \mathbb{C}$*, con* $\lambda = a + \mathrm{i}b$ *(donde* $a, b \in \mathbb{R}$*) denotaremos*

- $|\lambda|$ *su módulo:* $|\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$*;*
- $\overline{\lambda}$ *su conjugado:* $\overline{\lambda} = a - \mathrm{i}b$*;*
- $\Re(\lambda)$ *su parte real:* $\Re(\lambda) = a$*;*
- $\Im(\lambda)$ *su parte imaginaria:* $\Im(\lambda) = b$*.*

Ejemplos 9.0.1 Los siguientes son algunos ejemplos de espacios vectoriales complejos que usaremos en el curso:

- $\mathscr{C}(\mathbf{X};\mathbb{C})$: el conjunto de funciones $f\colon \mathbf{X} \to \mathbb{C}$ continuas, con $\mathbf{X}$ un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$.
- $\ell^p(\mathbb{C})$: la colección de sucesiones $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ tales que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|^p < +\infty \quad \text{si } p \in [1, +\infty), \qquad \text{o bien} \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < +\infty \quad \text{si } p = +\infty.$$

- $L^p_\mu(\Omega;\mathbb{C})$: el conjunto de las (clases de equivalencia de) funciones $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tales que $\Re(f) : \Omega \to \mathbb{R}$ e $\Im(f) : \Omega \to \mathbb{R}$ son medibles, con $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ siendo un espacio de medida, que verifican

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) < +\infty \quad \text{si } p \in [1, +\infty), \text{ o bien } \inf_{a\geq 0}\{a \mid |f| \leq a, \quad \text{c.t.p.}\} < +\infty \quad \text{si } p = +\infty.$$

■

9.0.1 Espacios de Banach complejos

Definición 9.0.1 Supongamos que $\mathbf{E}$ es e.v. complejo. Una función $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}\colon \mathbf{E}\to[0,+\infty)$ es una **norma** si:

- $\|x\|_{\mathbf{E}}=0$ si y sólo si $x=0$;
- $\|\lambda x\|_{\mathbf{E}}=|\lambda|\|x\|_{\mathbf{E}}$ para todo $x\in\mathbf{E}$ y $\lambda\in\mathbb{C}$;
- $\|x+y\|_{\mathbf{E}}\le\|x\|_{\mathbf{E}}+\|y\|_{\mathbf{E}}$ para todo $x,y\in\mathbf{E}$.

Diremos en este caso que el par $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. complejo.

Notación 9.2. *Si* $\mathbf{E}$ *es un e.v. complejo, denotaremos por*

$$\mathbf{E}_{\mathbb{R}}:=\{\lambda x\in\mathbf{E}\mid\lambda\in\mathbb{R},\ x\in\mathbf{E}\}$$

al e.v. real inducido por $\mathbf{E}$*. Notemos que como conjuntos* $\mathbf{E}$ *y* $\mathbf{E}_{\mathbb{R}}$ *coinciden, pero uno es un e.v. complejo y el otro real.*

$(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. complejo, entonces $(\mathbf{E}_{\mathbb{R}},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. real

Definición 9.0.2 Diremos que $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un **espacio de Banach complejo** si $(\mathbf{E},d_{\mathbf{E}})$ es un e.m. completo para la métrica inducida por la norma:

$$d_{\mathbf{E}}(x,y):=\|x-y\|_{\mathbf{E}},\qquad\forall\,x,y\in\mathbf{E}.$$

■ **Ejemplos 9.0.2** Los siguientes son algunos ejemplos de espacios de Banach complejos que usaremos en el curso:

- $\mathscr{C}(\mathbf{X};\mathbb{C})$ con la norma
$$\|f\|_\infty:=\max_{x\in\mathbf{X}}|f(x)|,\qquad\forall f\in\mathscr{C}(\mathbf{X};\mathbb{C}).$$
- $\ell^p(\mathbb{C})$ con las normas
$$\|x\|_{\ell^p}:=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\quad\text{si } p\in[1,+\infty),\qquad\text{o bien}\quad\|x\|_{\ell^\infty}:=\sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k|.$$
- $L^p_\mu(\Omega;\mathbb{C})$ con las normas
$$\|f\|_{L^p_\mu}:=\left(\int_\Omega|f(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\quad\text{si } p\in[1,+\infty),\ \text{o bien}\ \|f\|_{L^\infty_\mu}:=\inf_{a\ge0}\{a\mid|f|\le a,\quad\text{c.t.p.}\}.$$

■

9.0.2 Duales topológicos

Definición 9.0.3 El **dual topológico** de un e.v.n. complejo $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es el conjunto de las funciones $\ell:\mathbf{E}\to\mathbb{C}$ que son

- lineales: $\ell(x+\lambda y)=\ell(x)+\lambda\ell(y)$ para todo $x,y\in\mathbf{E}$ y $\lambda\in\mathbb{C}$;
- continuas: existe $c>0$ tal que $|\ell(x)|\le c\|x\|_{\mathbf{E}}$, para todo $x\in\mathbf{E}$.

Usaremos igualmente la notación $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})^*$ o $\mathbf{E}^*$ si no hay confusión. La norma dual es

$$\|\ell\|_{\mathbf{E}^*} := \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}}\leq 1} |\ell(x)|, \quad \forall\, \ell \in (\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})^*.$$

Supongamos que $\ell : \mathbf{E} \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal.

- Notemos que

$$\ell(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}\ell(x) = \mathrm{i}(\Re(\ell)(x) + \mathrm{i}\Im(\ell(x)) = -\Im(\ell(x)) + \mathrm{i}\Re(\ell(x)), \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

  Por lo tanto $\Im(\ell(x)) = -\Re(\ell(\mathrm{i}x))$. En consecuencia, tenemos

$$\ell(x) = \Re(\ell(x)) - \mathrm{i}\Re(\ell(\mathrm{i}x)), \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

- $\Re(\ell)\colon \mathbf{E}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, dado por $x \mapsto \Re(\ell)(x) := \Re(\ell(x))$, es lineal: dados $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x,y \in \mathbf{E}$ tenemos

$$\Re(\ell)(x+\lambda y) = \Re(\ell(x+\lambda y)) = \Re(\ell(x)+\lambda\ell(y)) = \Re(\ell(x)) + \lambda\Re(\ell(y)) = \Re(\ell)(x) + \lambda\Re(\ell)(y).$$

- Si $\ell \in \mathbf{E}^*$, el producto dualidad será $\langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \ell(x) \in \mathbb{C}$ para todo $x \in \mathbf{E}$.
  También tendremos que $\Re(\ell) \in \mathbf{E}_{\mathbb{R}}^*$ pues $|\Re(\ell)(x)| = |\Re(\ell(x))| \leq |\ell(x)|$ para todo $x \in \mathbf{E}$.
  Además, tenemos que

$$\Re\left(\langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\right) = \langle \Re(\ell), x\rangle_{\mathbf{E}_{\mathbb{R}}^*,\mathbf{E}_{\mathbb{R}}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

9.1 Espacios de Hilbert

Definición 9.1.1 Supongamos que $\mathbf{E}$ es un e.v. complejo. Diremos que una función $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbf{E}\times\mathbf{E} \to \mathbb{C}$ es un **producto interno** (también llamado **producto escalar**) en $\mathbf{E}$ si satisface

1. $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ para todo $x,y \in \mathbf{E}$.
2. $x \mapsto \langle x,y\rangle$ es lineal para todo $y \in \mathbf{E}$ fijo.
3. $\langle x,x\rangle > 0$ para todo $x \in \mathbf{E}\setminus\{0\}$.

- A partir de la definición de $\langle\cdot,\cdot\rangle$, también se tiene que para todo $x,y,z \in \mathbf{E}$ y para cada $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\langle x, y+\lambda z\rangle = \overline{\langle y+\lambda z, x\rangle} = \overline{\langle y,x\rangle + \lambda\langle z,x\rangle} = \overline{\langle y,x\rangle} + \overline{\lambda}\,\overline{\langle z,x\rangle} = \langle x,y\rangle + \overline{\lambda}\langle x,z\rangle.$$

  Cuando esto ocurre, se dice que la aplicación $y \mapsto \langle x,y\rangle$ es **sesqui-lineal**.
- La función $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Re}$ dada por $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle_{\Re} := \Re(\langle x,y\rangle)$, es producto interno sobre el e.v. real $\mathbf{E}_{\mathbb{R}}$, pues
  1. $\langle x,y\rangle_{\Re} = \Re(\langle x,y\rangle) = \Re\left(\overline{\langle x,y\rangle}\right) = \Re(\langle y,x\rangle) = \langle y,x\rangle_{\Re}$ para todo $x,y \in \mathbf{E}_{\mathbb{R}}$.
  2. $x \mapsto \langle x,y\rangle_{\mathbb{R}}$ es lineal para todo $y \in \mathbf{E}$ fijo, pues dados $x_1,x_2 \in \mathbf{E}_{\mathbb{R}}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\langle x_1+\lambda x_2, y\rangle_{\Re} = \Re\left(\langle x_1+\lambda x_2, y\rangle\right) = \Re\left(\langle x_1,y\rangle + \lambda\langle x_2,y\rangle\right) = \Re\left(\langle x_1,y\rangle\right) + \lambda\Re\left(\langle x_2,y\rangle\right) = \langle x_1,y\rangle_{\Re} + \lambda\langle x_2,y\rangle_{\Re}.$$

  3. $\langle x,x\rangle_{\Re} = \Re(\langle x,y\rangle) = \langle x,x\rangle > 0$ para todo $x \in \mathbf{E}\setminus\{0\}$.
- La función $\|\cdot\|\colon \mathbf{E} \to [0,+\infty)$ dada por $x \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ es una norma en $\mathbf{E}$ y sobre $\mathbf{E}_{\mathbb{R}}$.

Definición 9.1.2 Sea $\mathbf{E}$ un e.v. complejo dotado con el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Diremos que $(\mathbf{E},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un **espacio de Hilbert complejo** si es un espacio de Banach complejo con la norma inducida por el producto interno.

En tal caso, denotaremos indistintamente $(\mathbf{E},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ o bien $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$.

Si $(\mathbf{E},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio de Hilbert complejo, entonces $(\mathbf{E}_{\mathbb{R}},\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Re})$ es un espacio de Hilbert real.

Ejemplos 9.1.1 Los siguientes son algunos ejemplos de espacios de Hilbert complejos que usaremos en el curso:

- $\ell^2(\mathbb{C})$ con el producto interno
$$\langle x,y\rangle := \sum_{k=0}^{+\infty} x_k\overline{y_k}.$$
- $L^2_\mu(\Omega;\mathbb{C})$ con el producto interno
$$\langle f,g\rangle := \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,d\mu(x)$$

■

Teorema 9.1.2 — Representación de Riesz. Supongamos que $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert complejo. Supongamos que $\ell\in\mathbf{E}^*$, luego existe un único $\varphi\in\mathbf{E}$ tal que $\|\varphi\|_{\mathbf{E}}=\|\ell\|_{\mathbf{E}^*}$ y
$$\langle \ell,x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}=\ell(x)=\langle x,\varphi\rangle,\qquad \forall\, x\in\mathbf{E}.$$

Demostración. Recordemos que $\Re(\ell):\mathbf{E}_{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}$ es lineal continua y que
$$\ell(x)=\Re(\ell(x))-\mathrm{i}\Re(\ell(\mathrm{i}x)),\qquad \forall x\in\mathbf{E}.$$

Sabemos también que $(\mathbf{E}_{\mathbb{R}},\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Re})$, con $(x,y)\mapsto\langle x,y\rangle_{\Re}:=\Re(\langle x,y\rangle)$, es un espacio de Hilbert real. Luego para concluir basta obtener una representación para $\Re(\ell)$.

Por el Teorema de Representación de Riesz, existe $\varphi^{\mathbb{R}}\in\mathbf{E}_{\mathbb{R}}=\mathbf{E}$ tal que
$$\Re(\ell(x))=\Re\left(\langle x,\varphi^{\mathbb{R}}\rangle\right),\qquad \forall\, x\in\mathbf{E}_{\mathbb{R}}=\mathbf{E}.$$

Finalmente, la conclusión viene de tomar $\varphi=\varphi^{\mathbb{R}}$ y notar que
$$\ell(x)=\Re\left(\langle x,\varphi^{\mathbb{R}}\rangle\right)-\mathrm{i}\Re\left(\langle \mathrm{i}x,\varphi^{\mathbb{R}}\rangle\right)=\Re\left(\langle x,\varphi^{\mathbb{R}}\rangle\right)+\mathrm{i}\Im\left(\langle x,\varphi^{\mathbb{R}}\rangle\right)=\langle x,\varphi^{\mathbb{R}}\rangle,\qquad \forall x\in\mathbf{E}.$$

□

9.2 Teoremas de Hahn-Banach

Ahora mostraremos las versiones en el caso complejo de los teoremas de Hahn-Banach. Nos enfocaremos en los resultados principales. Las extensiones de los corolarios de estos resultados las dejaremos como ejercicio para el lector.

9.2.1 Versión Analítica

Definición 9.2.1 Supongamos que $\mathbf{E}$ un e.v. complejo. Diremos que una función $p\colon \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ es una **semi-norma** si satisface:

1. $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbf{E}$;
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ para todo $x \in \mathbf{E}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$;
3. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ para todo $x, y \in \mathbf{E}$.

Teorema 9.2.1 — Hahn-Banach Analítico, caso complejo. Supongamos que $p : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ es una semi-norma. Sean $\mathbf{E}_0$ un s.e.v. de $\mathbf{E}$ y $\ell_0 : \mathbf{E}_0 \to \mathbb{C}$ una función lineal tales que

$$|\ell_0(x)| \leq p(x), \quad \forall\, x \in \mathbf{E}_0.$$

Entonces, existe una función lineal $\ell : \mathbf{E} \to \mathbb{C}$ tal que $\ell|_{\mathbf{E}_0} = \ell_0$ y que verifica

$$|\ell(x)| \leq p(x), \quad \forall\, x \in \mathbf{E}.$$

Demostración. Primero notemos que $\mathbf{E}_0$ es un s.e.v. (real) de $\mathbf{E}_{\mathbb{R}}$ y que $\ell_0^{\mathbb{R}} := \Re(\ell_0) : \mathbf{E}_0 \to \mathbb{R}$ es lineal y satisface

$$\ell_0^{\mathbb{R}}(x) \leq |\ell_0^{\mathbb{R}}(x)| = |\Re(\ell_0(x)| \leq |\ell_0(x)| \leq p(x), \qquad \forall x \in \mathbf{E}_0.$$

Dado que p es una semi-norma, es también en particular sublineal (positivamente homogénea y sub-aditiva). Luego por el Teorema de Hahn-Banach Analítico, tenemos que existe un funcional lineal $\ell^{\mathbb{R}}\colon \mathbf{E}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\ell^{\mathbb{R}}|_{\mathbf{E}_0} = \ell_0^{\mathbb{R}} \quad \text{y} \quad \ell^{\mathbb{R}}(x) \leq p(x), \quad \forall x \in \mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathbb{R}}.$$

Consideremos el funcional $\ell\colon \mathbf{E} \to \mathbb{C}$ definido por $\ell(x) = \ell^{\mathbb{R}}(x) - \mathrm{i}\ell^{\mathbb{R}}(\mathrm{i}x)$.

El funcional ℓ es lineal:

- Dados $x, y \in \mathbf{E}$, tenemos

$$\ell(x+y) = \ell^{\mathbb{R}}(x+y) - \mathrm{i}\ell^{\mathbb{R}}(\mathrm{i}x+\mathrm{i}y) = \ell^{\mathbb{R}}(x) - \mathrm{i}\ell^{\mathbb{R}}(\mathrm{i}x) + \ell^{\mathbb{R}}(y) - \mathrm{i}\ell^{\mathbb{R}}(\mathrm{i}y) = \ell(x) + \ell(y).$$

- si $x \in \mathbf{E}$ y $\lambda = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$, con $a, b \in \mathbb{R}$ entonces

$$\ell(\lambda x) = \ell^{\mathbb{R}}(\lambda x) - \mathrm{i}\ell^{\mathbb{R}}(\mathrm{i}\lambda x) = \ell^{\mathbb{R}}((a+\mathrm{i}b)x) - \mathrm{i}\ell^{\mathbb{R}}(\mathrm{i}(a+\mathrm{i}b)x),$$

  y por lo tanto, usando la linealidad de $\ell^{\mathbb{R}}$ (respecto a $\mathbb{R}$), obtenemos

$$\ell(\lambda x) = a\ell^{\mathbb{R}}(x) + b\ell^{\mathbb{R}}(\mathrm{i}x) - \mathrm{i}a\ell^{\mathbb{R}}(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}b\ell^{\mathbb{R}}(x).$$

  Reordenando vemos que $\ell(\lambda x) = \lambda \ell(x)$, pues

$$\ell(\lambda x) = (a+\mathrm{i}b)\ell^{\mathbb{R}}(x) + (b-\mathrm{i}a)\ell^{\mathbb{R}}(\mathrm{i}x) = (a+\mathrm{i}b)\ell^{\mathbb{R}}(x) - (a+\mathrm{i}b)\mathrm{i}\ell^{\mathbb{R}}(\mathrm{i}x) = \lambda\ell^{\mathbb{R}}(x) - \lambda\mathrm{i}\ell^{\mathbb{R}}(\mathrm{i}x).$$

Por otro lado, notemos que $\ell_0 = \Re(\ell_0) + i\Im(\ell_0)$ y que ℓ es una extensión de ℓ_0, pues dado $x \in \mathbf{E}_0$ tenemos

$$\ell|_{\mathbf{E}_0}(x) = \ell^{\mathbb{R}}|_{\mathbf{E}_0}(x) - \mathrm{i}\ell^{\mathbb{R}}|_{\mathbf{E}_0}(\mathrm{i}x) = \ell_0^{\mathbb{R}}(x) - \mathrm{i}\ell_0^{\mathbb{R}}(\mathrm{i}x) = \Re(\ell_0(x)) - \mathrm{i}\Re(\ell_0(\mathrm{i}x)) = \Re(\ell_0(x)) + \mathrm{i}\Im(\ell_0(x)).$$

Dado que $\Re(\ell(x)) = \ell^{\mathbb{R}}(x)$, pues $\ell^{\mathbb{R}}$ tiene valores reales, tenemos

$$\Re(\ell(x)) = \ell^{\mathbb{R}}(x) \leq p(x), \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$, tenemos para todo $x \in \mathbf{E}$:

$$\Re(\lambda \ell(x)) = \Re(\ell(\lambda x)) \leq p(\lambda x) = |\lambda| p(x) = p(x).$$

Finalmente, dado $x \in \mathbf{E}$ con $x \neq 0$ y tomemos $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ tal que $|\ell(x)| = \lambda \ell(x)$. Sigue que $\Re(\lambda \ell(x)) = |\ell(x)|$ y por lo tanto $|\ell(x)| \leq p(x)$, lo que concluye la demostración. □

9.2.2 Versión Geométrica

Definición 9.2.2 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. complejo. Diremos que un conjunto $H \subseteq \mathbf{E}$ es un **hiperplano (cerrado)** si existe una función lineal (continua) $\ell : \mathbf{E} \to \mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$H = \{x \in \mathbf{E} \mid \Re(\ell(x)) = \alpha\}.$$

Teorema 9.2.2 — Hahn-Banach Geométrico complejo, primera versión. Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. complejo y que $A, B \subseteq \mathbf{E}$ son dos conjuntos convexos, disjuntos y no vacíos. Si A es abierto, entonces existe $\ell \in \mathbf{E}^*$ no nulo tal que

$$\Re\left(\langle \ell, y \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\right) \leq \Re\left(\langle \ell, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\right), \qquad \forall\, x \in A,\ \forall\, y \in B.$$

Demostración. Notemos que A y B siguen siendo subconjuntos convexos de $\mathbf{E}_{\mathbb{R}}$, y además dado que $\mathbf{E}_{\mathbb{R}}$ hereda la norma de $\mathbf{E}$, tenemos que A es abierto en el e.v.n. real $\mathbf{E}_{\mathbb{R}}$.

Gracias al Teorema de Hahn-Banach Geométrico (primera versión), existe $\ell^{\mathbb{R}} \in \mathbf{E}_{\mathbb{R}}^*$ no nulo tal que

$$\langle \ell^{\mathbb{R}}, y \rangle_{\mathbf{E}_{\mathbb{R}}^*,\mathbf{E}_{\mathbb{R}}} \leq \langle \ell^{\mathbb{R}}, x \rangle_{\mathbf{E}_{\mathbb{R}}^*,\mathbf{E}_{\mathbb{R}}}, \qquad \forall\, x \in A,\ \forall\, y \in B.$$

Finalmente, el funcional $\ell\colon \mathbf{E} \to \mathbb{C}$ definido por $\ell(x) = \ell^{\mathbb{R}}(x) - \mathrm{i}\ell^{\mathbb{R}}(\mathrm{i}x)$ cumple las condiciones del teorema:

$$\Re\left(\langle \ell, y \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\right) \leq \Re\left(\langle \ell, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\right), \qquad \forall\, x \in A,\ \forall\, y \in B.$$

□

9.3 Teorema de Stone-Weierstrass

Definición 9.3.1 Diremos que un s.e.v. $H \subseteq \mathscr{C}(\mathbf{X};\mathbb{C})$ es

- una **subálgebra** de $\mathscr{C}(\mathbf{X};\mathbb{C})$ si $h_1 \cdot h_2 \in H$ para todo $h_1, h_2 \in H$.
- **separante** si dados $x, y \in \mathbf{X}$ distintos, existe $h \in H$ tal que $h(x) \neq h(y)$.
- **auto-conjugado** si $\overline{h} \in H$ para todo $h \in H$, donde $x \mapsto \overline{h}(x) := \overline{h(x)}$.

Teorema 9.3.1 — Stone-Weierstrass complejo. Supongamos que $\mathbf{X}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$. Si $H \subseteq \mathscr{C}(\mathbf{X};\mathbb{C})$ es una subálgebra separante auto-conjugada que contiene a las funciones constantes, entonces H es denso en $(\mathscr{C}(\mathbf{X};\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$.

Demostración. Asumamos que $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, si no, dado que $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, podemos identificar a $\mathbf{X}$ con un compacto de $\mathbb{R}^{2n}$.

Definamos

$$H_{\mathbb{R}} := \{h \in H \mid h(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbf{X}\}.$$

Notemos que $H_{\mathbb{R}} + \mathrm{i}H_{\mathbb{R}} \subseteq H$, pues H es un s.e.v. Claramente, $H_{\mathbb{R}} \subseteq \mathscr{C}(\mathbf{X})$ es un s.e.v., contiene a las funciones constantes y es una subálgebra de $\mathscr{C}(\mathbf{X})$.

Dado que $\mathscr{C}(\mathbf{X};\mathbb{C}) = \mathscr{C}(\mathbf{X}) + \mathrm{i}\mathscr{C}(\mathbf{X})$, si $H_{\mathbb{R}}$ fuese denso en $\mathscr{C}(\mathbf{X})$, entonces podríamos concluir el resultado pues

$$H_{\mathbb{R}} + \mathrm{i}H_{\mathbb{R}} \subseteq H \subseteq \mathscr{C}(\mathbf{X};\mathbb{C}) \quad \text{y} \quad H_{\mathbb{R}} + \mathrm{i}H_{\mathbb{R}} \subseteq \mathscr{C}(\mathbf{X}) + \mathrm{i}\mathscr{C}(\mathbf{X}).$$

Para poder aplicar el Teorema de Stone-Weierstrass a $H_{\mathbb{R}}$ falta probar que $H_{\mathbb{R}}$ es separante.

Notemos que dado $h \in H$, tenemos que $\Re(h), \Im(h) \in H$, esto es gracias a que H es auto-conjugado

$$\Re(h(x)) = \frac{1}{2}\left(h(x) + \overline{h(x)}\right) \quad \text{y} \quad \Im(h(x)) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(h(x) - \overline{h(x)}\right), \qquad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Dado que $\Re(h(x)), \Im(h(x)) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbf{X}$, tenemos también que $\Re(h), \Im(h) \in H_{\mathbb{R}}$.

Tomemos $x, y \in \mathbf{X}$ distintos, al ser H separante, existe $h \in H$ tal que $h(x) \neq h(y)$.

Esto último es equivalente a

$$\Re(h(x)) \neq \Re(h(y)) \quad \text{o bien} \quad \Im(h(x)) \neq \Im(h(y)).$$

Como $\Re(h), \Im(h) \in H_{\mathbb{R}}$, concluimos que $H_{\mathbb{R}}$ es separante.

Luego por el Teorema de Stone-Weierstrass obtenemos que $H_{\mathbb{R}}$ es denso en $\mathscr{C}(\mathbf{X})$, y con esto concluimos.

$\square$

10. Problemas de certámenes

10.1 Enunciados

10.1.1 Problema 1 - Certamen 1 - 2019

Sea $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ un e.v.n. y $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ una función dada. Recordemos que el epígrafo de f es el subconjunto de $\mathbf{E} \times \mathbb{R}$ dado por

$$\operatorname{epi}(f) = \{(x,z) \in \mathbf{E} \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq z\}.$$

Diremos que f es:

- **convexa** si $\operatorname{epi}(f)$ es un conjunto convexo de $\mathbf{E} \times \mathbb{R}$.
- **semicontinua inferior** si $\operatorname{epi}(f)$ es cerrado en $\mathbf{E} \times \mathbb{R}$ para la norma producto usual.

Además, diremos que una función $h : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ es afín continua si existen $\ell \in \mathbf{E}^*$ y $c \in \mathbb{R}$ tales que

$$h(x) = \ell(x) + c, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

El objetivo del problema es demostrar que f es *convexa y semicontinua inferior* si y sólo si

$$f(x) = g(x) := \sup\{h(x) \mid h : \mathbf{E} \to \mathbb{R} \text{ es afín continua con } h \leq f\}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}. \tag{10.1}$$

Para ello, proceda como sigue:

a) Asumiendo que la igualdad (10.1) es cierta, demuestre que g es convexa y semicontinua inferior. Concluya a partir de esto una de las implicancias pedidas.

Asuma de ahora en adelante que f es convexa y semicontinua inferior.

b) Demuestre que para cada $(\bar{x}, \bar{z}) \in \mathbf{E} \times \mathbb{R} \setminus \operatorname{epi}(f)$ existen $\ell \in \mathbf{E}^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\ell(\bar{x}) + \bar{z} < \alpha \leq \ell(x) + f(x), \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Concluya a partir de lo anterior que g está bien definida (i.e. $g(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbf{E}$) y que $g \leq f$.

c) Demuestre (puede usar la parte anterior) que para todo $\bar{x} \in \mathbf{E}$ y $\varepsilon > 0$ existe $h : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ afín continua tal que $h \leq f$ y además verifica

$$f(\bar{x}) - \varepsilon < h(\bar{x}).$$

Obtenga a partir de esto el resultado pedido.

10.1.2 Problema 2 - Certamen 1 - 2019

Sea $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ un e.v.n. y sea $\sigma : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ una función dada. Considere el conjunto

$$D = \{\ell \in \mathbf{E}^* \mid \ell(x) \leq \sigma(x),\ \forall x \in \mathbf{E}\}.$$

El objetivo del problema es demostrar que σ es *sublineal y continua* si y sólo si D *es convexo, cerrado, no vacío y acotado*, y que además satisface

$$\sigma(x) = \sup\{\ell(x) \mid \ell \in D\}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}. \tag{10.2}$$

Para ello, proceda como sigue:

a) Asuma que σ viene dado por (10.2) y que D es un subconjunto convexo, cerrado, no vacío y acotado de $\mathbf{E}^*$. Demuestre que σ es sublineal y continua en $\mathbf{E}$.
INDICACIÓN:Demuestre primero que σ es continua en $x = 0$, luego, usando argumentos similares al caso de funcionales lineal, obtenga la continuidad de σ en todo el espacio $\mathbf{E}$.

En adelante asuma que σ es sublineal y continua en $\mathbf{E}$ para probar la otra implicancia.

b) Demuestre que D es no vacío y que (10.2) se verifica.
INDICACIÓN: Tome $x_0 \in \mathbf{E} \setminus \{0\}$ fijo. Considere el s.e.v. $\mathbf{E}_0 = \langle\{x_0\}\rangle$ y la función $\ell_0 : \mathbf{E}_0 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\ell_0(tx_0) = t\sigma(x_0), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Usando un teorema apropiado concluya el resultado pedido.

c) Pruebe que D es un subconjunto convexo y cerrado de $\mathbf{E}^*$.

d) Usando la continuidad de σ, pruebe que $\exists c > 0$ tal que $|\sigma(x)| \leq c$ para todo $x \in \mathbf{E}$ con $\|x\|_{\mathbf{E}} \leq 1$. Demuestre, usando lo anterior, que D es acotado.

10.1.3 Problema 3 - Certamen 1 - 2019

Sean $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ dos espacios de Banach. Sea $L \in \mathscr{LC}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ sobreyectiva tal que $\ker(L)$ es de dimensión finita. Sea $\|\cdot\|$ otra norma en $\mathbf{E}$ para la cual existe $m > 0$ tal que $\|x\| \leq m\|x\|_{\mathbf{E}}$ para todo $x \in \mathbf{E}$. Demuestre que existe $c > 0$ tal que

$$\|x\|_{\mathbf{E}} \leq c(\|L(x)\|_{\mathbf{F}} + \|x\|), \qquad \forall x \in \mathbf{E}. \tag{10.3}$$

Pruebe esto argumentando por contradicción, siguiendo los siguientes pasos:

a) Pruebe que existe una sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\|L(x_k)\|_{\mathbf{F}} + \|x_k\| < \frac{1}{k+1} \quad \text{y} \quad \|x_k\|_E = 1, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

b) Pruebe que existe $r > 0$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ se pueden encontrar $y_k \in \mathbf{E}$ y $z_k \in \ker(L)$ tales que

$$x_k = y_k + z_k, \quad \text{con } \|y_k\|_{\mathbf{E}} < \frac{1}{(k+1)r} \quad \text{y} \quad \lim_{k \to +\infty} \|z_k\|_{\mathbf{E}} = 1.$$

c) Muestre que $\|z_k\| \to 0$ si $k \to +\infty$ y obtenga una contradicción a partir de esto.
Observación: $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ no es necesariamente un espacio de Banach.

10.1.4 Problema 1 - Certamen 1 - 2020

En este problema $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ será un e.v.n. y $M \subseteq \mathbf{E}$ un s.e.v. dado. Asumimos también que $\mathbf{E}$ está dotado de un orden parcial, que denotaremos indistintamente $x \preceq y$ o $y \succeq x$ y que verifica:
(A1) $x \preceq y \implies x+z \preceq y+z$ para todo $x,y,z \in \mathbf{E}$.
(A2) $\lambda \geq 0 \wedge x \succeq 0 \implies \lambda x \succeq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbf{E}$.
Definamos el conjunto

$$P := \{x \in \mathbf{E} \mid x \succeq 0\}$$

y consideremos $\ell_0 : M \to \mathbb{R}$ un funcional lineal que verifica $\ell_0(x) \geq 0$ para todo $x \in M \cap P$.

a) Supongamos que para todo $x \in \mathbf{E}$ existe $m \in M$ tal que $x \preceq m$.
   a) Pruebe que $p(x) := \text{ínf}\{\ell_0(y) \mid y \in M,\ y \succeq x\}$ define una función sublineal en $\mathbf{E}$.
   b) Pruebe que existe $\ell : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ lineal tal que $\ell|_M = \ell_0$ y que verifica $\ell(x) \geq 0$ para todo $x \in P$.

b) Supongamos que $M \cap \text{int}(P) \neq \emptyset$.
   a) Pruebe que para todo $x \in \mathbf{E}$ existe $m \in M$ tal que $x \preceq m$.
   b) Pruebe que existe $\ell \in \mathbf{E}^*$ tal que $\ell|_M = \ell_0$ y que verifica $\ell(x) \geq 0$ para todo $x \in P$.

10.1.5 Problema 2 - Certamen 1 - 2020

En este problema supondremos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach.

a) Dados $M \subseteq \mathbf{E}$ subconjunto de $\mathbf{E}$ y $\varepsilon > 0$, diremos que un conjunto $A \subseteq M$ es:
   - una ε-red en M si para cada $x \in M$, existe un $y \in A$ tal que $\|x-y\|_{\mathbf{E}} < \varepsilon$;
   - ε-separado en M si $\|x-y\|_{\mathbf{E}} \geq \varepsilon$ para todo $x,y \in A$ con $x \neq y$.

   a) Demuestre que un subconjunto ε-separado en M maximal (en el sentido de la inclusión) es una ε-red en M.
   b) Sea $N \subseteq \mathbf{E}$ un conjunto ε-separado en $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1)}$ maximal. Demuestre que

$$\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1-\varepsilon)} \subseteq \overline{\text{Conv}(N)}.$$

b) En esta parte consideraremos $\mathbf{E} = \ell^2(\mathbb{R})$, es decir, el espacio de todas las sucesiones $x := \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con términos en $\mathbb{R}$ tales que $\|x\|_{\mathbf{E}}^2 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$. Consideremos el conjunto $A \subseteq \mathbf{E}$ definido por

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1,\dots,n,\ \alpha_n > 0 \right\},$$

con $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la base canónica de $\mathbf{E}$ y denotemos por $B = -A$.
   a) Pruebe que A y B son dos conjuntos convexos disjuntos, y que no existe un funcional lineal continuo no nulo que los separe.
   INDICACIÓN: Estudie la imagen de A bajo un funcional lineal continuo no nulo.
   b) Explique por qué los teoremas de Hahn-Banach geométricos no aplican en este caso.

10.1.6 Problema 2 - Certamen 1 - 2021

Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ son dos espacios de Banach y $A \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$ es tal que $\text{im}(A)$ es cerrado en $\mathbf{F}$. Pruebe que $\text{im}(A^*) = \ker(A)^{\perp}$, para ello proceda como sigue:

1. Pruebe que $\text{im}(A^*) \subseteq \ker(A)^{\perp}$ y que dado $\varphi \in \ker(A)^{\perp}$, el mapeo $\ell_0 : \text{im}(A) \to \mathbb{R}$ que satisface

$$\ell_0(z) = \langle \varphi, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \qquad \text{para algún } x \in \mathbf{E} \text{ tal que } z = A(x),$$

   es efectivamente una función (su imagen está únicamente determinada) y que además es lineal.

2. Dado $\varphi \in \ker(A)^{\perp}$, pruebe usando el **Teorema de la Aplicación Abierta** que el funcional ℓ_0 dado por el punto anterior es continuo en $(\mathrm{im}(A), \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$.
3. Obtenga el resultado pedido usando el **Teorema de Hahn-Banach Analítico** (o algún corolario).

10.1.7 Problema 3 - Certamen 1 - 2021

Supongamos que $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ es un e.v.n. y que $f : \mathbf{F} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que

$$f(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \leq \lambda f(y_1) + (1-\lambda) f(y_2), \qquad \forall y_1, y_2 \in \mathbf{F},\ \forall \lambda \in [0,1].$$

Consideremos ahora otro e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$, un operador $A \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$ y $x_0 \in \mathbf{E}$, tales que existe $\varphi \in \mathbf{E}^*$ que verifica

$$f(A(x_0)) + \langle \varphi, x - x_0 \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \leq f(A(x)), \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Pruebe, usando el **Teorema de Hahn-Banach Geométrico**, que existe $\ell \in \mathbf{F}^*$ tal que $\varphi = A^*(\ell)$ y que además satisface

$$f(A(x_0)) + \langle \ell, y - A(x_0) \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} \leq f(y), \qquad \forall y \in \mathbf{F}.$$

INDICACIÓN: Pruebe que los siguientes conjuntos son convexos y disjuntos:

$$A := \{(y,z) \in \mathbf{F} \times \mathbb{R} \mid f(y) < z\} \quad \text{y} \quad B := \{(A(x), f(A(x_0)) + \langle \varphi, x - x_0 \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}) \in \mathbf{F} \times \mathbb{R} \mid x \in \mathbf{E}\}.$$

10.1.8 Problema 4 - Certamen 1 - 2021

Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ son dos espacios de Banach. Consideremos dos operadores lineales $T : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ y $S : \mathbf{F}^* \to \mathbf{E}^*$ que satisfacen

$$\langle \ell, T(x) \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} = \langle S(\ell), x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E},\ \forall \ell \in \mathbf{F}^*.$$

Pruebe usando el **Teorema del Grafo Cerrado** que T y S son operadores acotados.

10.1.9 Problema 5 - Certamen 1 - 2021

Previamente demostramos el siguiente resultado:

> **Teorema 10.1.1 — Caracterización de sobreyectividad.** Supongamos que $A \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$ con $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ espacios de Banach. Luego A es sobreyectivo si y sólo si existe $c > 0$ tal que
>
> $$\|\ell\|_{\mathbf{F}^*} \leq c \|A^*(\ell)\|_{\mathbf{E}^*}, \qquad \forall \ell \in \mathbf{F}^*.$$

Ahora probaremos una versión dual de este resultado (que enunciamos, pero no demostramos).

1. Supongamos que $A \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$ con $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ dos e.v.n. (no necesariamente espacios de Banach). Demuestre que, si $A^{**} := (A^*)^*$ es el operador adjunto de A^*, entonces

$$\|A^{**}(J_x)\|_{\mathbf{F}^{**}} = \|A(x)\|_{\mathbf{F}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

A partir de esto, pruebe que si A^* es sobreyectivo entonces

$$\exists c > 0 \text{ tal que } \|x\|_{\mathbf{E}} \leq c \|A(x)\|_{\mathbf{F}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}. \qquad (\star)$$

INDICACIÓN: Considere usar el **TEOREMA** enunciado más arriba en un contexto apropiado.

2. Asumamos ahora que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ son espacios de Banach y que $(\star)$ se verifica para algún $A \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$. Pruebe que $\mathrm{im}(A)$ es cerrado y, usando la Pregunta 2 - Certamen 1 - 2021, demuestre que A^* es necesariamente sobreyectivo.

10.1.10 Problema 6 - Certamen 1 - 2021

Supongamos que $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{Y} \subseteq \mathbb{R}^m$ son dos subconjuntos compactos y no vacíos. Dada una función continua $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$, pruebe usando el **Teorema de Stone-Weierstrass** que existen dos sucesiones $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}(\mathbf{X})$ y $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}(\mathbf{Y})$ tales que $f_k \cdot g_k \to \varphi$ uniformemente en $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$.

10.1.11 Problema 2 - Examen - 2021

Supongamos que $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subconjunto compacto y no vacío. Supongamos además que $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua que satisface

$$\forall \mu \in M(\mathbf{X}), \qquad \left[\int_{\mathbf{X}} \sigma(y^\top x + \theta) d\mu(x) = 0,\ \forall y \in \mathbb{R}^n,\ \theta \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \mu = 0\right].$$

Pruebe que el s.e.v. generado por la familia de funciones

$$\left\{g : \mathbf{X} \to \mathbb{R} \mid g(x) = \sigma(y^\top x + \theta),\ \forall x \in \mathbf{X},\ \text{con } y \in \mathbb{R}^n,\ \theta \in \mathbb{R}\right\}$$

es denso de $(\mathscr{C}(\mathbf{X}), \|\cdot\|_\infty)$.

10.1.12 Problema 3 - Examen - 2021

Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ un e.v.n. y que $C \subseteq \mathbf{E}$ es un conjunto no vacío. Definimos el cono de recesión de C como el siguiente conjunto

$$C_\infty := \{d \in \mathbf{E} \mid \exists x \in C \text{ tal que } x + td \in \overline{C},\ \forall t > 0\}.$$

Pruebe que si C es un conjunto convexo, entonces la definición de C_∞ no depende de x, es decir, para todo $x \in C$ tenemos

$$C_\infty = \{d \in \mathbf{E} \mid x + td \in \overline{C},\ \forall t > 0\}.$$

A partir de esto, muestre que C_∞ es conjunto convexo y cerrado.

10.1.13 Problema 4 - Examen - 2021

Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ son dos espacios de Hilbert y que $A \in \mathscr{L}C(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ es un operador sobreyectivo. Demuestre que $T = A \circ A^*$ es biyectivo.

10.2 Soluciones

10.2.1 Problema 1 - Certamen 1 - 2019

a) Notemos que

$$\operatorname{epi}(g) = \bigcap_{\substack{h:\mathbf{E}\to\mathbb{R} \\ \text{afín continua} \\ \text{con } h \le f}} \operatorname{epi}(h)$$

dado que h es continua, $\operatorname{epi}(h)$ es cerrado y dado que h es afín, $\operatorname{epi}(h)$ es convexo.
Por lo hecho, $\operatorname{epi}(g)$ es una intersección de convexos cerrados, lo que implica que $\operatorname{epi}(g)$ es convexo y cerrado. En particular, g es convexa y semicontinua inferior, y en consecuencia f lo es.

b) Dado que $\operatorname{epi}(f)$ es un conjunto cerrado, convexo y no vacío de $\mathbf{E}\times\mathbb{R}$, por el Teorema de Hahn-Banach Geométrico (Corolario 3.2.1) existen $(\ell,s)\in(\mathbf{E}\times\mathbb{R})^*\cong\mathbf{E}^*\times\mathbb{R}$ y $\alpha\in\mathbb{R}$ tales que
$$\ell(\bar{x})+s\bar{z}<\alpha\leq\ell(x)+sz,\qquad\forall\,(x,z)\in\operatorname{epi}(f).\tag{10.4}$$
Dado que $(\bar{x},\bar{z})\notin\operatorname{epi}(f)$, necesariamente
$$f(\bar{x})>\bar{z}.$$
Luego, evaluando (10.4) en $x=\bar{x}$ y $z=f(\bar{x})$ se obtiene que
$$s(f(\bar{x})-\bar{z})>0\quad\Longrightarrow\quad s>0.$$
Dividiendo (10.4) por $s>0$ y renombrando $\frac{1}{s}\ell$ como ℓ se obtiene la desigualdad pedida. Notemos que $h(x)=\ell(-x)+\alpha$ es afín continua y $h\leq f$, luego el conjunto
$$H=\{h:\mathbf{E}\to\mathbb{R}\text{ es afín continua con }h\leq f\}$$
es no vacío y como por definición
$$h(x)\leq f(x),\qquad\forall\,h\in H,\ \forall\,x\in\mathbf{E}$$
se tiene que el supremo en la definición de g es finito y siempre está acotado superiormente por f.

c) Notemos que $(\bar{x},f(\bar{x})-\varepsilon)\notin\operatorname{epi}(f)$ para todo $\varepsilon>0$. Luego por la parte anterior se tiene que existe $\ell\in\mathbf{E}^*$ y $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que
$$\ell(\bar{x})+f(\bar{x})-\varepsilon<\alpha\leq\ell(x)+f(x),\qquad\forall\,x\in\mathbf{E}.$$
Definiendo $h(x)=\ell(-x)+\alpha$ se obtiene lo pedido.

□

10.2.2 Problema 2 - Certamen 1 - 2019

a) σ es positivamente homogénea pues para todo $\lambda>0$
$$\sigma(\lambda x)=\sup\{\ell(\lambda x)\mid\ell\in D\}=\lambda\sup\{\ell(x)\mid\ell\in D\}$$
pues cada $\ell\in D$ es lineal. Además, es sublineal ya que
$$\sigma(x+y)=\sup\{\ell(x+y)\mid\ell\in D\}=\sup\{\ell(x)+\ell(y)\mid\ell\in D\}\leq\sigma(x)+\sigma(y)$$
Por lo tanto, σ es sublineal. Más aún, como D es no vacío, entonces $\sigma(x)>-\infty$ y como D es acotado en $\mathbf{E}^*$, para todo $x\in\mathbf{E}$ se tiene que
$$\sigma(x)=\sup\{\ell(x)\mid\ell\in D\}\leq\sup\{\|\ell\|_{\mathbf{E}^*}\|x\|_{\mathbf{E}}\mid\ell\in D\}\leq\underbrace{\sup_{\ell\in D}\|\ell\|_{\mathbf{E}^*}}_{<+\infty}\|x\|_{\mathbf{E}}$$
Dado que $\sigma(0)=0$ (pues $\sigma(0)=\lambda\sigma(0)$ para todo $\lambda>0$) tenemos que σ es continua en $x=0$. Ahora bien para todo $x,y\in\mathbf{E}$ se tiene que $\sigma(x)\leq\sigma(x-y)+\sigma(y)$, con lo cual
$$\sigma(x)-\sigma(y)\leq\sigma(x-y)\leq c\|x-y\|_{\mathbf{E}}.$$
Intercambiando los roles de x e y se obtiene que
$$|\sigma(x)-\sigma(y)|\leq c\|x-y\|_{\mathbf{E}}$$
y así, σ es continua.

b) Siguiendo la indicación, notemos que

$$\ell_0(tx_0) = \sigma(tx_0), \quad \text{si } t > 0$$

$$\ell_0(tx_0) = -\sigma(-tx_0), \quad \text{si } t < 0$$

pero como $0 = \sigma(tx_0 - tx_0) \leq \sigma(tx_0) + \sigma(-tx_0)$, entonces

$$-\sigma(-tx_0) \leq \sigma(tx_0).$$

Por lo tanto, $\ell_0 \leq \sigma$ en $\mathbf{E}_0$.
Como σ es sublineal y continua, se tiene que existe $\ell \in \mathbf{E}^*$ tal que $\ell|_{\mathbf{E}_0} = \ell_0$ y $\ell \leq \sigma$ en $\mathbf{E}$ gracias al Teorema de Hahn-Banach Analítico; notar que $|\ell(x)| \leq \sigma(x)$ para todo $x \in \mathbf{E}$. En particular, D es no vacío, y por lo tanto para todo $x \in \mathbf{E}$,

$$\sup\{\ell(x) \mid \ell \in D\} \leq \sigma(x)$$

Además, $\ell(x_0) = \ell_0(x_0) = 1\sigma(x_0) = \sigma(x_0)$, por lo tanto, como $x_0 \in \mathbf{E}$ es arbitrario se concluye que para todo $x \in \mathbf{E}$, $\sup\{\ell(x) \mid \ell \in D\} = \sigma(x)$.

c) Basta notar que

$$D = \bigcap_{x \in \mathbf{E}} \underbrace{\{\ell \in \mathbf{E}^* \mid \ell(x) \leq \sigma(x)\}}_{\text{cerrado y convexo en } \mathbf{E}^*}$$

d) Dado que σ es continua en $x = 0$, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|x\|_{\mathbf{E}} \leq \delta$ implica que

$$|\sigma(x)| \leq \varepsilon.$$

Tomando $\varepsilon = 1$ se tiene que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|\sigma(x)| \leq 1, \qquad \forall\, x \in \mathbf{E} \text{ con } \|x\|_{\mathbf{E}} \leq \delta_1.$$

Si $x \in \mathbf{E} \setminus \{0\}$ con $\|x\|_{\mathbf{E}} \leq 1$, entonces $\dfrac{\delta_1 x}{\|x\|_{\mathbf{E}}} \in \overline{\mathbb{B}(0, \delta_1)}$, lo cual implica que

$$\left| \sigma\left(\frac{\delta_1 x}{\|x\|_{\mathbf{E}}} \right) \right| \leq 1,$$

y así

$$|\sigma(x)| \leq \frac{1}{\delta_1} \|x\|_{\mathbf{E}} \leq \frac{1}{\delta_1},$$

de donde tomando $c = \dfrac{1}{\delta_1}$ se tiene lo pedido.
Finalmente, sea $\ell \in D$, entonces

$$\ell(x) \leq \sigma(x) \quad \text{ y } \quad -\ell(x) \leq \sigma(-x),$$

con lo que

$$|\ell(x)| \leq c, \qquad \forall\, x \in \mathbf{E}, \text{ con } \|x\|_{\mathbf{E}} \leq 1$$

de donde

$$\|\ell\|_{\mathbf{E}^*} \leq c, \qquad \forall\, \ell \in D.$$

Por lo tanto, D es acotado.

$\square$

10.2.3 Problema 3 - Certamen 1 - 2019

a) Supongamos por contradicción que no se satisface (10.3), en particular se tiene que para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $\tilde{x}_k \in \mathbf{E}$ tal que

$$(k+1)\left(\|L(\tilde{x}_k)\|_{\mathbf{F}} + \|\tilde{x}_k\|\right) < \|\tilde{x}_k\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

en particular $\tilde{x}_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, luego definiendo $x_k = \frac{\tilde{x}_k}{\|\tilde{x}_k\|_{\mathbf{E}}}$ se obtiene lo pedido.

b) Como L es sobreyectivo, por el Teorema de la Aplicación Abierta, existe $r > 0$ tal que

$$\mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0,r) \subseteq L(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1)).$$

Notemos que $(k+1)rL(x_k) \in \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0,r)$, luego existe $\tilde{y}_k \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1)$ tal que

$$(k+1)rL(x_k) = L(\tilde{y}_k), \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Llamando $y_k = \dfrac{\tilde{y}_k}{(k+1)r}$ se tiene que $L(x_k) = L(y_k)$ con $\|y_k\|_{\mathbf{E}} < \dfrac{1}{(k+1)r}$.
Por otro lado, $z_k = x_k - y_k \in \ker(L)$ y

$$\left|\|x_k\|_{\mathbf{E}} - \|y_k\|_{\mathbf{E}}\right| \leq \|z_k\|_{\mathbf{E}} \leq \|x_k\|_{\mathbf{E}} + \|y_k\|_{\mathbf{E}},$$

lo que implica que $\|z_k\|_{\mathbf{E}} \to 1$.

c) Dado que

$$\|y_k\| \leq m\|y_k\|_{\mathbf{E}} \leq \frac{m}{(k+1)r} \quad \text{y} \quad \|x_k\| < \frac{1}{k+1}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

tenemos que $\|z_k\| = \|x_k - y_k\| \leq \|x_k\| + \|y_k\|$, lo cual implica que

$$\|z_k\| \to 0 \quad \text{y} \quad \|z\|_{\mathbf{E}} \to 1, \tag{10.5}$$

sin embargo, las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$ son equivalentes en $\ker(L)$, pues este es un espacio de dimensión finita. Luego (10.5) no puede ocurrir y por lo tanto obtenemos una contradicción.

10.2.4 Problema 1 - Certamen 1 - 2020

a) 1) Notemos que por hipótesis el conjunto

$$\{m \in M \mid m \succeq x\} \neq \emptyset, \qquad \forall\, x \in \mathbf{E}$$

Esto implica que $p(x) < +\infty$ para todo $x \in \mathbf{E}$. Por otro lado, dado que $-x \in \mathbf{E}$, por hipótesis existe $\tilde{m} \in M$ tal que $-x \preceq \tilde{m}$. Además, por (A1) se tiene que $0 \preceq \tilde{m} + x$ y posteriormente

$$-\tilde{m} \preceq x.$$

Sea $m \in M$ tal que $m \succeq x$, luego sigue que $0 \preceq m + \tilde{m}$ (Por transitividad junto con (A1)). Dado que ℓ_0 es positivo en $M \cap P$ y $m + \tilde{m} \in M \cap P$, tenemos que $\ell_0(m + \tilde{m}) \geq 0$, con lo cual

$$\ell_0(m) \geq \ell_0(-\tilde{m}), \qquad \forall\, m \in M \text{ tal que } m \succeq x,$$

de ahí que $p(x) \geq \ell_0(-\tilde{m})$ y por lo tanto $p : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ es una función bien definida. Veamos ahora que es sublineal.

i) Subaditiva. Sean $x, y \in \mathbf{E}$ y $m_x, m_y \in M$ tales que

$$x \preceq m_x \quad \text{e} \quad y \preceq m_y$$

de donde por (A1) se tiene que

$$x+y \preceq m_x + y \quad \text{y} \quad m_x + y \preceq m_x + m_y,$$

de ahí que, por transitividad

$$x+y \preceq m_x + m_y$$

lo cual implica que

$$p(x+y) \leq \ell_0(m_x + m_y) = \ell_0(m_x) + \ell_0(m_y),$$

tomando ínfimo sobre m_x y m_y se obtiene que

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \qquad \forall\, x, y \in \mathbf{E}$$

ii) Positivamente homogénea. Sea $\lambda > 0$ y $x \in \mathbf{E}$. Notemos que por (A2) tenemos que

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \operatorname{ínf}\{\ell_0(y) \mid y \in M,\ y \succeq \lambda x\} \\ &= \operatorname{ínf}\left\{\ell_0(y) \mid y \in M,\ \tfrac{1}{\lambda} y \succeq x\right\} \\ &= \operatorname{ínf}\left\{\lambda \ell_0\left(\tfrac{1}{\lambda} y\right) \mid y \in M,\ \tfrac{1}{\lambda} y \succeq x\right\} \\ &= \lambda \operatorname{ínf}\left\{\ell_0\left(\tfrac{1}{\lambda} y\right) \mid y \in M,\ \tfrac{1}{\lambda} y \succeq x\right\} \end{aligned}$$

Usando un cambio de variables y el hecho de que M es un s.e.v. de $\mathbf{E}$, obtenemos que

$$\operatorname{ínf}\left\{\ell_0\left(\tfrac{1}{\lambda} y\right) \mid y \in M,\ \tfrac{1}{\lambda} y \succeq x\right\} = p(x)$$

y así

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \qquad \forall\, \lambda > 0 \text{ y } x \in \mathbf{E}.$$

2) Notemos que si $x \in M$, entonces $p(x) \leq \ell_0(x)$. Por otro lado, si $y \in M$ con $y \succeq x$, entonces por (A1) tenemos que $y - x \succeq 0$. Dado que $y - x \in M$, tenemos que $\ell_0(y) - \ell_0(x) = \ell_0(y-x) \geq 0$, lo que implica que

$$\ell_0(y) \geq \ell_0(x), \qquad \forall\, y \in M \text{ que verifica } y \succeq x,$$

de donde $p(x) \geq \ell_0(x)$, es decir, $p(x) = \ell_0(x)$ para todo $x \in M$. Luego por el Teorema de Hahn-Banach Analítico, existe $\ell : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ lineal tal que $\ell(x) \leq p(x)$ para todo $x \in \mathbf{E}$ con $\ell|_M = \ell_0$. Resta ver que ℓ es positivo en P. Sea $x \in P$, luego, teniendo en cuenta (A1) se sigue que

$$\ell(-x) \leq p(-x) = \operatorname{ínf}\{\ell_0(y) \mid y \in M, y \succeq -x\} = \operatorname{ínf}\{\ell_0(y) \mid y \in M, y + x \succeq 0\} \leq \ell_0(0) = 0.$$

Por lo tanto $\ell(x) = -\ell(-x) \geq 0$

b) 1) Sea $x_0 \in M \cap \operatorname{int}(P)$, luego, existe $r > 0$ tal que
$$\mathbb{B}(x_0, r) \subseteq P.$$
Sea $x \in \mathbf{E} \setminus M$ (si $x \in M$, basta tomar $m = x$), sigue que
$$x_0 - \frac{r}{2}\frac{(x - x_0)}{\|x - x_0\|_{\mathbf{E}}} \in \mathbb{B}(x_0, r)$$
pues $\|x - x_0\|_{\mathbf{E}} > 0$ pues $x_0 \in M$. De ahí que
$$x_0 - \frac{r}{2}\frac{(x - x_0)}{\|x - x_0\|_{\mathbf{E}}} \succeq 0$$
y por (A2) se tiene que
$$\left(\frac{2\|x - x_0\|_{\mathbf{E}}}{r} + 1\right) x_0 - x \succeq 0 \tag{10.6}$$
y de (A1) se sigue que
$$\left(\frac{2\|x - x_0\|_{\mathbf{E}}}{r} + 1\right) x_0 \succeq x.$$
Dado que $x_0 \in M$ y M es un s.e.v. tenemos que $m = \left(\frac{2\|x - x_0\|_{\mathbf{E}}}{r} + 1\right) x_0 \in M$ y $m \succeq x$.

2) Combinando a)2) y b)1) tenemos que existe $\ell : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ lineal, positiva en P tal que $\ell|_M = \ell_0$. Para concluir resta ver la continuidad de ℓ. Notemos que por (10.6) tenemos que para todo $x \in \mathbf{E}$
$$\ell(x - x_0) \leq \ell\left(\frac{2\|x - x_0\|_{\mathbf{E}}}{r} x_0\right) = \frac{2\ell(x_0)}{r}\|x - x_0\|_{\mathbf{E}}.$$
Por lo tanto, ℓ es continua en x_0, luego ℓ es continua, es decir, $\ell \in \mathbf{E}^*$.

$\square$

10.2.5 Problema 2 - Certamen 1 - 2020

a) 1) Veamos que si $A \subseteq M$ es ε-separado maximal, entonces A es una ε-red en M. En efecto, razonemos por contradicción. Supongamos que A no es una ε-red en M, entonces existe $\tilde{x} \in M$ tal que para todo $y \in A$
$$\|\tilde{x} - y\|_{\mathbf{E}} \geq \varepsilon,$$
luego $\tilde{A} = A \cup \{\tilde{x}\}$ es ε-separado lo cual contradice la maximalidad de A

2) Sea $N \subseteq \mathbf{E}$ ε-separado maximal en $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1)}$, veremos que $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1-\varepsilon)} \subseteq \overline{\operatorname{conv}(N)}$. En efecto, por contradicción, supongamos que existe $x \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1-\varepsilon)} \setminus \overline{\operatorname{conv}(N)}$. Luego por el Teorema de Hahn-Banach Geométrico (Corolario 3.2.1), existe $f \in \mathbf{E}^* \setminus \{0\}$ tal que
$$f(y) < f(x), \qquad \forall\, y \in \overline{\operatorname{conv}(N)}$$
y sin perdida de generalidad podemos considerar $\|f\|_{\mathbf{E}^*} = 1$. Tomando supremo sobre la desigualdad anterior,
$$\sup_{w \in N} f(w) = \sup_{w \in \overline{\operatorname{conv}(N)}} f(w) < f(x)$$

Como $\|f\|_{\mathbf{E}^*} = 1$, entonces para $\delta > 0$, existe $y \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1)}$ tal que $f(y) > 1 - \delta$. Además, como N es maximal (en el sentido de la inclusión) entonces por a)1), N es una ε-red, de donde existe $z \in N$ tal que

$$\varepsilon > \|y - z\| \geq f(y) - f(z).$$

Luego,

$$\sup_{w \in N} f(w) \geq f(z) > f(y) - \varepsilon > 1 - \delta - \varepsilon,$$

de esta desigualdad se tiene para todo $\delta > 0$, luego tomando $\delta \to 0$

$$1 - \varepsilon \leq \sup_{w \in N} f(w) < f(x) < \|x\| \leq 1 - \varepsilon$$

y se tiene una contradicción.

b) 1) Primero veamos que A, B son convexos disjuntos. Claramente A es convexo, en efecto sean

$$x^1 = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i^1 e_i, \quad x^2 = \sum_{i=1}^{n_2} \alpha_i^2 e_i,$$

y sea $\lambda \in [0,1]$, luego (sin perder generalidad $n_1 \geq n_2$ y consideramos $\alpha_i^2 = 0$ para los índices $i > n_2$)

$$\begin{aligned} x_\lambda &= \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2 \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i^1 e_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{n_2} \alpha_i^2 e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \underbrace{(\lambda \alpha_i^1 + (1-\lambda)\alpha_i^2)}_{\in \mathbb{R}\ \forall\ i=1,\ldots,n_1} e_i \end{aligned}$$

y para $i = n_1$ se tiene que $\lambda \alpha_{n_1}^1 + (1-\lambda)\alpha_{n_1}^2 = \lambda \alpha_{n_1}^1 > 0$ (en caso de que $n_1 = n_2$ también se tiene que $\lambda \alpha_{n_1}^1 + (1-\lambda)\alpha_{n_1}^2 > 0$). Por lo tanto $x_\lambda \in A$.
Claramente A y B son disjuntos, puesto que si existiese $\tilde{x} \in A \cap B$, entonces $\alpha_n > 0$ y $\alpha_n < 0$ lo que sería una contradicción.
Ahora veamos que no existe funcional lineal continuo no nulo que los separe. En efecto, razonemos por contradicción. Sea $x^* \in \mathbf{E}^* \setminus \{0\}$. Veamos que $x^*(A) = \mathbb{R}$. Como $x^* \neq 0$, existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x^*(e_{k_0}) \neq 0$. Luego, para $t \in \mathbb{R}$, $x_t := te_{k_0} + e_{k_0+1} \in A$ (pues $\alpha_{k_0+1}^{x_t} = 1 > 0$) y, por lo tanto

$$x^*(x_t) = x^*(te_{k_0} + e_{k_0+1}) \in x^*(A).$$

Luego $tx^*(e_{k_0}) + x^*(e_{k_0+1}) \in x^*(A)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Pero como A es convexo, entonces $x^*(A) \subseteq \mathbb{R}$ es convexo en $\mathbb{R}$ y usando que $x^*(e_{k_0}) \neq 0$, tomando $t \nearrow +\infty$ y $t \searrow -\infty$ se tiene que $x^*(A)$ es no acotado, con lo cual $x^*(A) = \mathbb{R}$. Luego, $x^*(A) = x^*(B) = \mathbb{R}$ y por lo tanto no existe un funcional lineal continuo que los separe.

2) El Teorema de Hahn-Banach Geométrico es no aplicable en este caso, ya que $\operatorname{int}(A) = \emptyset$. Basta considerar cualquier punto x_0 en A, y ver que para cualquier bola $\mathbb{B}(x_0, \delta)$ uno puede construir una sucesión de puntos con $\alpha_n^{x_0} \searrow 0$, y luego $\mathbb{B}(x_0, \delta) \not\subseteq A$ lo cual implica que $\operatorname{int}(A) = \emptyset$.

10.2.6 Problema 2 - Certamen 1 - 2021

1. Veamos primero que $\operatorname{im}(A^*) \subseteq \ker(A)^\perp$. Sea $\varphi \in \operatorname{im}(A^*)$, entonces existe $\ell \in \mathbf{F}^*$ tal que $\varphi \equiv A^*(\ell)$. Por la definición de operador adjunto tenemos que

$$\langle \varphi, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle A^*(\ell), x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle \ell, A(x)\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}, \quad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Notemos que si $x \in \ker(A)$, entonces

$$\langle \varphi, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle \ell, 0\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} = 0,$$

con lo cual se concluye $\varphi \in \ker(A)^\perp$.
Tomemos ahora $\varphi \in \ker(A)^\perp$ y un mapeo $\ell_0\colon \operatorname{im}(A) \to \mathbb{R}$ que satisface

$$\ell_0(A(x)) = \langle \varphi, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Notemos lo siguiente: si $x, y \in \mathbf{E}$ son tales que $A(x) = A(y)$, entonces $x - y \in \ker(A)$, con lo cual

$$\langle \varphi, x - y\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 0,$$

y por ende

$$\begin{aligned}\ell_0(A(x)) = \langle \varphi, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} &= \langle \varphi, x - y + y\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \\ &= \langle \varphi, x - y\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} + \langle \varphi, y\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \ell_0(A(y)).\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $z \in \operatorname{im}(A)$, $\ell_0(z)$ no depende del representante $x \in \mathbf{E}$ que cumpla $z = A(x)$, y se concluye que ℓ_0 está únicamente determinado.
Por último, sean $z_1, z_2 \in \operatorname{im}(A)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Existen $x_1, x_2 \in \mathbf{E}$ tales que $z_1 = A(x_1)$ y $z_2 = A(x_2)$, con lo cual

$$\ell_0(z_1 + \lambda z_2) = \ell_0(A(x_1) + \lambda A(x_2)) = \ell_0(A(x_1 + \lambda x_2)) = \langle \varphi, x_1 + \lambda x_2\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}$$

$$\begin{aligned}\implies \qquad \ell_0(z_1 + \lambda z_2) &= \langle \varphi, x_1\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} + \lambda \langle \varphi, x_2\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \\ &= \ell_0(A(x_1)) + \lambda \ell_0(A(x_2)) = \ell_0(z_1) + \lambda \ell_0(z_2).\end{aligned}$$

2. En el ítem anterior vimos que ℓ_0 es lineal, con lo cual basta con encontrar $c > 0$ tal que

$$|\ell_0(z)| \leq c\, \|z\|_{\mathbf{F}}, \qquad z \in \operatorname{im}(A)\backslash\{0\}.$$

Note que $\operatorname{im}(A)$ es sub-espacio vectorial cerrado de $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$, que es un espacio de Banach. Luego, $(\operatorname{im}(A), \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ también es un espacio de Banach. Como $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach y $A\colon \mathbf{E} \to \operatorname{im}(A)$ es sobreyectiva (por definición), existe $r > 0$ tal que

$$\mathbb{B}_{\operatorname{im}(A)}(0, r) \subseteq A(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0, 1)).$$

Sea $z \in \operatorname{im}(A)\backslash\{0\}$, luego

$$|\ell_0(z)| = \frac{2\|z\|_{\mathbf{F}}}{r} \left| \ell_0\left(\frac{r}{2\|z\|_{\mathbf{F}}} z\right) \right| = \frac{2\|z\|_{\mathbf{F}}}{r} |\ell_0(A(b))|,$$

para algún $b \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1)$ que sabemos existe pues $\dfrac{r\,z}{2\|z\|_F} \in \mathbb{B}_{\mathrm{im}(A)}(0,r)$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}|\ell_0(z)| = \frac{2}{r}\,\|z\|_{\mathbf{F}}\,|\ell_0(A(b))| &= \frac{2}{r}\,\|z\|_{\mathbf{F}}\,|\langle\varphi,b\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| \\ &\leq \frac{2}{r}\,\|z\|_{\mathbf{F}}\|\varphi\|_{\mathbf{E}^*}\|b\|_{\mathbf{E}} \leq \frac{2}{r}\,\|\varphi\|_{\mathbf{E}^*}\|z\|_{\mathbf{F}},\end{aligned}$$

con lo cual, basta tomar $c = \dfrac{2}{r}\|\varphi\|_{\mathbf{E}^*}$ (que no depende de z) y se concluye.

3. Dado que $\mathrm{im}(A)$ es un sub-espacio vectorial de $\mathbf{F}$, y ℓ_0 es lineal continua, por el Teorema de Hahn-Banach analítico (Corolario 2.3.1), existe $\ell \in \mathbf{F}^*$ tal que $\ell|_{\mathrm{im}(A)} = \ell_0$.
   Finalmente, por definición de operador adjunto tenemos que

$$\begin{aligned}\langle A^*(\ell),x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle \ell, A(x)\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} = \ell(A(x)) &= \ell|_{\mathrm{im}(A)}(A(x)) \\ &= \ell_0(A(x)) = \langle\varphi,x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\end{aligned}$$

   para todo $x \in \mathbf{E}$. Por lo tanto,

$$\langle A^*(\ell),x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle\varphi,x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}$$

   y por ende $\varphi = A^*(\ell)$, con lo cual se concluye $\varphi \in \mathrm{im}(A^*)$

10.2.7 Problema 3 - Certamen 1 - 2021

Probemos la indicación.

- A es convexo : Sean $(x_1,z_1),(x_2,z_2) \in A$ y $\lambda \in [0,1]$. Luego

$$\begin{aligned}f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &\leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \\ &< \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2,\end{aligned}$$

  por lo cual,

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)z_2,\ \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2) = \lambda(x_1,\ z_1) + (1-\lambda)(x_2,\ z_2) \in A.$$

- B es convexo : Sean $x_1,x_2 \in \mathbf{E}$ y $\lambda \in [0,1]$. Luego

$$A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda A(x_1) + (1-\lambda)A(x_2),$$

  y también

$$\begin{aligned}&f(A(x_0)) + \langle\varphi, \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - x_0\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \\ &= f(A(x_0)) + \lambda\langle\varphi,x_1-x_0\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} + (1-\lambda)\langle\varphi,x_2-x_0\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \\ &= \lambda\left(f(A(x_0)) + \langle\varphi,x_1-x_0\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\right) + (1-\lambda)\left(f(A(x_0)) + \langle\varphi,x_2-x_0\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\right)\end{aligned}$$

  de lo cual se concluye directamente que B es convexo.

Notemos que A es abierto y no vacío pues f es continua. Además, B es no vacío por construcción. Falta ver que $A \cap B = \emptyset$, para lo cual supongamos que existe $y \in A \cap B$. Luego, $f(y) < z$ y existe $x \in \mathbf{E}$ tal que

$$y = A(x) \qquad \text{y} \qquad z = f(A(x_0)) + \langle\varphi, x - x_0\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}},$$

lo cual implica

$$f(A(x)) < f(A(x_0)) + \langle \varphi, x - x_0 \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}$$

y por lo tanto se tiene una contradicción. Se concluye entonces que $A \cap B = \emptyset$.

Luego, por Teorema de Hahn-Banach geométrico (primera versión), existe $-L \in (\mathbf{F} \times \mathbb{R})^*$ no nula tal que

$$L(y,z) \leq L\left(A(x)\ ,\ f(A(x_0)) + \langle \varphi, x - x_0 \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\right), \quad \forall (y,z) \in A,\ \forall x \in \mathbf{E}. \tag{10.7}$$

Notemos que

$$L(y,z) = L(y,0) + z\, L(0,1), \qquad \forall y \in \mathbf{E},\ \forall z \in \mathbb{R}.$$

Denotemos por $\ell := L(\cdot, 0)$ y por $r := L(0,1)$. Luego, (10.7) puede escribirse como

$$\ell(y) + rz \leq \ell(A(x)) + r\left(f(A(x_0)) + \langle \varphi, x - x_0 \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\right) \quad \forall x \in \mathbf{E},\ \forall (y,z) \in A. \tag{10.8}$$

Dado que $f(y) < z$ para todo $(y,z) \in A$, podemos acotar la desigualdad anterior por abajo y obtenemos

$$\ell(y - A(x)) \leq r(f(A(x_0)) + \langle \varphi, x - x_0 \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} - f(y)), \quad \forall x \in \mathbf{E},\ \forall y \in \mathbf{F}. \tag{10.9}$$

Evaluando (10.8) en $x = x_0$, $y = A(x_0)$ y $z = f(A(x_0) + 1$ obtenemos que $r \leq 0$.

Veamos que $r \neq 0$. Si $r = 0$, entonces

$$\ell(y) \leq \ell(A(x)), \qquad \forall x \in \mathbf{E}, \forall y \in \mathbf{F}$$

y evaluando en $x = x_0$ se tiene $\ell(y) \leq \ell(A(x))$, para todo $y \in \mathbf{F}$. Lo cual tiene como consecuencia que $\ell \equiv 0$, pues de no ser así existiría $\bar{y} \in \mathbf{F}$ tal que $\ell(\bar{y}) > 0$ (s.p.g.), con lo cual

$$t\ell(\bar{y}) = \ell(t\,\bar{y}) \leq \ell(A(x_0)), \qquad \forall t > 0,$$

y se tendría entonces $\ell(A(x_0)) = +\infty$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $\ell \equiv 0$, lo cual no es posible y por ende se debe tener $r < 0$.

Reescalando se puede asumir $r = -1$, con lo cual (10.9) quedaría

$$\ell(y - A(x)) \leq f(y) - \left(f(A(x_0)) + \langle \varphi, x - x_0 \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\right), \quad \forall x \in \mathbf{E},\ \forall y \in \mathbf{F}$$

y evaluando en $x = x_0$ obtenemos

$$f(A(x_0)) + \ell(y - A(x_0)) \leq f(y), \qquad \forall y \in F.$$

Notemos que por la continuidad de L, ℓ también es continua, por lo cual $\ell \in \mathbf{F}^*$.

Resta ver que $\varphi = A^*(\ell)$. Evaluando la desigualdad anterior en $y = A(x_0)$, $x = \tilde{x} + x_0$, tenemos que

$$-\ell(A(\tilde{x})) \leq \langle \varphi, \tilde{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \qquad \forall \tilde{x} \in \mathbf{E}$$

$$\iff \quad \langle \varphi, \tilde{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \leq \langle \ell, A(\tilde{x}) \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}, \qquad \forall \tilde{x} \in \mathbf{E}.$$

Reemplazando $\tilde{x}$ por $-x$ se tiene la desigualdad contraria y en conclusión

$$\langle \varphi, \tilde{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle \ell, A(\tilde{x}) \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}, \qquad \forall \tilde{x} \in \mathbf{E},$$

por lo que finalmente se obtiene $\varphi = A^*(\ell)$.

10.2.8 Problema 4 - Certamen 1 - 2021

Veamos que
$$\mathrm{gr}(T) = \{(x, T(x)) \in \mathbf{E} \times \mathbf{F} \mid x \in \mathbf{E}\}$$
es cerrado en $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$, con lo cual será posible concluir directamente del Teorema del Grafo Cerrado que T es acotado ya que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ son espacios de Banach. Sea $\{(x_k, T(x_k))\}_{k\in\mathbb{N}}$ sucesión convergente a $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{E} \times \mathbf{F}$. Note que
$$\langle \ell, T(x_k)\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} = \langle S(\ell), x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \qquad \forall \ell \in \mathbf{F}^*$$
y tomando límite con $k \to +\infty$ se obtiene
$$\langle \ell, \bar{y}\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} = \langle S(\ell), \bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle \ell, T(\bar{x})\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}, \qquad \forall \ell \in \mathbf{F}^*.$$
Por lo tanto,
$$\bar{y} - T(\bar{x}) \in (\mathbf{F}^*)^{\perp} = \{0\}$$
y por ende $\bar{y} = T(\bar{x})$, con lo cual se concluye que $G(T)$ es cerrado.

Luego, T es continuo y por ende acotado.

Dado que $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, su operador adjunto $T^* \in \mathscr{L}C(\mathbf{F}^*, \mathbf{E}^*)$ está únicamente determinado y satisface la ecuación
$$\langle T^*\ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle \ell, T(x)\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} = \langle S(\ell), x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \quad \forall x \in \mathbf{E},\ \forall \ell \in \mathbf{F}^*.$$
Por lo tanto, $S \equiv T^*$ y se obtiene $S \in \mathscr{L}C(\mathbf{F}^*, \mathbf{E}^*)$ con lo cual es acotado.

10.2.9 Problema 5 - Certamen 1 - 2021

1. Notemos que
$$\|A^{**}(J_x)\|_{\mathbf{F}^{**}} = \sup_{\|\ell\|_{\mathbf{F}^*}\le 1} |\langle A^{**}(J_x), \ell\rangle_{\mathbf{F}^{**},\mathbf{F}^*}| = \sup_{\|\ell\|_{\mathbf{F}^*}\le 1} |\langle J_x, A^*(\ell)\rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}|,$$
pero
$$\langle J_x, A^*(\ell)\rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}} = \langle A^*(\ell), x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle \ell, A(x)\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}},$$
por lo tanto
$$\|A^{**}(J_x)\|_{\mathbf{F}^{**}} = \sup_{\|\ell\|_{\mathbf{F}^*}\le 1} |\langle \ell, A(x)\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}| = \|A(x)\|_{\mathbf{F}},$$
donde la última igualdad es gracias al Teorema de Hahn-Banach analítico (Corolario 2.3.4). Por otra parte, los espacios $\mathbf{E}^*$ y $\mathbf{F}^*$ son de Banach (incluso si $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ son e.v.n.).
Luego, usando el Teorema con A^* en lugar de A, tenemos que A^* es sobreyectiva si y sólo si $\exists\, c > 0$ tal que $\|\varphi\|_{\mathbf{E}^{**}} \le c\|A^{**}(\varphi)\|_{\mathbf{F}^{**}}$ para todo $\varphi \in \mathbf{E}^{**}$.
Por lo tanto, si A^* es sobreyectiva, tenemos que $\exists\, c > 0$ tal que
$$\|J_x\|_{\mathbf{E}^{**}} \le c\|A^{**}(J_x)\|_{\mathbf{F}^*}, \qquad \forall x \in \mathbf{E},$$
pues $J_x \in E^{**}$, para todo $x \in \mathbf{E}$. Finalmente, considerando la igualdad de normas obtenida anteriormente se concluye
$$\|x\|_{\mathbf{E}} = \|J_x\|_{\mathbf{E}^{**}} \le c\|A(x)\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

2. Tenemos que $\exists\, c > 0$ tal que $\|x\|_{\mathbf{E}} \leq c\|A(x)\|_{\mathbf{F}}$, para todo $x \in \mathbf{E}$. Veremos que $\mathrm{im}(A)$ es cerrado, para lo cual sea $\{A(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{im}(A)$ tal que $A(x_k) \longrightarrow \bar{y}$.
   Se tendrá entonces que

$$\|x_k - x_j\|_{\mathbf{E}} \leq \|A(x_k) - A(x_j)\|_{\mathbf{F}}, \quad \forall k, j \in \mathbb{N}.$$

   Como $\{A(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente, en particular es de Cauchy y por ende $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ también lo es. Como $\mathbf{E}$ es un espacio de Banach, entonces $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a algún $\bar{x} \in \mathbf{E}$, y por continuidad de A

$$A(x_k) \longrightarrow A(\bar{x}) \quad \Longrightarrow \quad \bar{y} = A(\bar{x}),$$

   con lo cual, $\mathrm{im}(A)$ es cerrado.
   Finalmente, como $\mathrm{im}(A)$ es cerrado, por P2 se tiene que $\mathrm{im}(A^*) = \ker(A)^{\perp}$. Notemos que $\ker(A) = \{0\}$ pues si $x \in \ker(A)$ entonces

$$\|x\|_{\mathbf{E}} \leq c\|A(x)\|_{\mathbf{F}} = 0$$

   con lo cual $x = 0$. Se concluye entonces que $\mathrm{im}(A^*) = \ker(A)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = \mathbf{E}^*$ y por ende A^* es sobreyectiva.

10.2.10 Problema 6 - Certamen 1 - 2021

Sea $\mathscr{H} = \{h \in \mathscr{C}(\mathbf{X}\times\mathbf{Y}) \mid \exists f \in \mathscr{C}(\mathbf{X}),\ g \in \mathscr{C}(\mathbf{Y})$ tales que $h = f \cdot g\}$. Es fácil ver que $\mathscr{H}$ contiene a las funciones constantes. Además, es un álgebra puesto que

$$(f_1 \cdot g_1) \cdot (f_2 \cdot g_2) = (f_1 \cdot f_2) \cdot (g_1 \cdot g_2),$$

para todo $f_1, f_2 \in \mathscr{C}(\mathbf{X})$ y $g_1, g_2 \in \mathscr{C}(\mathbf{Y})$, y por álgebra de funciones continuas se tiene que

$$f_1 \cdot f_2 \in \mathscr{C}(\mathbf{X}) \quad \text{y} \quad g_1 \cdot g_2 \in \mathscr{C}(\mathbf{Y}).$$

$\mathscr{H}$ también es separante, pues dados $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ distintos, se tendrá que $x_1 \neq x_2$ o bien $y_1 \neq y_2$. Para el primer caso tomamos

$$h(x,y) = \|x_1 - x\|_{\mathbf{X}}$$

y en el segundo

$$h(x,y) = \|y_1 - y\|_{\mathbf{Y}}$$

y se tendrá que $h(x_1,y_1) = 0 < h(x_2,y_2)$. Finalmente, la conclusión viene del Teorema de Stone-Weiertrass ya que $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ es compacto no vacÃo de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y por ende $\mathscr{H}$ será denso en $\mathscr{C}(\mathbf{X}\times\mathbf{Y})$.

10.2.11 Problema 2 - Examen - 2021

Dado que σ es una función continua, por definición, es fácil ver que F es un s.e.v. de $\mathscr{C}(\mathbf{X})$. Supongamos por contradicción que F no es denso en $(\mathscr{C}(\mathbf{X}), \|\cdot\|_\infty)$. Luego, por el Teorema de Hahn-Banach Geométrico (Corolario 3.2.3) y el Teorema de Riesz-Radon tenemos que existe $\mu \in M(\mathbf{X})\setminus\{0\}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_{\mathbf{X}} \sigma(y_k^{\top} x + \theta_k)\, d\mu(x) = 0, \qquad \forall \alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R},\ \forall \theta_1,\dots,\theta_n \in \mathbb{R},\ \forall y_1,\dots,y_n \in \mathbb{R}^n.$$

En particular, esto implica que

$$\int_{\mathbf{X}} \sigma(y^\top x+\theta)d\mu(x) = 0, \qquad \forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Luego, por la hipótesis sobre σ, tenemos que $\mu = 0$, lo que no puede ser. Por lo tanto F debe ser denso en $(\mathscr{C}(\mathbf{X}), \|\cdot\|_\infty)$.

10.2.12 Problema 3 - Examen - 2021

Fijemos $\bar{x} \in C$ arbitrario y definamos

$$D(\bar{x}) = \{d \in \mathbf{E} \mid \bar{x}+td \in \overline{C},\ \forall t > 0\} = \bigcap_{t>0}\{d \in \mathbf{E} \mid \bar{x}+td \in \overline{C}\}.$$

Claramente $D(\bar{x})$ es un conjunto convexo y cerrado, pues es la intersección arbitraria de conjuntos convexos y cerrados de la forma $\{d \in \mathbf{E} \mid \bar{x}+td \in \overline{C}\}$; dado que C es un conjunto convexo, tenemos que $\overline{C}$ también es un conjuntos convexo.

Además, es directo verificar que si $d \in D(\bar{x})$, entonces $d \in C_\infty$. Luego, para concluir sólo debemos probar la inclusión $C_\infty \subseteq D(\bar{x})$.

Sea $d \in C_\infty$ y supongamos $d \notin D(\bar{x})$, esto implica que $\exists \bar{t} > 0$ tal que $\bar{x}+\bar{t}d \notin \overline{C}$. Luego, por el Teorema de Hahn Banach Geométrico (segunda versión) existen $\ell \in \mathbf{E}^* \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle \ell, \bar{x}+\bar{t}d\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}^*} < \alpha < \langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}^*}, \qquad \forall x \in \overline{C}.$$

Evaluando en $x = \bar{x}$ obtenemos

$$\langle \ell, d\rangle < 0$$

Por otro lado, como $d \in C_\infty$, $\exists x_0 \in C$ tal que

$$x_0 + td \in \overline{C}, \qquad \forall t > 0.$$

En particular, $\langle \ell, x_0\rangle > \alpha$ y tomando $t_0 = \dfrac{\alpha - \langle \ell, x_0\rangle}{\langle \ell, d\rangle}$ tenemos que $x_0 + t_0 d \in \overline{C}$. Sin embargo,

$$\langle \ell, x_0 + t_0 d\rangle = \langle \ell, x_0\rangle + t_0\langle \ell, d\rangle = \alpha,$$

lo que no puede ser. Luego, necesariamente $d \in D(\bar{x})$ y por lo tanto $C_\infty = D(\bar{x})$.

10.2.13 Problema 4 - Examen - 2021

Denotemos por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{E}}$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{F}}$ los productos internos de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$, respectivamente. Además, en adelante hacemos la identificación $\mathbf{E}^* = \mathbf{E}$ y $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}$.

Dado que A es sobreyectivo, gracias al Teorema de la Aplicación Abierta, tenemos que existe $c > 0$ tal que $\|y\|_{\mathbf{F}} \leq c\|A^*(y)\|_{\mathbf{E}}$ para todo $y \in \mathbf{F}$.

$$c^2\|y\|_{\mathbf{F}}^2 \leq \|A^*(y)\|_{\mathbf{F}}^2 = \langle A^*(y), A^*(y)\rangle_{\mathbf{E}} = \langle y, A\circ A^*(y)\rangle_{\mathbf{F}} \leq \|y\|_{\mathbf{F}}\|T(y)\|_{\mathbf{F}}, \qquad \forall y \in \mathbf{F}.$$

Esto implica que $\|T(y)\|_{\mathbf{F}} \geq c\|y\|_{\mathbf{F}}$ para todo $y \in \mathbf{F}$, y en particular T es un operador inyectivo.

Por otro lado, T es autoadjunta, pues $A^{**} = A$ y por lo tanto, cualquiera sean $x, y \in \mathbf{F}$ tenemos

$$\langle (A\circ A^*)^*(y), x\rangle_{\mathbf{F}} = \langle y, A\circ A^*(x)\rangle_{\mathbf{F}} = \langle y, A^{**}\circ A^*(x)\rangle_{\mathbf{F}} = \langle A^*(y), A^*(x)\rangle_{\mathbf{E}} = \langle A^{**}\circ A^*(y), x\rangle_F = \langle T(y), x\rangle_{\mathbf{F}}.$$

Luego sigue que $\|T^*(y)\|_{\mathbf{F}} \geq c\|y\|_{\mathbf{F}}$ para todo $y \in \mathbf{F}$. Luego, por teorema visto en clases tenemos que T es un operador abierto, y por lo tanto sobreyectivo.

II

Topologías Débiles

11. Introducción a topologías débiles

Comenzaremos esta segunda parte del curso introduciendo en general la noción de una topología débil generada a partir de una familia de conjuntos.

11.1 Motivación

Consideremos el siguiente resultado que entrega condiciones necesarias para que la bola unitaria cerrada en un e.v.n. sea un conjunto compacto.

Teorema 11.1.1 — Riesz. Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y que $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1)}$ es compacta, entonces $\mathbf{E}$ es de dimensión finita.

Demostración. Supongamos por contradicción que $\mathbf{E}$ es un espacio vectorial de dimensión infinita. Luego existe $\{\mathbf{E}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una familia de s.e.v. de $\mathbf{E}$ tal que

$$\mathbf{E}_k \subseteq \mathbf{E}_{k+1}, \quad \text{con } \dim(\mathbf{E}_k) = k, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dado que cada $\mathbf{E}_k$ es también un s.e.v. propio de $\mathbf{E}_{k+1}$, por el Lema de Riesz existe una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\|x_k\|_{\mathbf{E}} = 1, \quad x_k \in \mathbf{E}_{k+1} \quad \text{y} \quad \operatorname{dist}(x_k, \mathbf{E}_k) \geq \frac{1}{2}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dado que $x_k \in \mathbf{E}_{k+1} \subseteq \mathbf{E}_{k+j+1}$ para todo $k, j \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\|x_{k+j+1} - x_k\|_{\mathbf{E}} \geq \operatorname{dist}(x_{k+j+1}, \mathbf{E}_{k+j+1}) \geq \frac{1}{2}, \qquad \forall k, j \in \mathbb{N}.$$

Esto implica, que la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ no puede tener subsucesiones convergentes.

Por otro lado, el conjunto $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1)}$ es secuencialmente compacto, pues es compacto y $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. Luego, como $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,1)}$ obtenemos una contradicción. $\square$

En vista del resultado anterior tenemos que si $\mathbf{E}$ es de dimensión infinita y $K \subseteq \mathbf{E}$ es cerrado y acotado.

- K no es necesariamente compacto para la topología de la norma.
- Para que K sea compacto (respecto alguna topología $\mathscr{T}$), necesitamos que $\mathscr{T} \subsetneq \mathscr{T}_{d_{\mathbf{E}}}$, pues mientras menos abiertos tenga una topología, más fácil es que un conjunto sea compacto.

Por ejemplo, si consideramos la topología trivial $\mathscr{T}_{\text{triv}} = \{\emptyset, \mathbf{E}\}$, entonces todo subconjunto de $\mathbf{E}$ es compacto. Cabe entonces preguntarse entonces ¿por qué no usar la topología trivial? La respuesta es que en este caso el dual topológico se vuelve irrelevante con esta topología:

$$\ell : (\mathbf{E}, \mathscr{T}_{\text{triv}}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_{\mathbb{R}}) \text{ es continua} \quad \Longrightarrow \quad \ell \text{ es una función constante}$$

pues $\ell^{-1}(\{\lambda\})$ debe ser cerrado para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y los únicos conjuntos cerrados en $\mathscr{T}_{\text{triv}}$ son $\emptyset$ y $\mathbf{E}$.

Para que el dual topológico no pierda relevancia, necesitamos una topología $\mathscr{T}$ que:

- cumpla
$$\ell \in (\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})^* \quad \Longrightarrow \quad \ell : (\mathbf{E}, \mathscr{T}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_{\mathbb{R}}) \text{ es continua}$$
- contenga al menos los conjuntos de la forma
$$\ell^{-1}(A) := \{x \in \mathbf{E} \mid \langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \in A\}, \qquad \forall \ell \in \mathbf{E}^*,\ \forall A \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto } (A \in \mathscr{T}_{\mathbb{R}}).$$

11.2 Topología débil inducida por subconjuntos

Definición 11.2.1 Supongamos que $\mathbf{X}$ es un conjunto. La **topología débil** inducida por una familia de subconjuntos $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{P}(\mathbf{X})$ es la topología menos fina (con menos abiertos) que contiene a la colección de conjuntos $\mathscr{S}$:

$$\sigma(\mathscr{S}) := \bigcap \{\mathscr{T} \mid \mathscr{T} \text{ es una topología en } \mathbf{X} \text{ tal que } \mathscr{S} \subseteq \mathscr{T}\}.$$

- Notemos que la colección de topologías que contienen a $\mathscr{S}$ es no vacía pues $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{T}_{\text{disc}}$.
- $\sigma(\mathscr{S})$ es efectivamente una topología sobre $\mathbf{X}$:
  - Supongamos que $\{\mathscr{T}_i\}_{i\in I}$ es la colección de todas las topologías que contienen a $\mathscr{S}$, luego $\sigma(\mathscr{S}) = \bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i$.
  - Dado que $\emptyset, \mathbf{X} \in \mathscr{T}_i$ para todo $i \in I$, entonces necesariamente $\emptyset, \mathbf{X} \in \sigma(\mathscr{S})$.
  - Dados $A, B \in \sigma(\mathscr{S})$, tenemos que $A, B \in \mathscr{T}_i$ para todo $i \in I$.
    Cada $\mathscr{T}_i$ es una topología, por lo tanto $A \cap B \in \mathscr{T}_i$ para todo $i \in I$, y en consecuencia $A \cap B \in \sigma(\mathscr{S})$.
  - Dado una colección arbitraria $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \sigma(\mathscr{S})$ tenemos que $A_\alpha \in \mathscr{T}_i$ para todo $i \in I$ y $\alpha \in \Lambda$. Cada $\mathscr{T}_i$ es una topología, por lo tanto $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \in \mathscr{T}_i$ para todo $i \in I$, y en consecuencia $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \in \sigma(\mathscr{S})$.

El siguiente resultado muestra cómo construir una base para una topología débil.

Proposición 11.2.1 Supongamos que $\mathbf{X}$ es un conjunto y $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{P}(\mathbf{X})$ es tal que $\emptyset, \mathbf{X} \in \mathscr{S}$. La familia de conjuntos $\Theta(\mathscr{S})$ formada por la intersección finita de conjuntos en $\mathscr{S}$ es una base para la topología débil $\sigma(\mathscr{S})$. Formalmente,

$$\Theta(\mathscr{S}) := \left\{ A \in \mathscr{P}(\mathbf{X}) \mid \exists m \in \mathbb{N},\ \exists A_0, \ldots, A_m \in \mathscr{S} \text{ tal que } A = \bigcap_{i=0}^{m} A_i \right\}$$

Demostración. Notemos por $\mathscr{T}$ la colección de conjuntos que se escriben como unión arbitraria de conjuntos en $\Theta(\mathscr{S})$, es decir,

$$\mathscr{T} := \left\{ A \in \mathscr{P}(\mathbf{X}) \mid \exists \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \Theta(\mathscr{S}) \text{ tal que } A = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right\}$$

Notemos que si $A_0, \ldots, A_m \in \mathscr{S}$, como $\mathscr{S} \subseteq \sigma(\mathscr{S})$, tenemos que $\bigcap_{i=0}^{m} A_i \in \sigma(\mathscr{S})$, ya que $\sigma(\mathscr{S})$ es una topología. Esto implica que $\Theta(\mathscr{S}) \subseteq \sigma(\mathscr{S})$.

Por otra parte, si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \Theta(\mathscr{S})$, entonces $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \sigma(\mathscr{S})$, ya que $\sigma(\mathscr{S})$ es una topología.

Por lo tanto, $\mathscr{T} \subseteq \sigma(\mathscr{S})$ y luego, para concluir, basta ver que $\mathscr{T}$ es una topología.

- No es difícil ver que $\emptyset$ y $\mathbf{X}$ están $\mathscr{T}$, pues por hipótesis $\emptyset, \mathbf{X} \in \mathscr{S}$.
- Dados $A, B \in \mathscr{T}$, tenemos que $A = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ y $B = \bigcup_{i \in I} B_i$, con $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}, \{B_i\}_{i \in I} \subseteq \Theta(\mathscr{S})$.
  Como $\Theta(\mathscr{S})$ es intersección finita de conjuntos en $\mathscr{S}$, sigue que $A_\alpha \cap B_i \in \Theta(\mathscr{S})$ para todo $(\alpha, i) \in \Lambda \times I$.
  Con esto obtenemos que $A \cap B \in \mathscr{T}$ pues
  $$A \cap B = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \cap B = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \bigcup_{i \in I} A_\alpha \cap B_i = \bigcup_{(\alpha, i) \in \Lambda \times I} A_\alpha \cap B_i.$$
- Dado $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathscr{T}$ tenemos que cada $A_\alpha = \bigcup_{i \in I_\alpha} A_\alpha^i$ con $A_\alpha^i \in \Theta(\mathscr{S})$ para cada $\alpha \in \Lambda$ e $i \in I_\alpha$.
  Notemos que, definiendo $\Gamma = \{(\alpha, i) \mid \alpha \in \Lambda,\ i \in I_\alpha\}$, tenemos
  $$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \bigcup_{i \in I_\alpha} A_\alpha^i = \bigcup_{(\alpha, i) \in \Gamma} A_\alpha^i.$$
  Por lo tanto, $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \mathscr{T}$, ya que $A_\alpha^i \in \Theta(\mathscr{S})$ para todo $(\alpha, i) \in \Gamma$.

□

12. Topología débil de un e.v.n.

Notación 12.1. *Dados* $\bar{x} \in \mathbf{E}$, $\ell \in \mathbf{E}^*$ *y* $\varepsilon > 0$ *denotaremos*

$$V_{\bar{x}}(\ell;\varepsilon) := \{x \in \mathbf{E} \mid |\langle \ell, x-\bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| < \varepsilon\}.$$

Definición 12.0.1 La **topología débil** de un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$, denotada $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$, es la topología débil inducida por la familia de conjunto

$$\{V_{\bar{x}}(\ell;\varepsilon) \mid \bar{x} \in \mathbf{E},\ \ell \in \mathbf{E}^*,\ \varepsilon > 0\}.$$

Si $A \in \sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$, diremos que A es un **abierto débil** de $\mathbf{E}$ y $B = \mathbf{E}\setminus A$ es un **cerrado débil** de $\mathbf{E}$.

- Como contraparte, la topología de la norma $\mathscr{T}_{d_{\mathbf{E}}}$ la hemos llamado también la **topología fuerte** sobre $\mathbf{E}$.
- $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$ es la topología con menos abiertos que hace que los funcionales de $\mathbf{E}^*$ sean continuos:

$$\ell \in (\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})^* \quad \Longrightarrow \quad \ell : (\mathbf{E}, \sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_{\mathbb{R}}) \text{ es continua.}$$

- Los conjuntos de la forma

$$V_{\bar{x}}(\ell_0,\ldots,\ell_m;\varepsilon) := \bigcap_{i=0}^{m} V_{\bar{x}}(\ell_i;\varepsilon) = \{x \in \mathbf{E} \mid |\langle \ell_i, x-\bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| < \varepsilon,\ \forall\, i = 0,\ldots,m\},$$

  donde $\bar{x} \in \mathbf{E}$, $\ell_0,\ldots,\ell_m \in \mathbf{E}^*$ y $\varepsilon > 0$, forman una **base para la topología** $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$.
- Dados $a,b \in \mathbb{R}$ y $\ell \in \mathbf{E}^*$, los conjuntos $\ell^{-1}((a,b))$, $\ell^{-1}((a,+\infty))$ y $\ell^{-1}((-\infty,b))$ son abiertos débiles.

Proposición 12.0.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. Luego, $(\mathbf{E}, \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*))$ es un e.v.t. Hausdorff.

Demostración. Veamos primero que $f_{\text{sum}} : (\mathbf{E} \times \mathbf{E}, \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*) \bigotimes \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)) \to (\mathbf{E}, \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*))$ es continua, donde $f_{\text{sum}}(x,y) = x+y$

Dado que $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*) \times \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*) \subseteq \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*) \bigotimes \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)$, basta probar que dados $z \in \mathbf{E}$, $\varepsilon > 0$ y $\ell_0, \dots, \ell_m \in \mathbf{E}^*$ tenemos que

$$f_{\text{sum}}^{-1}(V_z(\ell_0, \dots, \ell_m; \varepsilon)) \in \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*) \times \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*).$$

Dado $(\bar{x}, \bar{y}) \in f_{\text{sum}}^{-1}(V_z(\ell_0, \dots, \ell_m; \varepsilon))$, probaremos que existe $\delta > 0$ tal que

$$V_{\bar{x}}(\ell_0, \dots, \ell_m; \delta) \times V_{\bar{y}}(\ell_0, \dots, \ell_m; \delta) \subseteq f_{\text{sum}}^{-1}(V_z(\ell_0, \dots, \ell_m; \varepsilon)). \tag{12.1}$$

Notemos que la condición $(x,y) \in V_{\bar{x}}(\ell_0, \dots, \ell_m; \delta) \times V_{\bar{y}}(\ell_0, \dots, \ell_m; \delta)$ es equivalente a

$$|\langle \ell_i, x - \bar{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| < \delta \quad \text{y} \quad |\langle \ell_i, y - \bar{y} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| < \delta, \qquad \forall i = 0, \dots, m.$$

En consecuencia, para cada $i = 0, \dots, m$ y $(x,y) \in V_{\bar{x}}(\ell_0, \dots, \ell_m; \delta) \times V_{\bar{y}}(\ell_0, \dots, \ell_m; \delta)$ tenemos

$$|\langle \ell_i, x+y-z \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| \leq |\langle \ell_i, x-\bar{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| + |\langle \ell_i, y-\bar{y} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| + |\langle \ell_i, \bar{x}+\bar{y}-z \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| < 2\delta + |\langle \ell_i, \bar{x}+\bar{y}-z \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|.$$

Ahora bien, dado que $|\langle \ell_i, \bar{x}+\bar{y}-z \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| < \varepsilon$ para todo $i = 0, \dots, m$, tomando $\delta > 0$ tal que

$$2\delta + |\langle \ell_i, \bar{x}+\bar{y}-z \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| \leq \varepsilon, \qquad \forall i = 0, \dots, m$$

obtenemos que $f_{\text{sum}}(x,y) \in V_z(\ell_0, \dots, \ell_m; \varepsilon)$. Por lo tanto (12.1) se verifica y f_{sum} es continua.

Análogamente, veamos ahora que $f_{\text{mult}} : (\mathbb{R} \times \mathbf{E}, \mathscr{T}_{\mathbb{R}} \bigotimes \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)) \to (\mathbf{E}, \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*))$ es continua, donde $f_{\text{mult}}(\lambda, y) = \lambda x$. Como antes, basta probar que dados $z \in \mathbf{E}$, $\ell_0, \dots, \ell_m \in \mathbf{E}^*$ y $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$f_{\text{mult}}^{-1}(V_z(\ell_0, \dots, \ell_m; \varepsilon)) \in \mathscr{T}_{\mathbb{R}} \times \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*).$$

Dado $(\bar{\lambda}, \bar{x}) \in f_{\text{sum}}^{-1}(V_z(\ell_0, \dots, \ell_m; \varepsilon))$, probaremos que existe $\delta > 0$ tal que

$$(\bar{\lambda} - \delta, \bar{\lambda} + \delta) \times V_{\bar{x}}(\ell_0, \dots, \ell_m; \delta) \subseteq f_{\text{sum}}^{-1}(V_z(\ell_0, \dots, \ell_m; \varepsilon)). \tag{12.2}$$

Notemos que para todo $\ell \in \mathbf{E}^*$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle \ell, \lambda x - \bar{\lambda}\bar{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} &= \lambda \langle \ell, x - \bar{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} + (\lambda - \bar{\lambda}) \langle \ell, \bar{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \\ &= (\lambda - \bar{\lambda}) \langle \ell, x - \bar{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} + \bar{\lambda} \langle \ell, x - \bar{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} + (\lambda - \bar{\lambda}) \langle \ell, \bar{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $i = 0, \dots, m$ y $(\lambda, x) \in (\bar{\lambda} - \delta, \bar{\lambda} + \delta) \times V_{\bar{x}}(\ell_0, \dots, \ell_m; \delta)$ tenemos

$$|\langle \ell_i, \lambda x - z \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| = |\langle \ell_i, \lambda x - \bar{\lambda}\bar{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| + |\langle \ell_i, \bar{\lambda}\bar{x} - z \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| < \delta^2 + \delta(|\bar{\lambda}| + |\langle \ell_i, \bar{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|) + |\langle \ell_i, \bar{\lambda}\bar{x} - z \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|.$$

Nuevamente, dado que $|\langle \ell_i, \bar{\lambda}\bar{x} - z \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| < \varepsilon$ para todo $i = 0, \dots, m$, tomando $\delta > 0$ tal que

$$\delta^2 + \delta(|\bar{\lambda}| + |\langle \ell_i, \bar{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|) \leq \varepsilon, \qquad \forall i = 0, \dots, m$$

obtenemos que $f_{\text{mult}}(\lambda, x) \in V_z(\ell_0, \dots, \ell_m; \varepsilon)$. Por lo tanto (12.2) se verifica y luego f_{mult} es continua.

Con esto concluimos que $(\mathbf{E}, \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*))$ es efectivamente un e.v.t. real.

Veamos finalmente que $(\mathbf{E},\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*))$ es Hausdorff. Tomemos $x_1,x_2\in\mathbf{E}$ con $x_1\neq x_2$. Gracias al Teorema de Hahn-Banach Geométrico, segunda versión existe $\ell\in\mathbf{E}^*\setminus\{0\}$ y $\alpha\in\mathbb{R}$ tales que

$$\langle \ell,x_1\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}<\alpha<\langle \ell,x_2\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}.$$

Luego, para finalizar basta tomar

$$V_{x_1}:=\{x\in\mathbf{E}\mid \langle \ell,x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}<\alpha\}\quad \text{y}\quad V_{x_2}:=\{x\in\mathbf{E}\mid \langle \ell,x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}>\alpha\}.$$

□

Dado que $(\mathbf{E},\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*))$ es un e.v.t. Hausdorff, podemos afirmar lo siguiente:
- Los singleton son conjuntos cerrados débiles para $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$.
- Los límites de sucesiones convergentes son únicos.
- Conjuntos compactos para la topología $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$ (**compactos débiles**) son cerrados débiles.
- Si $\mathbf{E}$ es de dimensión finita, $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$ coincide con la topología de la norma.

12.1 Sucesiones y adherencia

Notación 12.2. *Supongamos que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbf{E}$ es una sucesión que converge respecto a la topología débil $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$ a $\bar{x}\in\mathbf{E}$.*

*En tal caso diremos que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ **converge débilmente** a $\bar{x}$ en $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$ y esto lo denotaremos indistintamente*

$$\text{“}x_k\rightharpoonup\bar{x}\ \textit{débilmente en}\ \sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)\text{”}\qquad \textit{o simplemente}\qquad \text{“}x_k\rightharpoonup\bar{x}\text{”}.$$

Si la sucesión converge con respecto a la topología fuerte (topología de la norma), entonces diremos que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente a $\bar{x}$ en $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y esto lo denotaremos indistintamente

$$\text{“}x_k\to\bar{x}\ \textit{fuertemente en}\ (\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})\text{”}\qquad \textit{o simplemente}\qquad \text{“}x_k\to\bar{x}\text{”}.$$

Usando la base de la topología débil $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$, tenemos que $x_k\rightharpoonup\bar{x}$ si y sólo si

$$\forall \ell_0,\dots,\ell_m\in\mathbf{E}^*,\ \forall\varepsilon>0,\quad \exists k_0\in\mathbb{N},\quad \text{tal que } x_k\in V_{\bar{x}}(\ell_0,\dots,\ell_m;\varepsilon),\quad \forall k\geq k_0$$

o equivalentemente

$$\forall \ell\in\mathbf{E}^*,\ \forall\varepsilon>0,\quad \exists k_0\in\mathbb{N},\quad \text{tal que } |\langle \ell,x_k-\bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|<\varepsilon,\quad \forall k\geq k_0.$$

Notemos que esto último corresponde a pedir que

$$\langle \ell,x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\to\langle \ell,\bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}},\qquad \forall \ell\in\mathbf{E}^*.$$

Proposición 12.1.1 Supongamos que $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbf{E}$ es una sucesión y $\bar{x}\in\mathbf{E}$.
1. Si $x_k\to\bar{x}$ fuertemente en $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$, entonces $x_k\rightharpoonup\bar{x}$ débilmente en $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$.
2. Si $x_k\rightharpoonup\bar{x}$ débilmente en $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$, entonces $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada y $\|\bar{x}\|_{\mathbf{E}}\leq\liminf\limits_{n\to+\infty}\|x_k\|_{\mathbf{E}}$.
3. Si $\{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbf{E}^*$ es una sucesión tal que $\ell_k\to\bar{\ell}$ y $x_k\rightharpoonup\bar{x}$, entonces $\langle \ell_k,x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\to\langle\bar{\ell},\bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}$.

Demostración.

1. Basta notar que dado $\ell \in \mathbf{E}^*$, por continuidad siempre tenemos que $\langle \ell, x_k \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \to \langle \ell, \bar{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}$ en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
2. Notemos que la sucesión de operadores $\{J_{x_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}^{**}$ converge puntualmente a $J_{\bar{x}}$:

$$J_{x_k}(\ell) = \langle J_{x_k}, \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} = \langle \ell, x_k \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \to \langle \ell, \bar{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle J_{\bar{x}}, \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} = J_{\bar{x}}(\ell), \qquad \forall \ell \in \mathbf{E}^*.$$

   Dado que cada cada $J_{x_k} : \mathbf{E}^* \to \mathbb{R}$ es lineal continuo y tanto $(\mathbf{E}^*, \|\cdot\|_{\mathbf{E}^*})$ como $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ son espacios de Banach, por el Teorema de Banach-Steinhaus tenemos que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|J_{x_k}\|_{\mathbf{E}^{**}} < +\infty \quad \text{y} \quad \|J_{\bar{x}}\|_{\mathbf{E}^{**}} \leq \liminf_{k\to+\infty} \|J_{x_k}\|_{\mathbf{E}^{**}}.$$

   Para concluir basta recordar que $\|J_x\|_{\mathbf{E}^{**}} = \|x\|_{\mathbf{E}}$ para todo $x \in \mathbf{E}$; ver Corolario 2.3.4.
3. Notemos que $\|\ell_k - \bar{\ell}\|_{\mathbf{E}^*} \to 0$ y $\langle \bar{\ell}, x_k - \bar{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \to 0$. Además, para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$|\langle \ell_k, x_k \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} - \langle \bar{\ell}, \bar{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| \leq |\langle \ell_k - \bar{\ell}, x_k \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| + |\langle \bar{\ell}, x_k - \bar{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| \leq \|\ell_k - \bar{\ell}\|_{\mathbf{E}^*} \|x_k\|_{\mathbf{E}} + |\langle \bar{\ell}, x_k - \bar{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|$$

   La conclusión vienen entonces de notar que, por el punto anterior, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es también una sucesión acotada. □

Notación 12.3. *La **adherencia** de $A \subseteq \mathbf{E}$ con respecto a la topología $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$ la denotaremos $\overline{A}^{\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)}$.*

En general, conjuntos que sean cerrado para la topología fuerte, no serán cerrados para la topología débil, tal como lo muestra el siguiente caso.

Proposición 12.1.2 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es e.v.n. de dimensión infinita, entonces

$$\overline{S_{\mathbf{E}}}^{\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)} = \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}, \quad \text{donde } S_{\mathbf{E}} = \{x \in \mathbf{E} \mid \|x\|_{\mathbf{E}} = 1\}.$$

Demostración. Notemos que basta probar que $\mathbb{B}_{\mathbf{E}} \subseteq \overline{S_{\mathbf{E}}}^{\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)}$. En efecto, como $\overline{S_{\mathbf{E}}}^{\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)}$ es cerrado débil, en particular es también cerrado fuerte. En consecuencia

$$S_{\mathbf{E}} \subseteq \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}} \subseteq \overline{\left(\overline{S_{\mathbf{E}}}^{\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)}\right)} = \overline{S_{\mathbf{E}}}^{\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)}.$$

Dado que $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$ es cerrado débil, podríamos concluir que

$$\overline{S_{\mathbf{E}}}^{\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)} \subseteq \overline{(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}})}^{\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)} = \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}} \subseteq \overline{S_{\mathbf{E}}}^{\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)}.$$

Para concluir debemos probar entonces que cualquiera sea $\bar{x} \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}$, $\ell_0, \ldots, \ell_m \in \mathbf{E}^*$ y $\varepsilon > 0$, tenemos que

$$V_{\bar{x}}(\ell_0, \ldots, \ell_m; \varepsilon) \cap S_{\mathbf{E}} \neq \emptyset.$$

Definamos $\varphi : \mathbf{E} \to \mathbb{R}^{m+1}$ tal que $\varphi(x) = (\langle \ell_0, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \ldots, \langle \ell_m, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}})$ para cualquier $x \in \mathbf{E}$. Dado que $\mathbf{E}$ es un e.v.n. de dimensión infinita, entonces $\varphi : \mathbf{E} \to \mathbb{R}^{m+1}$ no puede ser inyectiva;

Si no $\varphi : \mathbf{E} \to \varphi(\mathbf{E})$ sería un isomorfismo y luego $\dim(\mathbf{E}) \leq m+1$. En particular, existe $x_0 \in \ker(\varphi)$, con $x_0 \neq 0$. Notemos que

$$\langle \ell_i, (\bar{x} + t x_0) - \bar{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = t \langle \ell_i, x_0 \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 0, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall i = 0, \ldots, m.$$

Esto implica que $\bar{x}+tx_0 \in V_{\bar{x}}(\ell_0,\dots,\ell_m;\varepsilon)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definamos $g(t) := \|\bar{x}+tx_0\|_{\mathbf{E}}$ para $t \in \mathbb{R}$. Notemos que $g(0) = \|\bar{x}\|_{\mathbf{E}} < 1$ y por otro lado,

$$g(t) \geq |t|\|x_0\|_{\mathbf{E}} - \|\bar{x}\|_{\mathbf{E}} \to +\infty \qquad \text{si } |t| \to +\infty.$$

Por continuidad de $t \mapsto g(t)$, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\|\bar{x}+t_0x_0\|_{\mathbf{E}} = 1$, es decir, $\bar{x}+t_0x_0 \in S_{\mathbf{E}}$.

Esto implica que $V_{\bar{x}}(\ell_0,\dots,\ell_m;\varepsilon) \cap S_{\mathbf{E}} \neq \emptyset$, y en consecuencia $\mathbb{B}_{\mathbf{E}} \subseteq \overline{S_{\mathbf{E}}}^{\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)}$. □

- Notemos que

$$S_{\mathbf{E}} = \{x \in \mathbf{E} \mid \|x\|_{\mathbf{E}} \geq 1\} \cap \{x \in \mathbf{E} \mid \|x\|_{\mathbf{E}} \leq 1\} = (\mathbf{E} \setminus \mathbb{B}_{\mathbf{E}}) \cap \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}},$$

  y recordemos que $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$ es un cerrado débil en la topología $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$ (Proposición **??**).
  Luego, si $\mathbf{E}$ es de dimensión infinita, el conjunto $\mathbb{B}_{\mathbf{E}}$ no puede ser un abierto débil para $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$.
  De otra forma tendríamos que $\mathbf{E} \setminus \mathbb{B}_{\mathbf{E}}$ es cerrado débil y por lo tanto $S_{\mathbf{E}}$ también sería un cerrado débil. En consecuencia tendríamos

$$S_{\mathbf{E}} = \overline{S_{\mathbf{E}}}^{\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)} = \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}.$$

- Si $\mathbf{E}$ es de dimensión infinita, la topología débil siempre está estrictamente contenida en la topología fuerte (el conjunto $\mathbb{B}_{\mathbf{E}}$ es abierto fuerte, pero no débil).
- A pesar que en dimensión infinita las topologías fuerte y débil no coinciden, hay e.v.n. donde toda sucesión débilmente convergente es también fuertemente convergente.

12.1.1 Relación con la convexidad

Proposición 12.1.3 Supongamos que $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es e.v.n. y $S \subseteq \mathbf{E}$ es un subconjunto convexo. Luego, S es cerrado débil si y sólo si S es cerrado fuerte.

Demostración. Si S es cerrado débil, es directo que S es cerrado fuerte, pues $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*) \subseteq \mathscr{T}_{d_{\mathbf{E}}}$; no se necesita la convexidad.

Supongamos que $S \subseteq \mathbf{E}$ es un conjunto cerrado fuerte, convexo y no vacío (si $S = \emptyset$ entonces $S \in \sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$). Gracias al Teorema de Hahn-Banach Geométrico (Corolario 3.2.2 específicamente), tenemos que S coincide con la intersección de todos los semi-espacios cerrados que lo contiene, es decir,

$$S = \bigcap_{S \subseteq M} \{M \subseteq \mathbf{E} \mid M \text{ es un semi-espacio cerrado}\}$$

donde cada semi-espacio cerrado M es de la forma

$$\{x \in \mathbf{E} \mid \ell(x) \leq \alpha\} = \mathbf{E} \setminus \ell^{-1}((\alpha,+\infty))$$

para algún $\ell \in \mathbf{E}^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Notando que todo semi-espacio cerrado M es un cerrado débil (pues es el complemento de un abierto débil), obtenemos que S se puede escribir como intersección de cerrados débiles, luego es cerrado débil.

□

Notación 12.4. *Dado un conjunto $A \subseteq \mathbf{E}$, denotaremos la **envoltura convexa** de A por*

$$\operatorname{conv}(A) = \bigcap_{C \subseteq \mathbf{E}} \{C \mid C \textit{ es convexo y } A \subseteq C\}.$$

Lema — Mazur. Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ converge débilmente a $\bar{x} \in \mathbf{E}$ en $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)$. Luego, existe una sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{conv}(\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}})$ que converge fuertemente a $\bar{x} \in \mathbf{E}$ en $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$.

Demostración. Definamos

$$S = \operatorname{conv}(\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}) = \bigcap_{C \subseteq \mathbf{E}} \{C \mid C \text{ es convexo y } x_k \in C,\ \forall\, k \in \mathbb{N}\}.$$

Es decir, la envoltura convexa, es el convexo más pequeño, que contiene a los elementos de la sucesión. Dado que S es convexo, gracias a la Proposición 12.1.3 tenemos que

$$\overline{S} = \overline{S}^{\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)}.$$

Ahora bien, como $\bar{x} \in \overline{\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}}^{\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)} \subseteq \overline{S}^{\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)}$, concluimos entonces que $\bar{x} \in \overline{S}$. □

12.2 Topología débil de un espacio producto

Proposición 12.2.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ son dos e.v.n. Luego

$$\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*) \otimes \sigma(\mathbf{F}, \mathbf{F}^*) = \sigma(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, (\mathbf{E} \times \mathbf{F})^*).$$

Demostración. Veamos primero la inclusión $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*) \otimes \sigma(\mathbf{F}, \mathbf{F}^*) \subseteq \sigma(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, (\mathbf{E} \times \mathbf{F})^*)$.

Tomemos $A \in \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*) \otimes \sigma(\mathbf{F}, \mathbf{F}^*)$ y $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$. Luego, existen $\ell_0^1, \dots, \ell_{m_1}^1 \in \mathbf{E}^*$, $\ell_0^2, \dots, \ell_{m_2}^2 \in \mathbf{F}^*$ y $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tales que

$$V_{\bar{x}}\left(\ell_0^1, \dots, \ell_{m_1}^1; \varepsilon_1\right) \times V_{\bar{y}}\left(\ell_0^2, \dots, \ell_{m_2}^2; \varepsilon_2\right) \subseteq A.$$

Dados $i = 0, \dots, m_1$ y $(x, y) \in \mathbf{E} \times \mathbf{F}$, definamos $\hat{\ell}_i^1(x, y) = \ell_i^1(x)$. Claramente, $\hat{\ell}_0^1, \dots, \hat{\ell}_{m_1}^1 \in (\mathbf{E} \times \mathbf{F})^*$ y

$$V_{(\bar{x},\bar{y})}\left(\hat{\ell}_0^1, \dots, \hat{\ell}_{m_1}^1; \varepsilon_1\right) = V_{\bar{x}}\left(\ell_0^1, \dots, \ell_{m_1}^1; \varepsilon_1\right) \times \mathbf{F}.$$

De forma similar, para cada $j = 0, \dots, m_2$ y $(x, y) \in \mathbf{E} \times \mathbf{F}$, definamos $\hat{\ell}_j^2(x, y) = \ell_j^2(y)$.

Notemos que también tenemos que $\hat{\ell}_0^2, \dots, \hat{\ell}_{m_2}^2 \in (\mathbf{E} \times \mathbf{F})^*$ y

$$V_{(\bar{x},\bar{y})}\left(\hat{\ell}_0^2, \dots, \hat{\ell}_{m_2}^2; \varepsilon_2\right) = \mathbf{E} \times V_{\bar{y}}\left(\ell_0^2, \dots, \ell_{m_2}^2; \varepsilon_2\right).$$

Sigue que

$$V := V_{(\bar{x},\bar{y})}\left(\hat{\ell}_0^1, \dots, \hat{\ell}_{m_1}^1; \varepsilon_1\right) \bigcap V_{(\bar{x},\bar{y})}\left(\hat{\ell}_0^2, \dots, \hat{\ell}_{m_2}^2; \varepsilon_2\right) = V_{\bar{x}}\left(\ell_0^1, \dots, \ell_{m_1}^1; \varepsilon_1\right) \times V_{\bar{y}}\left(\ell_0^2, \dots, \ell_{m_2}^2; \varepsilon_2\right) \subseteq A.$$

Dado que $V \in \sigma(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, (\mathbf{E} \times \mathbf{F})^*)$ concluimos que A es un abierto débil de $\sigma(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, (\mathbf{E} \times \mathbf{F})^*)$.

Veamos ahora que $\sigma(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, (\mathbf{E} \times \mathbf{F})^*) \subseteq \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*) \otimes \sigma(\mathbf{F}, \mathbf{F}^*)$:

Basta probar que, dados $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{E} \times \mathbf{F}$, $\ell \in (\mathbf{E} \times \mathbf{F})^*$ y $\varepsilon > 0$, tenemos que

$$V_{(\bar{x},\bar{y})}(\ell; \varepsilon) \in \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*) \otimes \sigma(\mathbf{F}, \mathbf{F}^*),$$

pues $\sigma(\mathbf{E}\times\mathbf{F},(\mathbf{E}\times\mathbf{F})^*)$ es la topología más pequeña que contiene a esta clase de conjuntos.

Definamos para cada $(x,y)\in\mathbf{E}\times\mathbf{F}$ las funciones $\ell^1(x)=\ell(x,0)$ y $\ell^2(y)=\ell(0,y)$. Claramente, $\ell^1\in\mathbf{E}^*$ y $\ell^2\in\mathbf{F}^*$ pues $\ell\in(\mathbf{E}\times\mathbf{F})^*$ y $\|(x,y)\|_{\mathbf{E}\times\mathbf{F}}=\|x\|_{\mathbf{E}}+\|y\|_{\mathbf{F}}$ para $(x,y)\in\mathbf{E}\times\mathbf{F}$.

Sean $(\alpha,\beta)\in V_{(\bar{x},\bar{y})}(\ell;\varepsilon)$ y $(x,y)\in\mathbf{E}\times\mathbf{F}$, luego sigue que

$$\langle\ell,(x,y)-(\bar{x},\bar{y})\rangle_{(\mathbf{E}\times\mathbf{F})^*,\mathbf{E}\times\mathbf{F}}=\langle\ell^1,x-\alpha\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}+\langle\ell^2,y-\beta\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}+\langle\ell,(\alpha,\beta)-(\bar{x},\bar{y})\rangle_{(\mathbf{E}\times\mathbf{F})^*,\mathbf{E}\times\mathbf{F}}.$$

Sigue que $V_\alpha\left(\ell^1;\delta\right)\times V_\beta\left(\ell^2;\delta\right)\subseteq V_{(\bar{x},\bar{y})}(\ell;\varepsilon)$ con $\delta>0$ tal que

$$2\delta+|\langle\ell,(\alpha,\beta)-(\bar{x},\bar{y})\rangle_{(\mathbf{E}\times\mathbf{F})^*,\mathbf{E}\times\mathbf{F}}|<\varepsilon.$$

En efecto, dado $(x,y)\in V_\alpha\left(\ell^1;\delta\right)\times V_\beta\left(\ell^2;\delta\right)$ tenemos

$$|\langle\ell,(x,y)-(\bar{x},\bar{y})\rangle_{(\mathbf{E}\times\mathbf{F})^*,\mathbf{E}\times\mathbf{F}}|\leq 2\delta+|\langle\ell,(\alpha,\beta)-(\bar{x},\bar{y})\rangle_{(\mathbf{E}\times\mathbf{F})^*,\mathbf{E}\times\mathbf{F}}|<\varepsilon.$$

Por lo tanto $(\alpha,\beta)\in\operatorname{int}\left(V_{(\bar{x},\bar{y})}(\ell;\varepsilon)\right)$ (respecto a la topología producto $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)\otimes\sigma(\mathbf{F},\mathbf{F}^*)$). Luego, $V_{(\bar{x},\bar{y})}(\ell;\varepsilon)$ es abierto en la topología producto $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)\otimes\sigma(\mathbf{F},\mathbf{F}^*)$. □

12.2.1 Continuidad de funcionales lineales

Proposición 12.2.2 Supongamos que $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{F},\|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ son dos e.v.n. y $L:\mathbf{E}\to\mathbf{F}$ es un operador lineal. Si L es acotado, entonces $L:(\mathbf{E},\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*))\to(\mathbf{F},\sigma(\mathbf{F},\mathbf{F}^*))$ es una función continua.

Demostración. Supongamos que L es acotado. Vamos a ver que $L^{-1}(A)\in\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$ para todo $A\in\sigma(\mathbf{F},\mathbf{F}^*)$.

Basta restringirnos a conjuntos A de la forma $V_{\bar{y}}(\ell_0,\ldots,\ell_m;\varepsilon))$ con $\bar{y}\in\mathbf{F}$, $\ell_0,\ldots,\ell_m\in\mathbf{F}^*$ y $\varepsilon>0$. Notemos que

$$L^{-1}(V_{\bar{y}}(\ell_0,\ldots,\ell_m;\varepsilon))=L^{-1}\left(\bigcap_{i=0}^m V_{\bar{y}}(\ell_i;\varepsilon)\right)=\bigcap_{i=0}^m L^{-1}\left(V_{\bar{y}}(\ell_i;\varepsilon)\right).$$

Para cada $i=0,\ldots,m$ denotemos $a_i=\langle\ell_i,\bar{y}\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}-\varepsilon$ y $b_i=\langle\ell_i,\bar{y}\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}+\varepsilon$. Luego, tenemos que

$$L^{-1}\left(V_{\bar{y}}(\ell_i;\varepsilon)\right)=\{x\in\mathbf{E}\mid|\langle\ell_i,L(x)-\bar{y}\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}|<\varepsilon\}=\{x\in\mathbf{E}\mid a_i<\langle\ell_i,L(x)\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}<b_i\}.$$

Dado que L es acotado, tenemos que $L^*\in\mathscr{L}C(\mathbf{F}^*,\mathbf{E}^*)$, y por lo tanto, cada $L^*(\ell_i)\in\mathbf{E}^*$. Esto implica que cada $L^{-1}\left(V_{\bar{y}}(\ell_i;\varepsilon)\right)$ es abierto débil en $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$ pues

$$L^{-1}\left(V_{\bar{y}}(\ell_i;\varepsilon)\right)=\{x\in\mathbf{E}\mid a_i<\langle L^*(\ell_i),x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}<b_i\}=[L^*(\ell_i)]^{-1}\left((a_i,b_i)\right)\in\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*).$$

Luego, $L^{-1}(V_{\bar{y}}(\ell_0,\ldots,\ell_m;\varepsilon))\in\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$ pues se escribe como intersección finita de abiertos débiles. Por lo tanto $L:(\mathbf{E},\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*))\to(\mathbf{F},\sigma(\mathbf{F},\mathbf{F}^*))$ es una función continua. □

Proposición 12.2.3 Supongamos que $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{F},\|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ son espacios de Banach y $L:\mathbf{E}\to\mathbf{F}$ es un operador lineal. Si $L:(\mathbf{E},\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*))\to(\mathbf{F},\sigma(\mathbf{F},\mathbf{F}^*))$ es una función continua, entonces L es un operador acotado.

Demostración. Dado que L es lineal, si $\mathrm{Gr}(L)$ es cerrado fuerte en $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$, concluimos usando el Teorema del Grafo Cerrado.

Veamos primero que $\mathrm{Gr}(L)$ es cerrado en $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*) \otimes \sigma(\mathbf{F},\mathbf{F}^*)$ (equivalentemente, su complemento es abierto).

Tomemos $(x,y) \in \mathbf{E} \times \mathbf{F} \setminus \mathrm{Gr}(L)$, es decir, $L(x) \neq y$. Dado que $(\mathbf{F},\sigma(\mathbf{F},\mathbf{F}^*))$ es un e.v.t. Hausdorff, existen $V_{L(x)} \in \mathscr{N}(L(x))$ y $V_y \in \mathscr{N}(y)$ tales que

$$V_{L(x)} \cap V_y = \emptyset.$$

Dado que $L : (\mathbf{E},\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)) \to (\mathbf{F},\sigma(\mathbf{F},\mathbf{F}^*))$ es continua, existe $W_x \in \mathscr{N}(x)$ tal que $L(W_x) \subseteq V_{L(x)}$. Por lo tanto, $W_x \times V_y \subseteq \mathbf{E} \times \mathbf{F} \setminus \mathrm{Gr}(L)$ puesto que $L(W_x) \cap V_y = \emptyset$.

Ahora bien, dado que W_x es una vecindad de x en $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$ y V_y es una vecindad de y en $\sigma(\mathbf{F},\mathbf{F}^*)$, tenemos que $W_x \times V_y$ es una vecindad de (x,y) en $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*) \otimes \sigma(\mathbf{F},\mathbf{F}^*)$. Por lo tanto, $\mathrm{Gr}(L)$ es cerrado en la topología producto $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*) \otimes \sigma(\mathbf{F},\mathbf{F}^*)$.

Veamos ahora que $\mathrm{Gr}(L)$ es cerrado fuerte en $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$. Gracias a la Proposición 12.2.1, tenemos que $\mathrm{Gr}(L)$ es cerrado débil para la topología $\sigma(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, (\mathbf{E} \times \mathbf{F})^*)$. Ahora bien, como todo cerrado débil es cerrado fuerte, tenemos que $\mathrm{Gr}(L)$ es cerrado fuerte en $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$.

Luego, por el Teorema del Grafo Cerrado concluimos. $\square$

13. La topología débil-$\star$

Ahora nos enfocaremos en estudiar una topología débil especialmente construida para espacios que se pueden identificar con el dual topológico de un e.v.n. dado. También presentaremos criterios de compacidad para esta topología.

Más adelante veremos que el conjunto $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$ es, bajo ciertas condiciones, compacto respecto a la topología débil $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$. Esto tendrá como consecuencia que, bajo las mismas condiciones, el conjunto $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}$ será a su vez un compacto de $\mathbf{E}^*$ respecto a la topología débil $\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}^{**})$, pero no siempre.

La principal característica de la topología débil-$\star$ que introduciremos ahora es que $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}$ siempre es compacto respecto a esta topología.

Notación 13.1. *Dados* $\hat{\ell} \in \mathbf{E}^*$, $x \in \mathbf{E}$ *y* $\varepsilon > 0$ *denotaremos* $W_{\hat{\ell}}(x;\varepsilon) := \{\ell \in \mathbf{E}^* \mid |\langle \ell - \hat{\ell}, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| < \varepsilon\}$.

Definición 13.0.1 La **topología débil-$\star$** sobre $\mathbf{E}^*$, el dual topológico de un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$, denotada $\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})$, es la topología débil inducida (sobre el conjunto $\mathbf{E}^*$) por la familia de conjuntos

$$\left\{W_{\hat{\ell}}(x;\varepsilon) \mid \hat{\ell} \in \mathbf{E}^*,\ x \in \mathbf{E},\ \varepsilon > 0\right\}.$$

Si $A \in \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E},)$, diremos que A es un **abierto débil-$\star$** de $\mathbf{E}^*$ y como contraparte, $B = \mathbf{E}^* \setminus A$ es un **cerrado débil-$\star$** de $\mathbf{E}^*$.

Notemos que

- $\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})$ es la topología con menos abiertos tal que los funcionales de evaluación son continuos:

$$J_x : (\mathbf{E}^*, \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_{\mathbb{R}}) \text{ es continua}, \quad \forall x \in \mathbf{E}.$$

- Dados $a,b \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbf{E}$, el conjunto $J_x^{-1}((a,b)) = \{\ell \in \mathbf{E}^* \mid a < \langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} < b\}$ es abierto débil-$\star$. También lo son los conjuntos $J_x^{-1}((a,+\infty))$ y $J_x^{-1}((-\infty,b))$.

- Los conjuntos de la forma

$$W_{\hat{\ell}}(x_0,\ldots,x_m;\varepsilon) := \bigcap_{i=0}^{m} W_{\hat{\ell}}(x_i;\varepsilon) = \{\ell \in \mathbf{E}^* \mid |\langle \ell - \hat{\ell}, x_i\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| < \varepsilon,\ \forall\, i = 0,\ldots,m\},$$

  donde $\hat{\ell} \in \mathbf{E}^*$, $x_0,\ldots,x_m \in \mathbf{E}$ y $\varepsilon > 0$, forman una base para la topología $\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})$.

13.1 Propiedades básicas

Es muy imporante destacar lo siguiente sobre la topología débil-$\star$:

- Esta topología sólo está definida en espacios duales (en particular $L^1_\mu(\Omega)$ no tiene una topología débil asociada puesto que, en general, no existe $\mathbf{E}$ tal que $L^1(\Omega) \cong \mathbf{E}^*$).
- Sobre el conjunto $\mathbf{E}^*$ podemos definir tres topologías:
  - Fuerte $\mathscr{T}_{d_{\mathbf{E}^*}}$: inducida por la norma dual $\|\cdot\|_{\mathbf{E}^*}$, con una base para esta topología formada por conjuntos

$$\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}(\hat{\ell},\varepsilon) = \left\{\ell \in \mathbf{E}^* \mid \|\ell - \hat{\ell}\|_{\mathbf{E}^*} < \varepsilon\right\}, \qquad \hat{\ell} \in \mathbf{E}^*,\ \varepsilon > 0.$$

  - Débil $\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}^{**})$: la más pequeña tal que los funcionales $\varphi \in \mathbf{E}^{**}$ siguen siendo continuos, con una base para esta topología formada por conjuntos

$$V_{\hat{\ell}}(\varphi_0,\ldots,\varphi_m;\varepsilon) = \left\{\ell \in \mathbf{E}^* \mid |\langle \varphi_i, \ell - \hat{\ell}\rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}| < \varepsilon,\ \forall\, i = 0,\ldots,m\right\},$$

    donde $\hat{\ell} \in \mathbf{E}^*$, $\varphi_0,\ldots,\varphi_m \in \mathbf{E}^{**}$ y $\varepsilon > 0$.
  - Débil-$\star$ $\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})$: la más pequeña tal que los funcionales de evaluación $J_x \in \mathbf{E}^{**}$ siguen siendo continuos, con una base para esta topología formada por conjuntos

$$W_{\hat{\ell}}(x_1,\ldots,x_m;\varepsilon) := \{\ell \in \mathbf{E}^* \mid |\langle \hat{\ell} - \ell, x_i\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| < \varepsilon,\ \forall i = 0,\ldots,m\},$$

    donde $\hat{\ell} \in \mathbf{E}^*$, $x_0,\ldots,x_m \in \mathbf{E}$ y $\varepsilon > 0$.

  Dado que $\langle J_x, \ell\rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} = \langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}$ para todo $x \in \mathbf{E}$ y $\ell \in \mathbf{E}^*$, tenemos

$$\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}) \subseteq \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}^{**}) \subseteq \mathscr{T}_{d_{\mathbf{E}^*}}.$$

  La primera contención es estricta si $J(\mathbf{E}) \subsetneq \mathbf{E}^{**}$ y la segunda contención es estricta si $\dim(\mathbf{E}) = +\infty$.

Proposición 13.1.1 Supongamos que $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. Luego, $(\mathbf{E}^*,\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}))$ es un e.v.t. Hausdorff.

Demostración. Veamos que $f_{\text{sum}} : (\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}^*, \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}) \bigotimes \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})) \to (\mathbf{E}^*, \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}))$ es continua, donde $f_{\text{sum}}(\ell_1,\ell_2) = \ell_1 + \ell_2$.

Dado que $\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}) \times \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}) \subseteq \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}) \bigotimes \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})$, basta entonces probar que para $\hat{\ell} \in \mathbf{E}^*$, $x_0,\ldots,x_m \in \mathbf{E}$ y $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$f_{\text{sum}}^{-1}\left(W_{\hat{\ell}}(x_0,\ldots,x_m;\varepsilon)\right) \in \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}) \times \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}).$$

Dado $(\alpha,\beta) \in f_{\text{sum}}^{-1}\left(W_{\hat{\ell}}(x_0,\ldots,x_m;\varepsilon)\right)$, probaremos que existe $\delta > 0$ tal que

$$W_\alpha(x_0,\ldots,x_m;\delta) \times W_\beta(x_0,\ldots,x_m;\delta) \subseteq f_{\text{sum}}^{-1}\left(W_{\hat{\ell}}(x_0,\ldots,x_m;\varepsilon)\right). \tag{13.1}$$

Notemos que la condición $(\ell_1,\ell_2) \in W_\alpha(x_0,\dots,x_m;\delta)\times W_\beta(x_0,\dots,x_m;\delta)$ es equivalente a

$$|\langle \ell_1-\alpha,x_i\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|<\delta \quad \text{y} \quad |\langle \ell_2-\beta,x_i\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|<\delta, \qquad \forall i=0,\dots,m.$$

En consecuencia, para cada $i=0,\dots,m$ y

$$(\ell_1,\ell_2)\in W_\alpha(x_0,\dots,x_m;\delta)\times W_\beta(x_0,\dots,x_m;\delta)$$

tenemos

$$\begin{aligned}|\langle \ell_1+\ell_2-\hat{\ell},x_i\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| &\le |\langle \ell_1-\alpha,x_i\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|+|\langle \ell_2-\beta,x_i\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|+|\langle \alpha+\beta-\hat{\ell},x_i\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|\\ &< 2\delta+|\langle \alpha+\beta-\hat{\ell},x_i\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|.\end{aligned}$$

Ahora bien, dado que $|\langle \alpha+\beta-\hat{\ell},x_i\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|<\varepsilon$ para todo $i=0,\dots,m$, tomando $\delta>0$ tal que

$$2\delta+|\langle \alpha+\beta-\hat{\ell},x_i\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|\le\varepsilon, \qquad \forall i=0,\dots,m,$$

obtenemos que $f_{\mathrm{sum}}(\ell_1,\ell_2)\in W_{\hat{\ell}}(x_0,\dots,x_m;\varepsilon)$. Por lo tanto (13.1) se verifica y f_{sum} resulta ser continua.

Veamos ahora que la función $f_{\mathrm{mult}}:(\mathbb{R}\times\mathbf{E},\mathscr{T}_{\mathbb{R}}\bigotimes\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}))\to(\mathbf{E},\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}))$ es continua, donde $f_{\mathrm{mult}}(\lambda,\ell)=\lambda\ell$. Similarmente a lo hecho en la parte anterior, basta probar que dados $\hat{\ell}\in\mathbf{E}^*$, $x_0,\dots,x_m\in\mathbf{E}$ y $\varepsilon>0$ tenemos que

$$f_{\mathrm{mult}}^{-1}\left(W_{\hat{\ell}}(x_0,\dots,x_m;\varepsilon)\right)\in\mathscr{T}_{\mathbb{R}}\times\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}).$$

Dado $(\lambda,\alpha)\in f_{\mathrm{sum}}^{-1}\left(W_{\hat{\ell}}(x_0,\dots,x_m;\varepsilon)\right)$, probaremos que existe $\delta>0$ tal que

$$(\lambda-\delta,\lambda+\delta)\times W_\alpha(x_0,\dots,x_m;\delta)\subseteq f_{\mathrm{mult}}^{-1}\left(W_{\hat{\ell}}(x_0,\dots,x_m;\varepsilon)\right). \tag{13.2}$$

Notemos que para todo $x\in\mathbf{E}$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle t\ell-\lambda\alpha,x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} &= t\langle \ell-\alpha,x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}+(t-\lambda)\langle\alpha,x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\\ &=(t-\lambda)\langle \ell-\alpha,x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}+\lambda\langle \ell-\alpha,x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}+(t-\lambda)\langle\alpha,x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $i=0,\dots,m$ y $(t,\ell)\in(\lambda-\delta,\lambda+\delta)\times W_\alpha(x_0,\dots,x_m;\delta)$ tenemos

$$\begin{aligned}|\langle t\ell-\hat{\ell},x_i\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| &= |\langle t\ell-\lambda\alpha,x_i\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|+|\langle\lambda\alpha-\hat{\ell},x_i\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|\\ &<\delta^2+\delta(|\lambda|+|\langle\alpha,x_i\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|)+|\langle\lambda\alpha-\hat{\ell},x_i\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|.\end{aligned}$$

Nuevamente, dado que $|\langle\lambda\alpha-\hat{\ell},x_i\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|<\varepsilon$ para todo $i=0,\dots,m$, tomando $\delta>0$ tal que

$$\delta^2+\delta(|\lambda|+|\langle\alpha,x_i\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|)\le\varepsilon, \qquad \forall i=0,\dots,m,$$

obtenemos que $f_{\mathrm{mult}}(t,\ell)\in W_{\hat{\ell}}(x_0,\dots,x_m;\varepsilon)$. Por lo tanto (13.2) se verifica y luego f_{mult} es continua.

Con esto concluimos que $(\mathbf{E}^*,\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}))$ es efectivamente un e.v.t. real.

Veamos finalmente que $(\mathbf{E}^*,\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}))$ es Hausdorff. Tomemos $\ell_1,\ell_2\in\mathbf{E}^*$ tales que $\ell_1\neq\ell_2$. Luego, existe $x\in\mathbf{E}$ tal que $\ell_1(x)\neq\ell_2(x)$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $\ell_1(x)<\alpha<\ell_2(x)$. Luego basta tomar

$$A_1=\{\ell\in\mathbf{E}^* \mid \langle\ell,x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}<\alpha\},$$

$$A_2=\{\ell\in\mathbf{E}^* \mid \langle\ell,x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}>\alpha\},$$

con lo cual $A_1\cap A_2=\emptyset$ y $\ell_1\in A_1$ y $\ell_2\in A_2$. Por lo tanto $(\mathbf{E}^*,\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}))$ es Hausdorff.

$\square$

Dado que $(\mathbf{E}^*, \sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}))$ es un e.v.t. Hausdorff, podemos afirmar lo siguiente:

- Los singleton son conjuntos cerrados débiles-$\star$ para $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})$.
- Los límites de sucesiones convergentes son únicos.
- Los compactos para la topología $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})$ (**compactos débiles-$\star$**) son cerrados débiles-$\star$.
- Si $\mathbf{E}$ es de dimensión finita, entonces $\mathbf{E}^*$ es de dimensión finita (Problema 2, Ayudantía 5). Por lo tanto, $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})$ coincide con la topología débil y fuerte:

$$\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}) = \sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}^{**}) = \mathscr{T}_{d_{\mathbf{E}^*}}$$

13.2 Convergencia de sucesiones

Notación 13.2. *Supongamos $\{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}^*$ es una sucesión que converge respecto a la topología débil-$\star$ $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})$ a $\hat{\ell} \in \mathbf{E}^*$. En tal caso diremos que $\{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a $\hat{\ell}$ en $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})$ y esto lo denotaremos indistintamente*

$$\text{“ } \ell_k \overset{\star}{\rightharpoonup} \hat{\ell} \text{ débilmente en } \sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}) \text{ ”} \qquad \text{o simplemente} \qquad \text{“ } \ell_k \overset{\star}{\rightharpoonup} \hat{\ell} \text{ ”.}$$

No confundir con la convergencia débil en $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}^{**})$!!

Si la sucesión converge con respecto a la topología fuerte (topología de la norma dual), entonces diremos que $\{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente a $\hat{\ell}$ en $(\mathbf{E}^*, \|\cdot\|_{\mathbf{E}^*})$ y esto lo denotaremos indistintamente

$$\text{“ } \ell_k \to \hat{\ell} \text{ fuertemente en } (\mathbf{E}^*, \|\cdot\|_{\mathbf{E}^*}) \text{ ”} \qquad \text{o simplemente} \qquad \text{“ } \ell_k \to \hat{\ell} \text{ ”.}$$

Usando la base de la topología débil-$\star$ $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})$, tenemos que $\ell_k \overset{\star}{\rightharpoonup} \hat{\ell}$ si y sólo si

$$\forall x_0, \dots, x_m \in \mathbf{E},\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists k_0 \in \mathbb{N}, \quad \text{tal que } \ell_k \in W_{\hat{\ell}}(x_0, \dots, x_m; \varepsilon), \quad \forall k \geq k_0$$

o equivalentemente

$$\forall x \in \mathbf{E},\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists k_0 \in \mathbb{N}, \quad \text{tal que } |\langle \ell_k - \hat{\ell}, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0.$$

Esto último corresponde a pedir que $\ell_k(x) = \langle \ell_k, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \to \langle \hat{\ell}, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \hat{\ell}(x)$ en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ para todo $x \in \mathbf{E}$. En otras palabras, la convergencia en $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})$ corresponde a la convergencia puntual de funciones lineales.

Proposición 13.2.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n., $\{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}^*$ es una sucesión y $\hat{\ell} \in \mathbf{E}^*$.

1. Si $\ell_k \to \hat{\ell}$ fuertemente en $(\mathbf{E}^*, \|\cdot\|_{\mathbf{E}^*})$, entonces $\ell_k \overset{\star}{\rightharpoonup} \hat{\ell}$ débilmente en $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})$.

Además, bajo la hipótesis que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach tenemos:

2. Si $\ell_k \overset{\star}{\rightharpoonup} \hat{\ell}$ débilmente en $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})$, entonces $\{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada y $\|\hat{\ell}\|_{\mathbf{E}^*} \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|\ell_k\|_{\mathbf{E}^*}$.
3. Si $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ es una sucesión tal que $x_k \to \bar{x}$ y $\ell_k \overset{\star}{\rightharpoonup} \hat{\ell}$, entonces $\langle \ell_k, x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \to \langle \hat{\ell}, \bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}$.

Demostración.

1. Basta notar que si $\ell_k \to \hat{\ell}$ fuertemente en $(\mathbf{E}^*, \|\cdot\|_{\mathbf{E}^*})$, entonces también converge puntualmente.
2. Notemos que la sucesión de funcionales $\{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}^*$ converge puntualmente a $\hat{\ell}$.
   Dado que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ son espacios de Banach, por el Teorema de Banach-Steinhaus tenemos

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\ell_k\|_{\mathbf{E}^*} < +\infty \quad \text{y} \quad \|\hat{\ell}\|_{\mathbf{E}^*} \leq \liminf_{k\to+\infty} \|\ell_k\|_{\mathbf{E}^*}.$$

3. Notemos que $\|x_k - \bar{x}\|_{\mathbf{E}} \to 0$ y $\langle \ell_k - \hat{\ell}, \bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \to 0$. Además, para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned}|\langle \ell_k, x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} - \langle \hat{\ell}, \bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| &\leq |\langle \ell_k, x_k - \bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| + |\langle \ell_k - \hat{\ell}, \bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| \\ &\leq \|\ell_k\|_{\mathbf{E}^*}\|x_k - \bar{x}\|_{\mathbf{E}} + |\langle \ell_k - \hat{\ell}, \bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|\end{aligned}$$

La conclusión vienen entonces de notar que, por el punto anterior, $\{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es también acotada.

□

13.3 Compacidad en la topología débil-$\star$

Teorema 13.3.1 — Banach-Alaoglu. Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. Luego $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}$ es un subconjunto compacto débil-$\star$ de $\mathbf{E}^*$.

Demostración. Idea de la demostración:

- Construir $\psi : (\mathbf{Y}, \mathscr{T}) \to (\mathbf{E}^*, \sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}))$ continua con $(\mathbf{Y}, \mathscr{T})$ un espacio topológico.
- Escribir $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}} = \psi(K)$ para algún subconjunto $K \subseteq \mathbf{Y}$ compacto.

Definamos primero la función $\varphi : \mathbf{E}^* \to \mathbb{R}^{\mathbf{E}} := \prod_{x\in\mathbf{E}} \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(\ell) = \{\langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\}_{x\in\mathbf{E}}, \qquad \forall\, \ell \in \mathbf{E}^*.$$

Claramente φ es inyectiva (por igualdad de funciones) y por lo tanto $\varphi : \mathbf{E}^* \to \mathrm{im}(\varphi)$ es biyectiva.

Sean $\mathbf{Y} := \mathrm{im}(\varphi)$ y $\psi : \mathbf{Y} \to \mathbf{E}^*$ dada por

$$\psi(y) := \varphi^{-1}(\{\langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\}_{x\in\mathbf{E}}) = \ell, \qquad \forall y \in \mathbf{Y} \text{ tal que } y = \{\langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\}_{x\in\mathbf{E}}.$$

Dado que $\mathbf{Y} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbf{E}}$ (espacio producto), la topología natural para considerar en $\mathbf{Y}$ es la topología traza

$$\mathscr{T} := \left\{ A \cap \mathbf{Y} \in \mathscr{P}\left(\mathbb{R}^{\mathbf{E}}\right) \mid A \in \bigotimes_{x\in\mathbf{E}} \mathscr{T}_{\mathbb{R}} \right\}.$$

Veamos ahora que $\psi : (\mathbf{Y}, \mathscr{T}) \to (\mathbf{E}^*, \sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}))$ es continua:

Basta probar que $\psi^{-1}\left(W_{\hat{\ell}}(x_0, \ldots, x_m; \varepsilon)\right) \in \mathscr{T}$ cualquiera sean $\hat{\ell} \in \mathbf{E}^*$, $x_0, \ldots, x_m \in \mathbf{E}$ y $\varepsilon > 0$. pues los conjuntos de la forma $W_{\hat{\ell}}(x_0, \ldots, x_m; \varepsilon)$ forman una base para la topología débil-$\star$.

Notemos que

$$\langle \hat{\ell}, x_i\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} - \varepsilon < \langle \ell, x_i\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} < \langle \hat{\ell}, x_i\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} + \varepsilon, \qquad \forall \ell \in W_{\hat{\ell}}(x_0, \ldots, x_m; \varepsilon).$$

Esto implica que

$$\psi^{-1}\left(W_{\hat{\ell}}(x_0, \ldots, x_m; \varepsilon)\right) = \varphi\left(W_{\hat{\ell}}(x_0, \ldots, x_m; \varepsilon)\right) = \prod_{i=0}^{m}\left(\langle \hat{\ell}, x_i\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} - \varepsilon, \langle \hat{\ell}, x_i\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} + \varepsilon\right) \times \prod_{x\in\mathbf{E}\setminus\{x_0,\ldots,x_m\}} \mathbb{R}.$$

Por lo tanto $\psi^{-1}\left(W_{\hat{\ell}}(x_0, \ldots, x_m; \varepsilon)\right)$ es abierto en la topología producto, y a posteriori, abierto en en la topología $\mathscr{T}$.

Definamos $K = \varphi\left(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}\right)$ y notemos que dado $\ell \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}$ tenemos

$$-\|x\|_{\mathbf{E}} \leq \langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \leq \|x\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Equivalentemente

$$\langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \in [-\|x\|_{\mathbf{E}}, \|x\|_{\mathbf{E}}], \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

En particular, tenemos que

$$K \subseteq \prod_{x\in\mathbf{E}} [-\|x\|_{\mathbf{E}}, \|x\|_{\mathbf{E}}].$$

Para cada $x \in \mathbf{E}$, $[-\|x\|_{\mathbf{E}}, \|x\|_{\mathbf{E}}]$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, luego por el Teorema de Tychonoff,

$$\left(\prod_{x\in\mathbf{E}} \mathbf{Y}_x, \bigotimes_{x\in\mathbf{E}} \mathscr{T}_x\right), \quad \text{es un espacio topológico compacto,}$$

donde $\mathbf{Y}_x := [-\|x\|_{\mathbf{E}}, \|x\|_{\mathbf{E}}]$ y $\mathscr{T}_x$ denota la topología traza en $\mathbf{Y}_x$ respecto $\mathscr{T}_{\mathbb{R}}$.

Dado que $K = \varphi\left(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}\right)$, tenemos que $\psi(K) = \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}$.

Luego, para concluir basta ver que K es cerrado en el espacio producto $\left(\mathbb{R}^{\mathbf{E}}, \bigotimes_{x\in\mathbf{E}} \mathscr{T}_{\mathbb{R}}\right)$, ya que $K \subseteq \prod_{x\in\mathbf{E}} \mathbf{Y}_x$, con este último siendo un compacto de este espacio producto.

Notemos que

$$K = \varphi\left(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}\right) = \left\{ \{y_x\}_{x\in\mathbf{E}} \in \prod_{x\in\mathbf{E}} \mathbf{Y}_x \mid y_{x_1+x_2} = y_{x_1} + y_{x_2},\ \forall\, x_1, x_2 \in \mathbf{E}, \quad y_{\lambda x} = \lambda y_x,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbf{E} \right\},$$

puesto que cada $y_x = \langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}$ para algún $\ell \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}$. Esto implica que K coincide con

$$\bigcap_{x_1,x_2\in\mathbf{E}} \left\{ \{y_x\}_{x\in\mathbf{E}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{E}} \mid y_{x_1+x_2} - y_{x_1} - y_{x_2} = 0 \right\} \cap \bigcap_{\lambda\in\mathbb{R},\ x\in\mathbf{E}} \left\{ \{y_x\}_{x\in\mathbf{E}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{E}} \mid y_{\lambda x} - \lambda y_x = 0 \right\} \cap \prod_{x\in\mathbf{E}} \mathbf{Y}_x.$$

Dado $\bar{x} \in \mathbf{E}$, la proyección $\pi_{\bar{x}} : \left(\mathbb{R}^{\mathbf{E}}, \bigotimes_{x\in\mathbf{E}} \mathscr{T}_{\mathbb{R}}\right) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_{\mathbb{R}})$ es continua, donde $\pi_{\bar{x}}\left(\{y_x\}_{x\in\mathbf{E}}\right) = y_{\bar{x}}$, para cada $\{y_x\}_{x\in\mathbf{E}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{E}}$. En efecto, basta notar que $\pi_{\bar{x}}^{-1}(A) = A \times \prod_{x\in\mathbf{E}\setminus\{\bar{x}\}} \mathbb{R}$ para todo $A \subseteq \mathbb{R}$. Esto a su vez implica que, dados $x, x_1, x_2 \in \mathbf{E}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, las siguiente funciones son también continuas

$$\{y_x\}_{x\in\mathbf{E}} \mapsto f_{x_1,x_2}\left(\{y_x\}_{x\in\mathbf{E}}\right) := y_{x_1+x_2} - y_{x_1} - y_{x_2} \quad \text{y} \quad \{y_x\}_{x\in\mathbf{E}} \mapsto g_{x,\lambda}\left(\{y_x\}_{x\in\mathbf{E}}\right) := y_{\lambda x} - \lambda y_x,$$

y en consecuencia los conjuntos $f_{x_1,x_2}^{-1}(\{0\})$ y $g_{x,\lambda}^{-1}(\{0\})$ son cerrados en $\left(\mathbb{R}^{\mathbf{E}}, \bigotimes_{x\in\mathbf{E}} \mathscr{T}_{\mathbb{R}}\right)$.

Notemos que

$$f_{x_1,x_2}^{-1}(\{0\}) = \left\{ \{y_x\}_{x\in\mathbf{E}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{E}} \mid y_{x_1+x_2} - y_{x_1} - y_{x_2} = 0 \right\}$$

y

$$g_{x,\lambda}^{-1}(\{0\}) = \left\{ \{y_x\}_{x\in\mathbf{E}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{E}} \mid y_{\lambda x} - \lambda y_x = 0 \right\}.$$

Por lo tanto K es cerrado en $\left(\mathbb{R}^{\mathbf{E}}, \bigotimes_{x\in\mathbf{E}} \mathscr{T}_{\mathbb{R}}\right)$, pues corresponde a la intersección de conjuntos cerrados de ese espacio. □

13.4 Teorema de Hahn-Banach Geométrico

Ahora vamos a presentar una versión del Teorema de Hahn-Banach geométrico especializado para la topología débil-$\star$. Este resultado nos permitirá demostrar de forma sencilla un resultado fundamental acerca de la densidad de la inyección canónica.

13.4.1 Hahn-Banach Geométrico, primera versión

Recordemos que el Teorema de Hahn-Banach Geométrico en el espacio $\mathbf{E}^*$ nos dice que dados dos conjuntos convexos, disjuntos y no vacíos $A,B \subseteq \mathbf{E}^*$, si A es abierto (fuerte), entonces existe $\varphi \in \mathbf{E}^{**} \setminus \{0\}$ tal que

$$\langle \varphi, \alpha \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} \leq \langle \varphi, \beta \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}, \qquad \forall\, \alpha \in A,\ \forall\, \beta \in B.$$

En muchos casos nos gustaría que $\varphi = J_x$, donde J_x es un funcional de evaluación $J_x : \mathbf{E}^* \to \mathbb{R}$

$$J_x(\ell) = \langle J_x, \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} = \ell(x).$$

Sin embargo, bajo el contexto que estamos trabajando no es posible asegurar esto.

Esto se debe a que el hiperplano que separa a A y B es cerrado fuerte, no necesariamente cerrado débil-$\star$.

Teorema 13.4.1 — Hahn-Banach Geométrico, primera versión topología $\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})$. Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y que $A,B \subseteq \mathbf{E}^*$ son dos conjuntos convexos, disjuntos y no vacíos. Si A es abierto débil-$\star$, entonces existe $x \in \mathbf{E} \setminus \{0\}$ tal que

$$\langle \alpha, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \leq \langle \beta, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \qquad \forall\, \alpha \in A,\ \forall\, \beta \in B.$$

Demostración. Dado que $A \subseteq \mathbf{E}^*$ es un abierto débil-$\star$, es decir $A \in \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})$, también es un abierto fuerte en $(\mathbf{E}^*, \|\cdot\|_{\mathbf{E}^*})$.

Por el Teorema de Hahn-Banach Geométrico (primera versión), existe $\varphi \in \mathbf{E}^{**} \setminus \{0\}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle \varphi, \alpha \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} \leq \lambda \leq \langle \varphi, \beta \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} \qquad \forall\, \alpha \in A,\ \forall\, \beta \in B.$$

Dado que A es abierto débil-$\star$, sabemos entonces que existen $\hat{\ell} \in A$, $\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_m \in \mathbf{E}$ y $\bar{\delta} > 0$ tales que $W_{\hat{\ell}}(\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_m; \bar{\delta}) \subseteq A$. Probemos primero que

$$|\langle \varphi, \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}| < \lambda + 1 - \langle \varphi, \hat{\ell} \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}, \qquad \forall\, \ell \in W_0(\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_m; \bar{\delta}). \tag{13.3}$$

Como $\langle \varphi, \alpha \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} \leq \lambda$ para todo $\alpha \in A$, tenemos $\langle \varphi, \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} < \lambda + 1$ para todo $\ell \in W_{\hat{\ell}}(\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_m; \bar{\delta})$. Además, si $\ell \in W_{\hat{\ell}}(\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_m; \bar{\delta})$ entonces $2\hat{\ell} - \ell \in W_{\hat{\ell}}(\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_m; \bar{\delta})$ y por tanto,

$$\langle \varphi, 2\hat{\ell} - \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} < \lambda + 1, \qquad \forall\, \ell \in W_{\hat{\ell}}(\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_m; \bar{\delta}),$$

de donde deducimos que

$$\langle \varphi, \hat{\ell} \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} - \lambda - 1 < \langle \varphi, \ell - \hat{\ell} \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} < \lambda + 1 - \langle \varphi, \hat{\ell} \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}, \qquad \forall\, \ell \in W_{\hat{\ell}}(\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_m; \bar{\delta}).$$

Notando que $W_{\hat{\ell}}(\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_m; \bar{\delta}) = \hat{\ell} + W_0(\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_m; \bar{\delta})$, pues $(\mathbf{E}^*, \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}))$ es un e.v.t., obtenemos (13.3).

Veamos ahora que $\varphi : (\mathbf{E}^*, \sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_{\mathbb{R}})$ es continua.

Dado que φ es lineal, tenemos que

$$\varphi(\ell) = \varphi(\bar{\ell}) + \varphi(\ell - \bar{\ell}), \qquad \forall \ell, \bar{\ell} \in \mathbf{E}^*.$$

Luego, por composición y álgebra de funciones continuas, basta probar que φ es continua en $\ell = 0$.

Es decir, debemos demostrar que dado $\varepsilon > 0$, existen $x_0, \ldots, x_m \in \mathbf{E}$ y $\delta > 0$ tales que

$$|\langle \varphi, \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*}| < \varepsilon, \qquad \forall\, \ell \in W_0(x_0, \ldots, x_m; \delta).$$

Dado que $0 \in W_0(\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_m; \bar{\delta})$, por (13.3) tenemos que $\lambda_0 = \lambda + 1 - \langle \varphi, \hat{\ell}\, \rangle_{\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*} > 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Notemos que (13.3) se puede escribir de la siguiente forma

$$\left| \left\langle \varphi, \frac{\varepsilon}{\lambda_0} \ell \right\rangle_{\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*} \right| < \varepsilon, \qquad \forall\, \ell \in W_0(\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_m; \bar{\delta}).$$

Definamos $\ell_0 = \dfrac{\varepsilon}{\lambda_0} \ell$. Notemos que para todo $i = 0, \ldots, m$ tenemos

$$|\langle \ell, \bar{x}_i \rangle_{\mathbf{E}^*, \mathbf{E}}| < \bar{\delta} \quad \Longleftrightarrow \quad \left| \left\langle \frac{\varepsilon}{\lambda_0} \ell, \frac{\lambda_0}{\varepsilon} \bar{x}_i \right\rangle_{\mathbf{E}^*, \mathbf{E}} \right| < \bar{\delta},$$

con lo cual

$$\ell \in W_0(\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_m; \bar{\delta}) \quad \Longleftrightarrow \quad \ell_0 \in W_0(x_0, \ldots, x_m; \bar{\delta}),$$

en donde $x_i = \dfrac{\lambda_0}{\varepsilon} \bar{x}_i$ para todo $i = 0, \ldots, m$.

Por lo tanto, considerando las definiciones previas y $\delta = \bar{\delta}$, obtenemos

$$|\langle \varphi, \ell_0 \rangle_{\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*}| < \varepsilon, \qquad \forall\, \ell_0 \in W_0(x_0, \ldots, x_m; \delta).$$

Esto implica que $\varphi : (\mathbf{E}^*, \sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_{\mathbb{R}})$ es continua en $\ell = 0$, y a posteriori, continua.

Veamos ahora que φ es efectivamente un funcional de evaluación.

Dado que $\varphi : (\mathbf{E}^*, \sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_{\mathbb{R}})$ es continua en $\ell = 0$, existen $x_0, \ldots, x_m \in \mathbf{E}$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$|\langle \varphi, \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*}| < 1, \qquad \forall\, \ell \in W_0(x_0, \ldots, x_m; \varepsilon).$$

Notemos que si $\langle \ell, x_i \rangle_{\mathbf{E}^*, \mathbf{E}} = 0$ para todo $i = 0, \ldots, m$, entonces $|\langle \varphi, \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*}| < \lambda$ para cualquier $\lambda > 0$. En efecto, dado $\lambda > 0$ tenemos que $\frac{1}{\lambda} \ell \in W_0(x_0, \ldots, x_m; \varepsilon)$, con lo cual $|\langle \varphi, \frac{1}{\lambda} \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*}| < 1$.

En particular, podemos deducir que

$$\langle \ell, x_i \rangle_{\mathbf{E}^*, \mathbf{E}} = 0, \quad \forall\, i = 0, \ldots, m \quad \Longrightarrow \quad \langle \varphi, \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*} = 0.$$

Finalmente, gracias al Lema 13.1 (que probaremos a continuación), existen $\lambda_0, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que si $\bar{x} = \sum_{i=0}^m \lambda_i x_i$, entonces tenemos

$$\langle \varphi, \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*} = \sum_{i=0}^m \lambda_i \langle \ell, x_i \rangle_{\mathbf{E}^*, \mathbf{E}} = \left\langle \ell, \sum_{i=0}^m \lambda_i x_i \right\rangle_{\mathbf{E}^*, \mathbf{E}} = \langle J_{\bar{x}}, \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*} \qquad \forall \ell \in \mathbf{E}^*. \quad \square$$

Lema 13.1 Supongamos que $\mathbf{F}$ es un espacio vectorial y $\varphi, \varphi_0, \ldots, \varphi_m : \mathbf{F} \to \mathbb{R}$ son funciones lineales. Si la condición:

$$\varphi_i(y) = 0, \quad \forall\, i = 0, \ldots, m \quad \Longrightarrow \quad \varphi(y) = 0$$

se cumple, entonces existen $\lambda_0, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que $\varphi = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \varphi_i$.

Demostración. Sea $\Psi : \mathbf{F} \to \mathbb{R}^{m+2}$ dada por

$$\Psi(v) = (\varphi(v), \varphi_0(v), \ldots, \varphi_m(v)), \qquad \forall\, v \in \mathbf{F}.$$

Por hipótesis, tenemos al vector $(1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{m+1}$ no pertenece a $\Psi(\mathbf{F})$. Ahora bien, Ψ es lineal, y por lo tanto $\Psi(\mathbf{F})$ es convexo. Luego, por el Teorema de Hahn-Banach geométrico (segunda versión) en $\mathbb{R}^{m+1}$ tenemos que existe $\eta \in \mathbb{R}^{m+1}$ con $\eta \neq 0$ tal que $\eta = (\hat{\eta}, \eta_0, \ldots, \eta_m)$,

$$\hat{\eta} < \hat{\eta}\varphi(v) + \sum_{i=0}^{m} \eta_i \varphi_i(v), \qquad \forall\, v \in \mathbf{F}.$$

Evaluando en $v = 0$, tenemos que $\hat{\eta} < 0$. Reescalando entonces podemos asumir que $\hat{\eta} = -1$.

Por otro lado evaluando en $\tilde{v} = tv$ con $v \in \mathbf{F}$ y $t \in \mathbb{R}$,

$$-1 < \sum_{i=0}^{m} \eta_i \varphi_i(tv) - \varphi(tv) = t\left(\sum_{i=0}^{m} \eta_i \varphi_i(v) - \varphi(v)\right).$$

como $t \in \mathbb{R}$ es libre, entonces necesariamente $\sum_{i=0}^{m} \eta_i \varphi_i(v) = \varphi(v)$. De otra forma, obtenemos una contradicción tomando

$$t = -\frac{1}{\sum_{i=0}^{m} \eta_i \varphi_i(v) - \varphi(v)}.$$

Para concluir, basta tomar $\lambda_i = \eta_i$ para todo $i = 0, \ldots, m$.

□

13.4.2 Hahn-Banach Geométrico, segunda versión

Teorema 13.4.2 — Hahn-Banach Geométrico, segunda versión topología $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})$. Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y que $A, B \subseteq \mathbf{E}^*$ son dos conjuntos convexos, disjuntos y no vacíos. Si A es compacto débil-$\star$ y B es cerrado débil-$\star$, entonces existen $x \in \mathbf{E} \setminus \{0\}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sup_{\alpha \in A} \langle \alpha, x \rangle_{\mathbf{E}^*, \mathbf{E}} < \lambda < \inf_{\beta \in B} \langle \beta, x \rangle_{\mathbf{E}^*, \mathbf{E}}.$$

Demostración. Notemos que si $\mathbf{E}^* \setminus (B - A)$ fuese abierto débil-$\star$, dado que $0 \notin B - A$ pues $A \cap B = \emptyset$, existirían $x_0, \ldots, x_m \in \mathbf{E}$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$W_0(x_0, \ldots, x_m; \varepsilon) \cap (B - A) = \emptyset.$$

Claramente $V := W_0(x_1, \ldots, x_m; \varepsilon)$ y $B - A$ son conjuntos convexos de $\mathbf{E}^*$, pues A y B lo son.

Luego por el Teorema de Hahn-Banach en $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})$ (primera versión) existiría $x \in \mathbf{E} \setminus \{0\}$ tal que

$$\langle \ell, x \rangle_{\mathbf{E}^*, \mathbf{E}} \leq \langle \beta - \alpha, x \rangle_{\mathbf{E}^*, \mathbf{E}}, \qquad \forall\, \ell \in V,\ \forall\, \alpha \in A,\ \forall\, \beta \in B, \tag{13.4}$$

Dado que V es abierto débil-$\star$, en particular es abierto fuerte, entonces existe $r>0$ tal que $\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}(0,r)\subseteq V$, (pues $0\in V$) y por lo tanto, usando el hecho que V es un conjunto simétrico, de (13.4), tendríamos que

$$r\|x\|_{\mathbf{E}}=\sup_{\|\ell\|_{\mathbf{E}^*}\le r}|\langle \ell,x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|\le \langle \beta-\alpha,x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \qquad \forall\,\alpha\in A,\ \forall\,\beta\in B.$$

Finalmente, tomando supremo sobre los $\alpha\in A$ y luego ínfimo sobre los $\beta\in B$, obtendríamos

$$\sup_{\alpha\in A}\langle \alpha,x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}<\sup_{\alpha\in A}\langle \alpha,x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}+r\|x\|_{\mathbf{E}}\le \inf_{\beta\in B}\langle \beta,x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \qquad \forall\,\alpha\in A,\ \forall\,\beta\in B.$$

Para concluir probaremos que $\mathbf{E}^*\setminus(B-A)$ es abierto débil-$\star$.

Fijemos $\hat{\ell}\notin B-A$ arbitrario. En particular, para cualquier $\alpha\in A$, tenemos $\hat{\ell}+\alpha\notin B$, o bien, $\hat{\ell}+\alpha\in\mathbf{E}^*\setminus B$. Dado que $\mathbf{E}^*\setminus B$ es abierto débil-$\star$ y $(\mathbf{E}^*,\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}))$ es un e.v.t., para todo $\alpha\in A$, existe $W(\alpha)$ una vecindad débil-$\star$ de $\ell=0$, tal que

$$\hat{\ell}+\alpha+W(\alpha)\subseteq \mathbf{E}^*\setminus B.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos tomar $W(\alpha)$ de la forma usual

$$W(\alpha)=W_0(x_0^\alpha,\dots,x_m^\alpha;\varepsilon_\alpha), \qquad \text{con } x_0^\alpha,\dots,x_m^\alpha\in\mathbf{E} \text{ y } \varepsilon_\alpha>0.$$

Notemos que $A\subseteq\bigcup_{\alpha\in A}\alpha+\frac{1}{2}W(\alpha)$, luego como A es compacto débil-$\star$, existen $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in A$ tales que

$$A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\alpha_i+\frac{1}{2}W(\alpha_i).$$

Veamos ahora que $V:=W+\hat{\ell}$, con $W:=\frac{1}{2}\bigcap_{i=1}^{n}W(\alpha_i)$, satisface la condición $V\cap(B-A)=\emptyset$.

Notemos primero que W es abierto débil-$\star$ y contiene al cero. Argumentemos por contradicción. Supongamos que existe $w\in W$ tal que $w+\hat{\ell}\in B-A$, es decir, existe $\alpha\in A$ tal que $w+\hat{\ell}+\alpha\in B$. Luego, para algún $i\in\{1,\dots,n\}$ tendríamos que $\alpha\in\alpha_i+\frac{1}{2}W(\alpha_i)$, y por lo tanto

$$w+\hat{\ell}+\alpha\in\hat{\ell}+\frac{1}{2}W(\alpha_i)+\alpha_i+\frac{1}{2}W(\alpha_i)\subseteq\hat{\ell}+\alpha_i+W(\alpha_i)\subseteq\mathbf{E}^*\setminus B.$$

En consecuencia, $V\cap(B-A)=\emptyset$, y por lo tanto $\mathbf{E}^*\setminus(B-A)$ es abierto débil-$\star$. □

13.4.3 Densidad de la inyección canónica

Ahora nos enfocaremos en demostrar un resultado fundamental acerca de la densidad de la inyección canónica. Para esto, primero necesitamos ver el siguiente lema.

Lema 13.2 Si $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y $A\subseteq\mathbf{E}^*$ es un conjunto convexo, entonces $\overline{A}^{\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})}$ es también convexo.

Demostración. Sean $\ell_1,\ell_2\in S:=\overline{A}^{\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})}$ y $\lambda\in[0,1]$. Debemos probar que

$$\ell^\lambda:=\lambda\ell_1+(1-\lambda)\ell_2\in S.$$

Es suficiente probar que para cualquier $x_0,\dots,x_m\in\mathbf{E}$ y $\varepsilon>0$, tenemos

$$W_{\ell^\lambda}(x_0,\dots,x_m;\varepsilon)\cap A\neq\emptyset.$$

Como $\ell_1, \ell_2 \in S$, existen $h_1, h_2 \in A$ tales que, para cada $i = 1, 2$, tenemos

$$h_i \in W_{\ell_i}(x_0, \ldots, x_m; \varepsilon) \cap A.$$

Luego, como A es convexo y $W_{\ell_i}(x_0, \ldots, x_m; \varepsilon) = \ell_i + W_0(x_0, \ldots, x_m; \varepsilon)$ para cada para $i = 1, 2$, tenemos

$$\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2 \in A \quad \text{y} \quad \lambda h_1 + (1-\lambda)h_2 \in \ell^\lambda + \lambda W_0(x_0, \ldots, x_m; \varepsilon) + (1-\lambda)W_0(x_0, \ldots, x_m; \varepsilon).$$

Finalmente, obtenemos el resultado buscado notando que $W_{\ell^\lambda}(x_0, \ldots, x_m; \varepsilon) = \ell^\lambda + W_0(x_0, \ldots, x_m; \varepsilon)$ y

$$\lambda W_0(x_0, \ldots, x_m; \varepsilon) + (1-\lambda)W_0(x_0, \ldots, x_m; \varepsilon) \subseteq W_0(x_0, \ldots, x_m; \varepsilon).$$

□

Lema — Goldstine. Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. Luego,

$$\overline{J\left(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}\right)}^{\sigma(\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*)} = \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}}.$$

Demostración. Recordemos que $\|J_x\|_{\mathbf{E}^{**}} = \|x\|_{\mathbf{E}}$ para todo $x \in \mathbf{E}$. En particular, tenemos que

$$J\left(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}\right) \subseteq \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}}.$$

Gracias al Teorema de Banach-Alaoglu, $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}}$ es compacto débil-$\star$, y en particular, cerrado débil-$\star$ en $\mathbf{E}^{**}$. Luego tenemos $\overline{J\left(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}\right)}^{\sigma(\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*)} \subseteq \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}}$.

Supongamos por contradicción que existe $\varphi \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}} \setminus \overline{J\left(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}\right)}^{\sigma(\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*)}$ y denotemos por

$$S := \overline{J\left(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}\right)}^{\sigma(\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*)}.$$

Notemos primero que $\{\varphi\} \subseteq \mathbf{E}^{**}$ es compacto débil-$\star$, convexo y no vacío. Por otro lado, S es cerrado débil-$\star$ y no vacío. Además, por el Lema 13.2 también tenemos que S se convexo, entonces por el Teorema de Hahn-Banach para la topología débil-$\star$ (segunda versión) en $\mathbf{E}^{**}$, existen $\ell \in \mathbf{E}^*$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sup_{\|x\|_{\mathbf{E}} \le 1} \langle J_x, \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} < \lambda < \langle \varphi, \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}, \qquad \forall x \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}.$$

Notando que

$$\|\ell\|_{\mathbf{E}^*} = \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}} \le 1} \langle \ell, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}} \le 1} \langle J_x, \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} \quad \text{y} \quad \langle \varphi, \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} \le \|\ell\|_{\mathbf{E}^*}$$

pues $\|\varphi\|_{\mathbf{E}^{**}} \le 1$, obtenemos $\|\ell\|_{\mathbf{E}^*} < \lambda < \|\ell\|_{\mathbf{E}^*}$, lo que es absurdo. □

14. Topología débil y espacios reflexivos

Ahora vamos a introducir la noción de espacios reflexivos y estudiaremos su relación con la compacidad en la topología débil

Definición 14.0.1 Diremos que un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es **reflexivo** si la inyección canónica es sobreyectiva, i.e. $J(\mathbf{E}) = \mathbf{E}^{**}$:

$$\forall \varphi \in \mathbf{E}^{**},\ \exists x \in \mathbf{E} \text{ tal que } \varphi = J_x.$$

- En general, si $\mathbf{E}$ es reflexivo, entonces uno identifica $\mathbf{E}^{**}$ con $\mathbf{E}$.
- Si $\mathbf{E}^{**} \cong \mathbf{E}$ entonces $\mathbf{E}$ no es necesariamente reflexivo, la isometría debe ser la inyección canónica.
- Todo espacio reflexivo es un espacio de Banach:
  - Si $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ es una sucesión de Cauchy, entonces $\{J_{x_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}^{**}$ es una sucesión de Cauchy.
  - Dado $(\mathbf{E}^{**}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}^{**}})$ es siempre un espacio de Banach, existe $\varphi \in \mathbf{E}^{**}$ tal que $J_{x_k} \to \varphi$ (fuertemente).
  - Si $\mathbf{E}$ es reflexivo, existe $x \in \mathbf{E}$ tal que $\varphi = J_x$.
  - Dado que $\|x_k - x\|_{\mathbf{E}} = \|J_{x_k} - J_x\|_{\mathbf{E}^{**}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $x_k \to x$ (fuertemente).

Antes de continua, veamos algunas propiedades de continuidad de la inyección canónica, que no serán de utilidad más adelante.

Proposición 14.0.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. Luego, $J : (\mathbf{E}, \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)) \to (\mathbf{E}^{**}, \sigma(\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*))$ es continua. Si además $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es reflexivo, entonces $J^{-1} : (\mathbf{E}^{**}, \sigma(\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*)) \to (\mathbf{E}, \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*))$ es continua.

Demostración. Notemos que dado $\bar{x} \in \mathbf{E}$, $\ell_0, \ldots, \ell_m \in \mathbf{E}^*$ y $\varepsilon > 0$, tenemos

$$J^{-1}(W_{J(\bar{x})}(\ell_1, \cdots, \ell_m; \varepsilon)) = V_{\bar{x}}(\ell_1, \ldots, \ell_m; \varepsilon).$$

En efecto, basta notar que

$$J^{-1}(W_{J(\bar{x})}(\ell_1, \cdots, \ell_m; \varepsilon)) = \bigcap_{i=0}^{m} J^{-1}\{\varphi \in \mathbf{E}^{**} \mid |\langle \varphi - J_{\bar{x}}, \ell_i \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}| < \varepsilon\}$$

y que para cada $i = 0, \ldots, m$ tenemos

$$\begin{aligned} J^{-1}\{\varphi \in \mathbf{E}^{**} \mid |\langle \varphi - J_{\bar{x}}, \ell_i \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}| < \varepsilon\} &= \{x \in \mathbf{E} \mid |\langle J_x - J_{\bar{x}}, \ell_i \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}| < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbf{E} \mid |\langle \ell_i, x - \bar{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Luego, como $V_{\bar{x}}(\ell_1, \ldots, \ell_m; \varepsilon)$ es una vecindad abierta débil de $\bar{x}$, obtenemos la continuidad de la inyección canónica J.

Por otro lado, si $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es reflexivo, entonces tenemos

$$(J^{-1})^{-1}(V_{\bar{x}}(\ell_0, \ldots, \ell_m; \varepsilon)) = J(V_{\bar{x}}(\ell_1, \ldots, \ell_m; \varepsilon)) = W_{J(\bar{x})}(\ell_1, \cdots, \ell_m; \varepsilon).$$

También, dado $\bar{\varphi} \in \mathbf{E}^{**}$, existe $\bar{x} \in \mathbf{E}$ tal que $\bar{\varphi} = J(\bar{x})$.

Como $W_{J(\bar{x})}(\ell_1, \cdots, \ell_m; \varepsilon)$ es una vecindad abierto débil-$\star$ de $\bar{\varphi}$, obtenemos la continuidad de la inversa de la inyección canónica. □

14.1 Compacidad débil en espacios reflexivos

Teorema 14.1.1 — Kakutani. Un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es reflexivo si y sólo si $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$ es compacto para la topología débil $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)$.

Demostración. Supongamos primero que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es reflexivo. Gracias al Teorema de Banach-Alaoglu, $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}}$ es compacto débil$-\star$ en $\mathbf{E}^{**}$ (en la topología $\sigma(\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*)$).

Además como J es una isometría tenemos que

$$J^{-1}(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}}) = \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}.$$

Por la Proposición 14.0.1, tenemos que $J^{-1} : (\mathbf{E}^{**}, \sigma(\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*)) \to (\mathbf{E}, \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*))$ es continua. Luego $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$ es compacto en $(\mathbf{E}, \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*))$, es decir, es compacto débil.

Supongamos ahora que $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$ es compacto débil en $(\mathbf{E}, \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*))$. Por la Proposición 14.0.1, tenemos que $J : (\mathbf{E}, \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)) \to (\mathbf{E}^{**}, \sigma(\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*))$ es continua. Luego $J\left(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}\right)$ es compacto débil-$\star$, en particular es cerrado débil-$\star$ en $\sigma(\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*)$. En consecuencia, por el Lema de Goldstine, tenemos

$$J(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}) = \overline{J(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}})}^{\sigma(\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*)} = \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}}.$$

A partir de esto podemos, por homotecia, concluir que $J(\mathbf{E}) = \mathbf{E}^{**}$, es decir, $\mathbf{E}$ es reflexivo. □

Veamos ahora algunas consecuencias de este resultado.

Corolario 14.1.2 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es reflexivo y que $K \subseteq \mathbf{E}$ es un subconjunto cerrado (fuerte), convexo y acotado. Entonces K es compacto débil en $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)$.

Demostración. K es cerrado fuerte y convexo, entonces K es cerrado débil en $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)$.Por otro lado, dado que K es acotado, existe $r > 0$ tal que $K \subseteq \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,r)}$. Por el Teorema de Kakutani, $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,r)}$ es compacto débil. Luego, necesariamente K es compacto débil. □

Corolario 14.1.3 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es reflexivo y $M \subseteq \mathbf{E}$ es un s.e.v. cerrado. Luego, $(M, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es reflexivo.

Demostración. Por el Teorema de Kakutani, basta ver que $\overline{\mathbb{B}_M} = \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}} \cap M$ es compacto débil en $\sigma(M, M^*)$. Para esto, notemos primero que la topología débil $\sigma(M, M^*)$ es la topología traza en M asociada a $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)$. Fijemos $\bar{x} \in M$ y $\varepsilon > 0$.

- Sea $V = \{x \in \mathbf{E} \mid |\langle \ell_i, x - \bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| < \varepsilon, \forall i = 0, \ldots, m\} \in \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)$ con $\ell_0, \ldots, \ell_m \in \mathbf{E}^*$. Claramente, cada $\ell_i|_M \in M^*$, luego tenemos que
$$V \cap M = \{x \in M \mid |\langle \ell_i|_M, x - \bar{x}\rangle_{M^*,M}| < \varepsilon,\ \forall i = 0, \ldots, m\} \in \sigma(M, M^*).$$
Dado que V es un elemento arbitrario de la base de $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)$, concluimos que
$$\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)|_M \subseteq \sigma(M, M^*).$$
- Sea $V^M = \{x \in M \mid |\langle \ell_i, x - \bar{x}\rangle_{M^*,M}| < \varepsilon,\ \forall i = 0, \ldots, m\} \in \sigma(M, M^*)$, con $\ell_0, \ldots, \ell_m \in M^*$. Por el Corolario 2.3.3, para cada $i = 0, \ldots, m$, existe $\hat{\ell}_i \in \mathbf{E}^*$ tal que $\hat{\ell}_i|_M = \ell_i$. Por lo tanto,
$$V^M = \{x \in \mathbf{E} \mid |\langle \hat{\ell}_i, x - \bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| < \varepsilon, \forall i = 0, \ldots, m\} \cap M \in \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)|_M.$$
Dado que V^M es un elemento arbitrario de la base de $\sigma(M, M^*)$, tenemos que
$$\sigma(M, M^*) \subseteq \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)|_M.$$

Dado que $\mathbf{E}$ es reflexivo, entonces $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$ es compacto para la topología débil $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)$. Notemos también que M es cerrado débil pues M es cerrado fuerte y convexo. Luego, dado que $\overline{\mathbb{B}_M} = \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}} \cap M$, tenemos que $\overline{\mathbb{B}_M}$ es cerrado débil en $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)$. Por lo tanto $\overline{\mathbb{B}_M}$ es compacto débil en $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)$, y en consecuencia, compacto débil en $\sigma(M, M^*)$, □

Corolario 14.1.4 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach. Luego $\mathbf{E}$ es reflexivo si y sólo si $\mathbf{E}^*$ es reflexivo.

Demostración. Supongamos primero que $\mathbf{E}$ es reflexivo, y veamos que dado $\xi \in \mathbf{E}^{***}$, existe $\ell \in \mathbf{E}^*$ tal que
$$\langle \xi, \varphi\rangle_{\mathbf{E}^{***},\mathbf{E}^{**}} = \langle \varphi, \ell\rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}, \qquad \forall \varphi \in \mathbf{E}^{**}.$$
Definamos $\ell(x) := \langle \xi, J(x)\rangle_{\mathbf{E}^{***},\mathbf{E}^{**}}$ para todo $x \in \mathbf{E}$. Claramente, $\ell : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ es lineal.

Notemos además $\ell \in \mathbf{E}^*$, pues es un operador acotado pues:
$$|\ell(x)| = |\langle \xi, J(x)\rangle_{\mathbf{E}^{***},\mathbf{E}^{**}}| \leq \|\xi\|_{\mathbf{E}^{***}} \|J(x)\|_{\mathbf{E}^{**}} = \|\xi\|_{\mathbf{E}^{***}} \|x\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$
Finalmente, dado $\varphi \in \mathbf{E}^{**}$, existe $x \in \mathbf{E}$ tal que $\varphi = J(x)$, pues $\mathbf{E}$ es reflexivo, y en consecuencia
$$\langle \xi, \varphi\rangle_{\mathbf{E}^{***},\mathbf{E}^{**}} = \langle \xi, J(x)\rangle_{\mathbf{E}^{***},\mathbf{E}^{**}} = \langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle J(x), \ell\rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} = \langle \varphi, \ell\rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}.$$

Supongamos ahora que $\mathbf{E}^*$ es reflexivo. Por la parte anterior, tenemos que $\mathbf{E}^{**}$ es también reflexivo.Como $\mathbf{E}$ es un espacio de Banach, tenemos que $M := J(\mathbf{E})$ es un s.e.v. cerrado (fuerte) de $\mathbf{E}^{**}$. Luego, por el Corolario 14.1.3, tenemos que M es un espacio reflexivo.

Sea $L : M \to \mathbf{E}$ definido por $L(y) = x$ tal que $J(x) = y$ para todo $y \in M = J(\mathbf{E})$. No es difícil ver que L es un operador lineal, biyectivo y acotado (respecto a la norma $\|\cdot\|_{\mathbf{E}^{**}}$ en $M \subseteq \mathbf{E}^{**}$). De hecho es una isometría:

$$\|L(y)\|_{\mathbf{E}} = \|x\|_{\mathbf{E}} = \|J(x)\|_{\mathbf{E}^{**}} = \|y\|_{\mathbf{E}^{**}}, \qquad \forall y \in M.$$

Gracias a la Proposición 12.2.2, $L : (M, \sigma(M, M^*)) \to (\mathbf{E}, \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*))$ es una función continua. Combinando esto con el Teorema de Kakutani, tenemos que $L(\overline{\mathbb{B}_M})$ es compacto débil en $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)$.

Dado que $L(\overline{\mathbb{B}_M}) = \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$, usando nuevamente el Teorema de Kakutani, deducimos que $\mathbf{E}$ es reflexivo.

□

14.2 Aplicación en Optimización

Ahora veremos algunas consecuencias respecto a la existencia de soluciones óptimas de problemas de optimización. Un concepto que juega un rol fundamente en este caso es el se semicontinuidad inferior.

Definición 14.2.1 Supongamos que $(\mathbf{X}, \mathscr{T})$ es un e.t., diremos que una función $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ es semicontinua inferior (s.c.i.) para la topología $\mathscr{T}$ si $\mathrm{epi}(f) = \{(x,s) \in \mathbf{X} \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq s\}$ es cerrado en $(\mathbf{X} \times \mathbb{R}, \mathscr{T} \otimes \mathscr{T}_{\mathbb{R}})$.

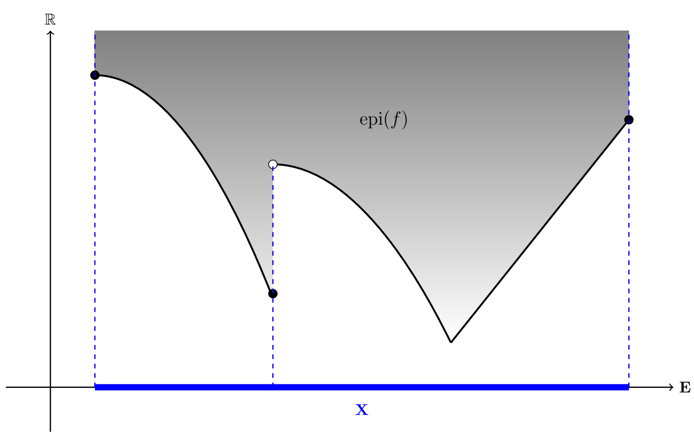


Figura 14.1: Ejemplo de una función s.c.i.

Proposición 14.2.1 Supongamos que $(\mathbf{X}, \mathscr{T})$ un e.t. y $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ es una función dada. Luego, son equivalentes:

(i) f es s.c.i. para la topología $\mathscr{T}$.

(ii) $\forall \gamma \in \mathbb{R}$, el conjunto $\Gamma_\gamma(f) := \{x \in \mathbf{X} \mid f(x) \leq \gamma\}$ es cerrado en $\mathscr{T}$.

(iii) $\forall x \in \mathbf{X}$, $f(x) \leq \liminf\limits_{y \to x} f(y) := \sup\limits_{A \in \mathscr{N}(x)} \inf\limits_{y \in A} f(y)$

Demostración.

- $(i) \Longrightarrow (ii)$ Como $\Gamma_\gamma(f) \times \{\gamma\}$ se puede escribir como la intersección de $\mathrm{epi}(f)$ con $\mathbf{X} \times \{\gamma\}$, deducimos que $\Gamma_\gamma(f) \times \{\gamma\}$ es cerrado en $\mathbf{X} \times \mathbb{R}$, y de aquí que $\Gamma_\gamma(f)$ es cerrado.
- $(ii) \Longrightarrow (iii)$ Dados $x \in \mathbf{X}$ y $\gamma \in (-\infty, f(x))$, tenemos que $A := \mathbf{E} \setminus \Gamma_\gamma(f) = \{y \in \mathbf{X} \mid f(y) > \gamma\}$ es una vecindad (abierta) de x por (ii). De este modo $\gamma \leq \liminf_{y \to x} f(y)$.
  Como lo anterior es válido para todo $\gamma < f(x)$, hacemos $\gamma \to f(x)$ y concluimos el resultado.
- $(iii) \Longrightarrow (i)$ Tomemos $(x, \lambda) \notin \mathrm{epi}(f)$, es decir, $\lambda < f(x)$. Consideremos $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda < \gamma < f(x)$.
  Por (iii), usando la definición del supremo tenemos que existe $A \in \mathscr{N}(x)$ tal que $\gamma < \inf\limits_{y \in A} f(y)$.
  En consecuencia, para todo $y \in A$, tenemos que $f(y) > \gamma$, y por lo tanto, $(y, \gamma) \notin \mathrm{epi}(f)$.
  Sigue que $A \times (-\infty, \gamma)$ y $\mathrm{epi}(f)$ son disjuntos, y como $A \times (-\infty, \gamma) \in \mathscr{N}((x, \lambda))$ en la topología $\mathscr{T} \otimes \mathscr{T}_\mathbb{R}$,
  concluimos que $\mathbf{X} \setminus \mathrm{epi}(f)$ es abierto, y por lo tanto $\mathrm{epi}(f)$ es cerrado.

□

Definición 14.2.2 Supongamos que $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{E}$ es un conjunto convexo. Diremos que una función $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ es **convexa** si

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbf{X},\ \lambda \in [0,1].$$

Notemos que $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si $\mathrm{epi}(f)$ es un convexo de $\mathbf{E} \times \mathbb{R}$.

Proposición 14.2.2 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_\mathbf{E})$ es un e.v.n., $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{E}$ es un conjunto convexo y $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ es una función convexa. Si f es s.c.i. para la topología fuerte, entonces f es s.c.i. para la topología débil $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)$.

Demostración. Notemos que $\mathrm{epi}(f)$ es un conjunto convexo y cerrado fuerte en el e.v.n. producto $(\mathbf{E} \times \mathbb{R}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}\times\mathbb{R}})$. En consecuencia, $\mathrm{epi}(f)$ es cerrado débil en $\sigma(\mathbf{E} \times \mathbb{R}, (\mathbf{E} \times \mathbb{R})^*)$. Luego, $\mathrm{epi}(f)$ es cerrado en la topología producto $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*) \otimes \mathscr{T}_\mathbb{R}$, y por lo tanto, s.c.i. en $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)$. □

■ **Ejemplo 14.2.3** La función $x \mapsto \|x\|_\mathbf{E}$ es continua en $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_\mathbf{E})$ y convexa, luego es s.c.i. en $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)$.
■

Teorema 14.2.4 — Weierstrass-Hilbert-Tonelli. Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_\mathbf{E})$ es un espacio reflexivo y que $A \subseteq \mathbf{E}$ es un cerrado (fuerte), convexo y no vacío. Supongamos que $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ es una función convexa s.c.i para la topología fuerte. Si existe $x_0 \in A$ tal que $A_f(x_0)$ es acotado, donde

$$A_f(x_0) := \{x \in A \mid f(x) \leq f(x_0)\},$$

entonces existe $\bar{x} \in A$ tal que $f(\bar{x}) \leq f(x)$ para todo $x \in A$.

Demostración. Notemos primero que pra concluir bastará probar que

$$\bigcap_{\gamma > \inf_A(f)} \{x \in A_f(x_0) \mid f(x) \leq \gamma\} \neq \emptyset.$$

Si fuese el caso, existiría $\bar{x} \in A_f(x_0)$ tal que $f(\bar{x}) \leq \gamma$ para todo $\gamma > \inf_A(f)$. Luego, si $\gamma \to \inf_A(f)$ obtenemos $f(\bar{x}) \leq \inf_A(f)$ y por lo tanto, $f(\bar{x}) \leq f(x)$ para todo $x \in A$.

Veamos que $A_f(x_0)$ compacto débil en $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$. No es difícil ver que $A_f(x_0)$ es un conjunto convexo y no vacío. Además

$$A_f(x_0)\times\{f(x_0)\}=\mathrm{epi}(f)\cap(A\times\{f(x_0)\}).$$

Por lo tanto, $A_f(x_0)$ es cerrado fuerte, pues $f:\mathbf{E}\to\mathbb{R}$ es s.c.i para la topología fuerte. Por otro lado, como $A_f(x_0)$ es acotado, usando Corolario 14.1.2, deducimos que $A_f(x_0)$ es compacto débil.

Supongamos ahora por contradicción que

$$\bigcap_{\gamma>\inf_A(f)}\{x\in A_f(x_0)\mid f(x)\leq\gamma\}=\emptyset,$$

o equivalentemente, para todo $x\in A_f(x_0)$, existe $\gamma>\inf_A(f)$ tal que $f(x)>\gamma$. Esto implica que

$$A_f(x_0)\subseteq\bigcup_{\gamma>\inf_A(f)}\{x\in\mathbf{E}\mid\ f(x)>\gamma\}\cap A_f(x_0).$$

Por las Proposición 14.2.1 y Proposición 14.2.2, tenemos que los siguiente conjuntos son abiertos débiles:

$$\{x\in\mathbf{E}\mid\ f(x)>\gamma\},\qquad\forall\gamma\in\mathbb{R}.$$

Dado que $A_f(x_0)$ es compacto débil, existen $\gamma_1,\ldots,\gamma_m>\inf_A(f)$ tales que

$$A_f(x_0)\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}\{x\in A_f(x_0)\mid f(x)>\gamma_i\}=\left\{x\in A_f(x_0)\;\middle|\;f(x)>\min_{i=1,\ldots,m}\gamma_i\right\}.$$

Esto implica que para todo $x\in A_f(x_0)$ tenemos que $\min\limits_{i=1,\ldots,m}\gamma_i<f(x)$. Sin embargo, esto no puede ocurrir, puesto si no obtendríamos

$$\inf_{x\in A}f(x)=\inf_{x\in A_f(x_0)}f(x)\geq\min_{i=1,\ldots,m}\gamma_i>\inf_{x\in A}f(x).$$

$\square$

15. Espacios separables y metrizabilidad

En esta parte estudiaremos la noción de separabilidad y su relación con la compacidad secuencial de las topologías débiles. La relevancia de esto recae en la siguiente observación

Si $\left(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}, \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})|_{\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}}\right)$ fuese un espacio topológico metrizable, entonces

$$\text{Teorema de Banach-Alaoglu} \quad \Longrightarrow \quad \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}} \text{ es secuencialmente compacto débil-}\star$$

Luego, toda sucesión $\{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}^*$ acotada, tendría una subsucesión débilmente convergente en $\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})$. Similarmente, si $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ fuese un espacio reflexivo y $\left(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}, \sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)|_{\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}}\right)$ fuese metrizable, entonces

$$\text{Teorema de Kakutani} \quad \Longrightarrow \quad \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}} \text{ es secuencialmente compacto débil}$$

Esto implicaría que toda sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ acotada, tendría una subsucesión que converge débilmente en $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$.

Proposición 15.0.1 Si $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. separable, entonces $\left(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}, \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})|_{\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}}\right)$ es un e.v.t. metrizable.

Demostración. Primero vamos a construir una norma en $\mathbf{E}^*$ y a partir de eso una métrica apropiada. Dado que $\mathbf{E}$ es separable, existe $F \subseteq \mathbf{E}$ numerable y denso (respecto a la topología fuerte) en $\mathbf{E}$. Luego, existe una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$ densa en $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$.

Definamos $N : \mathbf{E}^* \to \mathbb{R}$ via la fórmula:

$$N(\ell) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} |\langle \ell, x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|, \qquad \forall \ell \in \mathbf{E}^*.$$

Notemos que por definición $N(0) = 0$ y $N(\ell) \geq 0$ para todo $\ell \in \mathbf{E}^*$. Además $N(\ell) \in \mathbb{R}$, pues

$$N(\ell) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \|\ell\|_{\mathbf{E}^*} \|x_k\|_{\mathbf{E}} \leq \|\ell\|_{\mathbf{E}^*}.$$

Notemos también que si $N(\ell) = 0$, entonces $\langle \ell, x_k \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, por densidad, para todo $x \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$, tenemos $\langle \ell, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 0$ con lo cual $\ell \equiv 0$.

Finalmente, es fácil ver que N es una norma en $\mathbf{E}^*$ pues para todo $\ell_1, \ell_2, \ell \in \mathbf{E}^*$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2^{k+1}} |\langle \ell_1 + \ell_2, x_k \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| \leq N(\ell_1) + N(\ell_2), \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

y

$$|\lambda| \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2^{k+1}} |\langle \ell, x_k \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2^{k+1}} |\langle \lambda\ell, x_k \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Definamos ahora la métrica $d(\ell_1, \ell_2) := N(\ell_1 - \ell_2)$. Veamos que la topología inducida por la métrica $\mathscr{T}_d$ coincide con la topología traza $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})|_{\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}}$ en $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}$.

- Sea $\hat{\ell} \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}$ y $V \in \mathscr{N}(\hat{\ell})$ para la topología débil-$\star$, debemos probar que existe $r > 0$ tal que

  $$\{\ell \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}} \mid d(\ell, \hat{\ell}) < r\} \subseteq V \cap \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}.$$

  Usando la base para $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})$, existen $y_0, \ldots, y_m \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $W_{\hat{\ell}}(y_0, \ldots, y_m; \varepsilon) \subseteq V$. Dado que $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es densa en $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$, tenemos que para cada $i = 0, \ldots, m$; existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que

  $$\|y_i - x_{k_i}\|_{\mathbf{E}} \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

  Notemos que dados $\ell \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}$ e $i \in \{0, \ldots, m\}$, tenemos

  $$\begin{aligned} |\langle \ell - \hat{\ell}, y_i \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| &\leq |\langle \ell - \hat{\ell}, y_i - x_{k_i} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| + |\langle \ell - \hat{\ell}, x_{k_i} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| \\ &\leq 2\|y_i - x_{k_i}\|_{\mathbf{E}} + 2^{k_i+1} \frac{1}{2^{k_i+1}} |\langle \ell - \hat{\ell}, x_{k_i} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|. \end{aligned}$$

  Tomando $r < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2^{k_i+1}}$ para todo $i = 0, \ldots, m$, tenemos que si $d(\ell, \hat{\ell}) < r$ entonces

  $$|\langle \ell - \hat{\ell}, y_i \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2^{k_i+1} d(\ell, \hat{\ell}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

  A partir esto obtenemos $\{\ell \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}} \mid d(\ell, \hat{\ell}) < r\} \subseteq W_{\hat{\ell}}(y_0, \ldots, y_m; \varepsilon) \cap \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}$, y por lo tanto

  $$\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})|_{\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}} \subseteq \mathscr{T}_d.$$

- Sea ahora $\hat{\ell} \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}$ y $r > 0$. Afirmamos que si $m \in \mathbb{N}$ es tal que $\dfrac{1}{2^m} < \dfrac{r}{2}$ entonces

  $$W_{\hat{\ell}}\left(x_0, \ldots, x_m; \frac{r}{2}\right) \cap \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}} \subseteq \{\ell \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}} \mid d(\ell, \hat{\ell}) < r\}.$$

Basta notar que, dado que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$, para todo $\ell \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}$ tenemos

$$\begin{aligned} d(\ell,\hat{\ell}) &= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2^{k+1}} |\langle \ell-\hat{\ell}, x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} |\langle \ell-\hat{\ell}, x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| \\ &\leq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2^{k+1}} |\langle \ell-\hat{\ell}, x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| + 2\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2^{k+1}} |\langle \ell-\hat{\ell}, x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| + \frac{1}{2^m} \\ &\leq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2^{k+1}} |\langle \ell-\hat{\ell}, x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| + \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

Luego, si además $\ell \in W_{\hat{\ell}}\left(x_0,\ldots,x_m;\frac{r}{2}\right)$, tenemos que $d(\ell,\hat{\ell}) < r$. Por lo tanto

$$\mathscr{T}_d \subseteq \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})|_{\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}}.$$

Lo que prueba finalmente el resultado.

$\square$

De forma similar se puede probar el siguiente resultado.

Proposición 15.0.2 Si $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. tal que $(\mathbf{E}^*,\|\cdot\|_{\mathbf{E}^*})$ es separable, entonces $\left(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}},\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)|_{\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}}\right)$ es un e.v.t. metrizable.

Demostración. Dado que $\mathbf{E}^*$ es separable, podemos tomar $\{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ densa en $\overline{\mathbb{B}_{E^*}}$ y definir la norma

$$N(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} |\langle \ell_k, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|, \qquad \forall\, x \in \mathbf{E}.$$

Usando los mismos argumentos de la proposición 15.0.1 y la base de vecindades correspondiente, se concluye.

$\square$

15.1 Compacidad secuencial débil-$\star$

Teorema 15.1.1 — Teorema de Banach-Alaoglu secuencial. Supongamos que $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. separable y $\{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $\mathbf{E}^*$. Luego existe una subsucesión $\{\ell_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ que converge débilmente en $\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\|\ell_k\|_{\mathbf{E}^*} \leq 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de Banach-Alaoglu, sabemos que $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}$ es compacta para la topología débil-$\star$ $\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})$. Gracias a la Proposición 15.0.1, tenemos $\left(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}},\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})|_{\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}}\right)$ es metrizable y la conclusión se sigue.

$\square$

Veamos ahora algunas consecuencias de este importante resultado.

Corolario 15.1.2 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. separable y que $K \subseteq \mathbf{E}^*$ es un conjunto cerrado débil-$\star$ y no vacío. Luego, K tiene un elemento de norma mínima: existe $\hat{\ell} \in K$ tal que

$$\|\hat{\ell}\|_{\mathbf{E}^*} \leq \|\ell\|_{\mathbf{E}^*}, \qquad \forall \ell \in K.$$

Demostración. Dado que K es no vacío, existe $\{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq K$ tal que

$$\lim_{k\to+\infty} \|\ell_k\|_{\mathbf{E}^*} = \alpha := \inf\{\|\ell\|_{\mathbf{E}^*} \mid \ell \in K\}.$$

La sucesión $\{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada, luego tiene una subsucesión que converge débilmente en $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})$. Denotemos la subsucesión de la misma forma y sea $\hat{\ell} \in \mathbf{E}^*$ su límite débil-$\star$. Como $K \subseteq \mathbf{E}^*$ es un conjunto cerrado débil-$\star$, tenemos que $\hat{\ell} \in K$.

Finalmente, como $\ell_k \overset{\star}{\rightharpoonup} \hat{\ell}$, tenemos que

$$\alpha \leq \|\hat{\ell}\|_{\mathbf{E}^*} \leq \liminf_{k\to+\infty} \|\ell_k\|_{\mathbf{E}^*} = \alpha$$

□El corolario anterior puede ser aplicado para estudiar la compacidad secuencial débil-$\star$ en L^∞.

Corolario 15.1.3 Supongamos que $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida σ-finita y que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que acotada en $(L^\infty_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^\infty})$. Luego existe $\hat{f} \in L^\infty_\mu(\Omega)$ y una subsucesión $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\int_\Omega f_{k_j} g \, d\mu \to \int_\Omega \hat{f} g \, d\mu, \qquad \forall\, g \in L^1_\mu(\Omega).$$

Demostración. Recordemos que $(L^1_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^1})^* \cong (L^\infty_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^\infty})$ y que el producto dualidad se puede calcular como

$$\langle f, g\rangle_{L^\infty_\mu(\Omega), L^1_\mu(\Omega)} = \int_\Omega f g \, d\mu, \qquad \forall f \in L^\infty_\mu(\Omega),\ g \in L^1_\mu(\Omega).$$

Finalmente, dado que $(L^1_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^1})$ es separable (ayudantía), obtenemos el resultado. □

15.2 Compacidad secuencial débil

Teorema 15.2.1 — Compacidad secuencial débil. Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio reflexivo y $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $\mathbf{E}$. Luego existe una subsucesión $\{x_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ que converge débilmente en $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)$.

Demostración. Supongamos primero que $(\mathbf{E}^*, \|\cdot\|_{\mathbf{E}^*})$ es separable. Notemos que $\{J(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $\mathbf{E}^{**}$.

Por el Teorema de Banach-Alaoglu secuencial, existen $\bar{\varphi} \in \mathbf{E}^{**}$ y $\{J(x_{k_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $J(x_{k_j}) \overset{\star}{\rightharpoonup} \bar{\varphi}$ débilmente en $\sigma(\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*)$:

$$\langle J(x_{k_j}), \ell\rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} \to \langle \bar{\varphi}, \ell\rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}, \qquad \forall \ell \in \mathbf{E}^*.$$

Dado que $\mathbf{E}$ es reflexivo, $J(\bar{x}) = \bar{\varphi}$ para algún $\bar{x} \in \mathbf{E}$. Por lo tanto tenemos

$$\langle \ell, x_{k_j}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle J(x_{k_j}), \ell\rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} \to \langle J(\bar{x}), \ell\rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} = \langle \ell, \bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}.$$

En otras palabras, $x_{k_j} \rightharpoonup \bar{x}$ débilmente en $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$.

Veamos ahora el caso general. Definamos $M_0 = \langle \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \rangle$ y $M = \overline{M_0}$ (cerradura respecto a la topología fuerte). Notemos primero que $(M, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio reflexivo (Corolario 14.1.3). Además, por construcción $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es también una sucesión acotada en M. Luego, para concluir basta ver que $(M^*, \|\cdot\|_{M^*})$ es separable (y utilizar el punto precedente).

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{B}_M}$. Notemos que $(M, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. separable, ya que $\langle \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \rangle_{\mathbb{Q}}$ es denso en M. Luego, como $(M, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es reflexivo, $(M^{**}, \|\cdot\|_{M^{**}})$ es separable pues $M \cong M^{**}$.

Sea $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq M^{**}$ una sucesión densa en M^{**}. Dado $k \in \mathbb{N}$, tomemos $\ell_k \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}$ tal que $\frac{1}{2}\|\varphi_k\|_{\mathbf{E}^{**}} \leq \langle \varphi_k, \ell_k \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} \leq \|\varphi_k\|_{\mathbf{E}^{**}}$. Definamos $L_0 = \langle \{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}} \rangle_{\mathbb{Q}}$. Notemos que L_0 es numerable y denso en $L := \langle \{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}} \rangle$. Para concluir, veamos que L es denso en $(M^*, \|\cdot\|_{M^*})$.

Supongamos por contradicción que esto no es así. Por el Corolario 3.2.3, debe existir $\varphi \in M^{**} \setminus \{0\}$ tal que

$$\langle \varphi, \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} = 0, \qquad \forall \ell \in L.$$

Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|\varphi - \varphi_m\|_{\mathbf{E}^{**}} < \varepsilon$ (por densidad) y por lo tanto

$$\frac{1}{2}\|\varphi_m\|_{\mathbf{E}^{**}} \leq \langle \varphi_m, \ell_m \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} = \langle \varphi_m - \varphi, \ell_m \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} \leq \|\varphi_m - \varphi\|_{\mathbf{E}^{**}} \|\ell_m\|_{\mathbf{E}^*} < \varepsilon.$$

En consecuencia,

$$\|\varphi\|_{\mathbf{E}^{**}} \leq \|\varphi - \varphi_m\|_{\mathbf{E}^{**}} + \|\varphi_m\|_{\mathbf{E}^{**}} < 3\varepsilon.$$

Dado que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $\varphi = 0$ y obtenemos una contradicción. Luego, L es denso en M^* y por lo tanto $(M^*, \|\cdot\|_{M^*})$ es separable. □

El resultado anterior se puede extender a cualquier sucesión que esté contenida en un conjunto compacto débil.

Teorema 15.2.2 — Eberlein-Šmulian. Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n separable, $A \subseteq \mathbf{E}$ es dado y $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A$ es una sucesión.

Si $\mathbf{X} := \overline{A}^{\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)}$ es compacto débil, entonces $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión débilmente convergente.

Demostración. Primero, notemos que $\mathbf{X}$ es un conjunto acotado, pues dado que $\mathbf{X}$ es compacto débil, tenemos que

$$-\infty < \min_{y\in\mathbf{X}} \ell(y) \leq |\langle \ell, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| = \max_{y\in\mathbf{X}} \ell(y) < +\infty, \qquad \forall x \in \mathbf{X},\ \ell \in \mathbf{E}^*.$$

Esto implica que, para cada $\ell \in \mathbf{E}^*$, existe $c_\ell \in \mathbb{R}$ tal que $\sup_{x\in\mathbf{X}} |\langle J_x, \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}| \leq c_\ell$. Luego, por el Teorema de Banach-Steinhaus tenemos que $\sup_{x\in\mathbf{X}} \|x\|_{\mathbf{E}} = \sup_{x\in\mathbf{X}} \|J_x\|_{\mathbf{E}^{**}} < +\infty$.

Dado que $\mathbf{X}$ es acotado, asumamos sin perdida de generalidad, $\mathbf{X} \subseteq \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$.

Ahora bien, como $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es separable, $\left(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}, \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})|_{\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}}\right)$ es metrizable, gracias a la Proposición 15.0.1. En consecuencia, por el Teorema de Banach-Alaoglu, $\left(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}, \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})|_{\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}}\right)$ es un e.m. compacto.

Afirmamos que existe conjunto denso numerable en $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}$ respecto a la topología $\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})|_{\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}}$. En efecto, dado $k \in \mathbb{N}$, existen $\ell_1^k,\dots,\ell_{m_k}^k \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}$ tal que $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_k} \mathbb{B}_d\left(\ell_i^k, \frac{1}{2^k}\right)$. Luego el conjunto $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{\ell_1^k,\dots,\ell_{m_k}^k\right\}$ es numerable y denso en $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}$ para la topología débil-$\star$.

Sea $\{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un conjunto denso en $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}$ para la topología $\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})|_{\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}}$. Repitiendo los argumentos usados para demostrar la Proposición 15.0.2, con la métrica

$$\hat{d}(x,y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} |\langle \ell_k, x-y\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|, \qquad \forall\, x,y \in \mathbf{X},$$

tenemos que $\left(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}, \sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)|_{\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}}\right)$ es metrizable.

Finalmente, dado que $\mathbf{X}$ es compacto débil y $\mathbf{X} \subseteq \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$, concluimos que $\mathbf{X}$ es secuencialmente compacto. □

En el Teorema de Eberlein-Šmulian no es necesaria asumir que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n separable, pues uno puede hacer el mismo análisis con $M = \overline{\langle \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \rangle}$ en vez de $\mathbf{E}$ y $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en vez de A:

- Notemos que M es cerrado débil de $\mathbf{E}$ (pues M es convexo).
- Luego, $\mathbf{X} \cap M$ es compacto débil en $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$.
- Recordemos que $\sigma(M,M^*) = \sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)|_M$ (Demostración Corolario 14.1.3).
- En consecuencia, $\mathbf{X} \cap M$ es compacto débil $\sigma(M,M^*)$.
- Dado que $\overline{\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}}^{\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)} \subseteq \mathbf{X} \cap M$, tenemos que $\overline{\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}}^{\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)}$ es compacto débil en $\sigma(M,M^*)$.

16. Espacios uniformemente convexos

Ahora estudiaremos la noción de espacios uniformemente convexos y veremos cómo se relaciona con la reflexividad de un espacio. Usando esta noción probaremos que los espacios de Hilbert y L^p con $p \in (1,+\infty)$ son reflexivos.

Definición 16.0.1 Diremos que un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es **uniformemente convexo** si para todo $\varepsilon \in (0,2]$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall\, x,y \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}, \quad \|x-y\|_{\mathbf{E}} > \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_{\mathbf{E}} < 1-\delta$$

- Esta propiedad implica que la esfera unitaria $S_{\mathbf{E}} = \{x \in \mathbf{E} \mid \|x\|_{\mathbf{E}} = 1\})$ no puede contener segmentos.
- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ y $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ NO son uniformemente convexos, pero si lo son $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ con $p \in (1,+\infty)$.
- Si la norma $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$ proviene de un producto interno, entonces $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es uniformemente convexo. Esto se debe a que la identidad del paralelogramo es válida:

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_{\mathbf{E}}^2 = \frac{1}{2}\|x\|_{\mathbf{E}}^2 + \frac{1}{2}\|y\|_{\mathbf{E}}^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_{\mathbf{E}}^2, \qquad \forall\, x,y \in \mathbf{E}.$$

Si $\|x\|_{\mathbf{E}}, \|y\|_{\mathbf{E}} \leq 1$, con $\|x-y\|_{\mathbf{E}} > \varepsilon$, entonces

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_{\mathbf{E}}^2 \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} < 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^4}{64} = \left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right)^2,$$

con lo cual basta tomar $\delta = \frac{1}{8}\varepsilon^2$ ya que $\varepsilon \leq 2 < \sqrt{8}$, y con esto $1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \geq 0$.
En particular, todo espacio de Hilbert es uniformemente convexo.

Proposición 16.0.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio uniformemente convexo y que $\{x_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge débilmente en $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$ a algún $\bar{x} \in \mathbf{E}$. Luego

$$\limsup_{n\to+\infty} \|x_k\|_{\mathbf{E}} \leq \|\bar{x}\|_{\mathbf{E}} \quad \Longrightarrow \quad x_k \to x \text{ fuertemente en } (\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}}).$$

Recordemos que si $x_k \rightharpoonup \bar{x}$ débilmente en $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$ entonces $\|\bar{x}\|_{\mathbf{E}} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_k\|_{\mathbf{E}}$. En particular, esta proposición dice que si $x_k \rightharpoonup \bar{x}$ y $\|x_k\|_{\mathbf{E}} \to \|\bar{x}\|_{\mathbf{E}}$, entonces $x_k \to \bar{x}$ fuertemente.

Demostración. Si $\bar{x} = 0$, la conclusión es directa, pues tenemos $\|x_k\|_{\mathbf{E}} \to 0 \implies x_k \to 0 = \bar{x}$. Por otro lado, supongamos que $\bar{x} \neq 0$ y definamos $\lambda_k = \max\{\|x_k\|_{\mathbf{E}}, \|\bar{x}\|_{\mathbf{E}}\}$, $y_k = \dfrac{x_k}{\lambda_k}$ e $\bar{y} = \dfrac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|_{\mathbf{E}}}$.

Claramente $\lambda_k > 0$ y $\|y_k\|_{\mathbf{E}} \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Además, notemos que $\lambda_k \to \|\bar{x}\|_{\mathbf{E}}$ e $y_k \rightharpoonup \bar{y}$. Esto implica que

$$1 = \|\bar{y}\|_{\mathbf{E}} \leq \liminf_{k\to+\infty} \left\| \frac{y_k + \bar{y}}{2} \right\|_{\mathbf{E}} \leq \limsup_{k\to+\infty} \left\| \frac{y_k + \bar{y}}{2} \right\|_{\mathbf{E}} \leq \limsup_{k\to+\infty} \frac{\|y_k\|_{\mathbf{E}} + \|\bar{y}\|_{\mathbf{E}}}{2} \leq 1.$$

Por lo tanto, $\frac{1}{2}\|y_k + \bar{y}\|_{\mathbf{E}} \to 1$, por la convexidad uniforme de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ necesariamente $\frac{1}{2}\|y_k - \bar{y}\|_{\mathbf{E}} \to 0$. Si no, existiría $\varepsilon \in (0,2]$ y una subsucesión $\{y_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tales que $\|y_{k_j} - \bar{y}\|_{\mathbf{E}} > \varepsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Dado que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es uniformemente convexo, existiría $\delta > 0$ tal que $\frac{1}{2}\|y_{k_j} + \bar{y}\|_{\mathbf{E}} < 1 - \delta$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Esto contradice el hecho que $\frac{1}{2}\|y_k + \bar{y}\|_{\mathbf{E}} \to 1$. Luego, $y_k \to \bar{y}$ y a posteriori, $x_k \to \bar{x}$ (fuertemente). □

Veamos ahora la relación que existe entre convexidad uniforme de un espacio y la reflexividad de este.

La convexidad uniforme es una propiedad geométrica, mientras que la reflexividad es topológica. Por esto, es importante asumir de antemano la completitud del espacio en el siguiente resultado.

Teorema 16.0.2 — Milman-Pettis. Si $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach uniformemente convexo, entonces es reflexivo.

Demostración. Por hipótesis tenemos que para todo $\varepsilon \in (0,2]$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall\, x,y \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}, \quad \|x-y\|_{\mathbf{E}} > \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_{\mathbf{E}} < 1 - \delta.$$

Para probar que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es reflexivo, basta ver si $\varphi_0 \in \mathbf{E}^{**}$ con $\|\varphi_0\|_{\mathbf{E}^{**}} = 1$, entonces $\varphi_0 \in J(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}})$.

Notemos que si $\varphi_0 \in \overline{J(\mathbb{B}_{\mathbf{E}})}$, es decir, que para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}$ tal que

$$\|\varphi_0 - J_x\|_{\mathbf{E}^{**}} \leq \varepsilon,$$

entonces, $\varphi_0 \in J(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}})$ pues $J(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}})$ es cerrado fuerte en $\mathbf{E}^{**}$; ya que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach.

Tomemos $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ dado por la convexidad uniforme de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\varepsilon \leq 2$. En particular, podemos tomar $\ell_0 \in \mathbf{E}^*$ con $\|\ell_0\|_{\mathbf{E}^*} \leq 1$ tal que

$$\langle \varphi_0, \ell_0 \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} \geq \|\varphi_0\|_{\mathbf{E}^{**}} - \frac{\delta}{2} = 1 - \frac{\delta}{2}.$$

Consideremos V, la vecindad abierta débil-$*$ de φ_0, dada por

$$V := \left\{ \varphi \in \mathbf{E}^{**} \mid |\langle \varphi - \varphi_0, \ell_0 \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}| < \frac{\delta}{2} \right\}.$$

Necesariamente debemos tener que $J(\overline{\mathbb{B}_E}) \cap V \neq \emptyset$ pues, gracias al Lema de Goldstine, tenemos

$$\varphi_0 \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}} = \overline{J(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}})}^{\sigma(\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*)}.$$

Por lo tanto, existe $\bar{x} \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$ tal que $|\langle J_{\bar{x}} - \varphi_0, \ell_0 \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}}| < \frac{\delta}{2}$. Para concluir, veamos ahora que $\bar{x}$ verifica

$$\|\varphi_0 - J_{\bar{x}}\|_{\mathbf{E}^{**}} \leq \varepsilon. \tag{16.1}$$

Consideremos el conjunto

$$A := \{\varphi \in \mathbf{E}^{**} \mid \|\varphi - J_{\bar{x}}\|_{\mathbf{E}^{**}} > \varepsilon\}.$$

Luego, si $\bar{x}$ no verifica la desigualdad (16.1), es claro que $\varphi_0 \in A$. Notemos que el conjunto A es un abierto débil-$\star$ de $\sigma(\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*)$. En efecto, por una parte tenemos que

$$A = \mathbf{E}^{**} \setminus \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}(J_{\bar{x}}, \varepsilon)}.$$

Por otra parte, $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}(J_{\bar{x}}, \varepsilon)} = T_\varepsilon\left(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}}\right)$, donde $T_\varepsilon(\varphi) = J_{\bar{x}} + \varepsilon\varphi$ para todo $\varphi \in \mathbf{E}^{**}$. Dado $(\mathbf{E}^{**}, \sigma(\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*))$ es un e.v.t., tenemos que $T_\varepsilon\colon\ (\mathbf{E}^{**}, \sigma(\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*)) \to (\mathbf{E}^{**}, \sigma(\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*))$ es continua.

En consecuencia, por el Teorema de Banach-Alaoglu, tenemos que $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}(J_{\bar{x}}, \varepsilon)}$ es compacto débil-$\star$. A posteriori, $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}(J_{\bar{x}}, \varepsilon)}$ es cerrado débil-$\star$, y por lo tanto, A es un abierto débil-$\star$ de $\sigma(\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*)$.

Supongamos por contradicción que $\bar{x}$ es tal que $\|\varphi_0 - J_{\bar{x}}\|_{\mathbf{E}^{**}} > \varepsilon$. Luego, $\varphi_0 \in A$. Notemos que $A \cap V$ es un abierto débil-$\star$ en $\sigma(\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*)$ que contiene a $\varphi_0 \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}} = \overline{J(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}})}^{\sigma(\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*)}$.

Nuevamente, gracias al Lema de Goldstine, necesariamente tenemos que $J(\overline{\mathbb{B}_E}) \cap A \cap V \neq \emptyset$. Luego, existe $y \in \mathbf{E}$ tal que

$$\|\bar{x} - y\|_{\mathbf{E}} = \|J_y - J_{\bar{x}}\|_{\mathbf{E}^{**}} > \varepsilon \quad \text{y} \quad |\langle J_y - \varphi_0, \ell_0 \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}| < \frac{\delta}{2}.$$

Por un lado, tenemos gracias a la convexidad uniforme $\left\|\dfrac{\bar{x}+y}{2}\right\|_{\mathbf{E}} < 1 - \delta$. Pero por otro lado, tenemos

$$2 - \delta \leq 2\langle \varphi_0, \ell_0 \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} < \frac{\delta}{2} + \langle J_{\bar{x}}, \ell_0 \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} + \frac{\delta}{2} + \langle J_y, \ell_0 \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} \leq \delta + \|\bar{x} + y\|_{\mathbf{E}},$$

pues $\langle \varphi_0, \ell_0 \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} \geq 1 - \dfrac{\delta}{2}$. En consecuencia, $1 - \delta \leq \left\|\dfrac{\bar{x}+y}{2}\right\|_{\mathbf{E}}$, lo que es absurdo.

□

16.1 Algunas consecuencias importantes

Corolario 16.1.1 Todo espacio de Hilbert $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio reflexivo.

Demostración. Basta notar que todo espacio de Hilbert es un espacio uniformemente convexo. □

Corolario 16.1.2 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_1)$ y $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_2)$ son espacios de Banach, tales que existe $c > 0$ que verifica

$$\|x\|_1 \leq c\|x\|_2, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

- Si $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_1)$ es un espacio uniformemente convexo, entonces $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_2)$ es reflexivo.
- Si $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_2)$ es un espacio uniformemente convexo, entonces $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_1)$ es reflexivo.

Demostración. Por el Corolario 4.1.2, tenemos que las normas son equivalentes.

La conclusión viene de recordar que si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son dos normas equivalentes en $\mathbf{E}$, entonces

- los duales topológicos de $\mathbf{E}$ coinciden, es decir, $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_1)^* = (\mathbf{E}, \|\cdot\|_2)^*$.
- las normas duales $\|\cdot\|_{\mathbf{E}_1^*}$ y $\|\cdot\|_{\mathbf{E}_2^*}$ son equivalentes (no necesariamente iguales).

En particular, tendremos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_1)^{**} = (\mathbf{E}, \|\cdot\|_2)^{**}$. □

16.1.1 Dualidad de espacios L^p

Teorema 16.1.3 — Dualidad de espacios L^p. Supongamos que $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida y $p, q \in (1, +\infty)$ son tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Luego, $(L^p_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ es reflexivo y

$$(L^p_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})^* \cong (L^q_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^q}).$$

Demostración. Consideremos primero el caso $p \geq 2$.

Notemos que por la Proposición **??**, $(L^p_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ es uniformemente convexo, y por lo tanto es reflexivo.

Definamos el operador lineal $T : L^q_\mu(\Omega) \to (L^p_\mu(\Omega))^*$ dado por

$$T(u)(f) := \int_\Omega uf \, d\mu, \qquad \forall\, f \in L^p_\mu(\Omega),\, \forall\, u \in L^q_\mu(\Omega).$$

Para concluir, probaremos que T es un isomorfismo isométrico entre $L^q_\mu(\Omega)$ y $(L^p_\mu(\Omega))^*$. Notemos que por Hölder tenemos que $|T(u)(f)| \leq \|u\|_{L^q}\|f\|_{L^p}$ para todo $u \in L^q_\mu(\Omega)$ y $f \in L^p_\mu(\Omega)$. Luego, $T(u) \in (L^p_\mu(\Omega))^*$ y además $\|T(u)\|_{(L^p_\mu(\Omega))^*} \leq \|u\|_{L^q}$ para todo $u \in L^q_\mu(\Omega)$.

Esta desigualdad, es de hecho una igualdad. En efecto, dado $u \in L^q_\mu(\Omega)$, definamos $f_u = |u|^{q-2}u\, \mathbb{1}_{\{u\neq 0\}}$. Tenemos que f_u es medible y $|f_u|^p = |u|^{(q-1)p} = |u|^q$, pues $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En particular, $f_u \in L^p_\mu(\Omega)$ y dado que $\frac{q}{p} = q\frac{1}{p} = q(1 - \frac{1}{q}) = q - 1$, también tenemos

$$\|f_u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^q \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{L^q}^{\frac{q}{p}} = \|u\|_{L^q}^{q-1}.$$

Además,

$$\langle T(u), f_u\rangle_{L^p_\mu(\Omega))^*, L^p_\mu(\Omega)} = \int_\Omega u|u|^{q-2}u \, d\mu = \int_\Omega |u|^q \, d\mu = \|u\|_{L^q}^q,$$

lo que implica que

$$\|T(u)\|_{(L^p_\mu(\Omega))^*} \geq \frac{\langle T(u), f_u\rangle}{\|f_u\|_{L^p}} = \frac{\|u\|_{L^q}^q}{\|u\|_{L^q}^{q-1}} = \|u\|_{L^q}.$$

Por lo tanto T es una isometría, pues $\|T(u)\|_{(L^p_\mu(\Omega))^*} = \|u\|_{L^q}$ para todo $u \in L^q_\mu(\Omega)$.

Claramente, T es lineal e inyectiva pues $T(u) = 0$ si y sólo si $u = 0$, gracias a que T es una isometría. Además, como $\big(L^q_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^q}\big)$ es un espacio de Banach, $T(L^q_\mu(\Omega))$ es un s.e.v. cerrado de $(L^p_\mu(\Omega))^*$.

Veamos que T es sobreyectiva. Supongamos por contradicción que no lo es. Por el Corolario 3.2.3, existe $\varphi \in (L^p_\mu(\Omega))^{**} \setminus \{0\}$ tal que

$$\langle \varphi, T(u) \rangle_{(L^p_\mu(\Omega))^{**},(L^p_\mu(\Omega))^*} = 0, \qquad \forall\, u \in L^q_\mu(\Omega).$$

Dado que $(L^p_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ es reflexivo, existe $f \in L^p_\mu(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que $\varphi = J_f$, y en consecuencia

$$\langle T(u), f \rangle_{(L^p_\mu(\Omega))^*,L^p_\mu(\Omega)} = \langle \varphi, T(u) \rangle_{(L^p_\mu(\Omega))^{**},(L^p_\mu(\Omega))^*} = 0, \qquad \forall\, u \in L^q_\mu(\Omega).$$

No es difícil ver que $u_f := |f|^{p-2} f$, es una función medible que satisface $u_f \in L^q_\mu(\Omega)$. Con esto obtenemos una contradicción, pues tendríamos $f = 0$ ya que

$$\|f\|^p_{L^p} = \langle T(u_f), f \rangle_{(L^p_\mu(\Omega))^*,L^p_\mu(\Omega)} = 0.$$

Finalmente consideremos el caso $p \in (1,2)$. Notemos que $q \in (2,+\infty)$ pues $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} > 1 - \frac{1}{p} > 0$, y por lo tanto $\frac{1}{2} > \frac{1}{q} > 0$. Usando la parte anterior, tenemos que $(L^q_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^q})$ es reflexivo y

$$(L^q_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^q})^* \cong (L^p_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^p}).$$

Esto implica que $(L^p_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ es reflexivo, gracias a la Corolario 3 (Clase 16).

Luego, re-haciendo la demostración para el caso $p \geq 2$ obtenemos que

$$(L^p_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})^* \cong (L^q_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^q}).$$

□

- Para concluir también podríamos haber usar el hecho que

  $$(L^q_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^q}) \cong (L^q_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^q})^{**} \cong (L^p_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})^*.$$

  Esto viene de notar que si $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}}) \cong (\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$, entonces $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})^* \cong (\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})^*$.
- El teorema anterior implica que si $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida y $p, q \in (1,+\infty)$ son tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces para todo $\ell \in (L^p_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})^*$ existe un único $u \in L^q_\mu(\Omega)$ tal que

  $$\langle \ell, f \rangle_{L^p_\mu(\Omega)^*, L^p_\mu(\Omega)} = \int_\Omega u f d\mu, \qquad \forall\, f \in L^p_\mu(\Omega) \quad \text{y además} \quad \|u\|_{L^q} = \|\ell\|_{L^p_\mu(\Omega)^*}.$$

17. Compacidad débil en espacios L^p

Para terminar este capítulo, analizaremos la compacidad secuencial débil en los espacios L^p y la compacidad débil (en general) en el espacio L^1. En particular, discutiremos sobre qué se puede decir de sucesiones acotadas en L^1.

17.1 Caso $p \in (1,+\infty)$

Comenzaremos por la compacidad secuencial débil para el caso $p \in (1,+\infty)$.

Proposición 17.1.1 Supongamos que $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida, $p,q \in (1,+\infty)$ verifican $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ y que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L^p_\mu(\Omega)$ es una sucesión acotada. Luego existe $\hat{f} \in L^p_\mu(\Omega)$ y una subsucesión $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\int_\Omega f_{k_j} g \, d\mu \to \int_\Omega \hat{f} g \, d\mu, \qquad \forall\, g \in L^q_\mu(\Omega). \tag{17.1}$$

Demostración. Por el Teorema Dualidad de espacios L^p , tenemos que $(L^p_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ es reflexivo.

Además, para todo $g \in L^q_\mu(\Omega)$, por la desigualdad de Hölder, tenemos que $\ell_g \in L^p_\mu(\Omega)^*$, donde

$$\langle \ell_g, f\rangle_{L^p_\mu(\Omega)^*, L^p_\mu(\Omega)} = \int_\Omega fg d\mu, \qquad \forall\, f \in L^p_\mu(\Omega).$$

Luego, gracias al Teorema de Compacidad secuencial débil, $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiene un subsucesión que converge débilmente en $\sigma\left(L^p_\mu(\Omega), L^q_\mu(\Omega)\right) := \sigma\left(L^p_\mu(\Omega), L^p_\mu(\Omega)^*\right)$.

Si $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es la subsucesión convergente y $\hat{f} \in L^p_\mu(\Omega)$ su límite, entonces tenemos:

$$\int_\Omega f_{k_j} g \, d\mu = \langle \ell_g, f_{k_j}\rangle_{L^p_\mu(\Omega)^*, L^p_\mu(\Omega)} \to \langle \ell_g, \hat{f}\rangle_{L^p_\mu(\Omega)^*, L^p_\mu(\Omega)} = \int_\Omega \hat{f} g \, d\mu, \qquad \forall\, g \in L^q_\mu(\Omega).$$

$\square$

Si $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida σ-finita, lo anterior también se verifica en el caso $p = +\infty$ y $q = 1$:

Si $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L^\infty_\mu(\Omega)$ es una sucesión acotada, existe $\hat{f} \in L^\infty_\mu(\Omega)$ y una subsucesión $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\int_\Omega f_{k_j} g \, d\mu \to \int_\Omega \hat{f} g \, d\mu, \qquad \forall\, g \in L^1_\mu(\Omega).$$

Esto es consecuencia del Teorema de Banach-Alaoglu, para el cual es importante que

- $(L^\infty_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^\infty}) \cong (L^1_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^1})^*$.
- $(L^1_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^1})$ es separable

¿Qué se puede decir en el en el caso $p = 1$ y $q = +\infty$?

Principales problemas:

- $(L^1_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^1})$ en general NO es reflexivo.
- $(L^1_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^1})$ en general NO es isométricamente isomorfo al dual de un e.v.n.

Proposición 17.1.2 El espacio $(\ell^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\ell^1})$ no es reflexivo.

Demostración. Tomemos $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \ell^1(\mathbb{R})$ donde para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $e_k = \{e_{k,j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ y

$$e_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{si } k \neq j, \end{cases} \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Como $\|e_k\|_{\ell^1} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, si $\ell^1(\mathbb{R})$ fuese reflexivo, existiría una subsucesión convergente débil. Notemos también que $(\ell^1(\mathbb{R}))^* \cong \ell^\infty(\mathbb{R})$. Luego, para cada $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ tenemos que

$$\langle \{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}, e_k \rangle_{\ell^\infty(\mathbb{R}),\ell^1(\mathbb{R})} = a_k, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Con esto, si $\{e_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es la subsucesión que converge débilmente y $\hat{e} \in \ell^1(\mathbb{R})$ su límite, entonces tendríamos

$$a_{k_j} = \langle \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}, e_{k_j} \rangle_{\ell^\infty(\mathbb{R}),\ell^1(\mathbb{R})} \longrightarrow \langle \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \hat{e} \rangle_{\ell^\infty(\mathbb{R}),\ell^1(\mathbb{R})}.$$

Fijemos $j \in \mathbb{N}$ y consideremos $\{a^j_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ donde para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$a^j_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k < j, \\ 1 & \text{si } \ k \geq j. \end{cases}$$

Dado que $k_j \geq j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, obtenemos la siguiente contradicción

$$1 = \lim_{j\to+\infty} a^j_{k_j} = \lim_{j\to+\infty} \langle \{a^j_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \hat{e} \rangle_{\ell^\infty(\mathbb{R}),\ell^1(\mathbb{R})} = \lim_{j\to+\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \hat{e}_k = 0.$$

$\square$

Proposición 17.1.3 Supongamos que $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida σ-finita. Luego, el e.v.n. $(L^1_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^1})$ no es reflexivo.

Demostración. Consideremos primero el caso que μ es una medida continua:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathscr{A} \text{ tal que } 0 < \mu(A) < \varepsilon.$$

Luego, para cada $k \in \mathbb{N}$, luego, existe $A'_k \in \mathscr{A}$ tal que $0 < \mu(A'_k) < \frac{1}{2^{k+1}}$.

Definamos $A_k := \bigcup_{i=k}^{+\infty} A'_i$ y notemos también que

$$A_{k+1} \subseteq A_k \quad \text{y} \quad 0 < \mu(A_k) \leq \sum_{i=k}^{+\infty} \mu(A'_i) \leq 1 \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Supongamos por contradicción que $(L^1_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^1})$ es reflexivo y consideremos $f_k := \frac{1}{\mu(A_k)} \mathbb{1}_{A_k}$. Luego, f_k es medible y de hecho $f_k \in L^1_\mu(\Omega)$ con $\|f_k\|_{L^1} = 1$. Luego, existe una subsucesión $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ que converge débilmente a una cierta función $\hat{f} \in L^1_\mu(\Omega)$.

Dado que $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida σ-finita, tenemos que $(L^1_\mu(\Omega))^* \cong L^\infty_\mu(\Omega)$, y por lo tanto

$$\int_\Omega f_{k_j} g \, d\mu \to \int_\Omega \hat{f} g \, d\mu, \qquad \forall\, g \in L^\infty_\mu(\Omega)$$

Notemos que dados $k, j \in \mathbb{N}$, tales que $k_j \geq k$, tenemos que $f_{k_j} \mathbb{1}_{A_k} = f_{k_j}$ pues $A_{k_j} \subseteq A_k$.

Luego, fijando $k \in \mathbb{N}$ y evaluando en $g = \mathbb{1}_{A_k} \in L^\infty_\mu(\Omega)$ tenemos

$$\int_\Omega \hat{f} \mathbb{1}_{A_k} \, d\mu = \lim_{j\to+\infty} \int_\Omega f_{k_j} \mathbb{1}_{A_k} \, d\mu = \lim_{j\to+\infty} \int_\Omega f_{k_j} \, d\mu = \lim_{j\to+\infty} \|f_{k_j}\|_{L^1} = 1.$$

Por otro lado, usando el TCD tenemos que $\int_\Omega \hat{f} \mathbb{1}_{A_k} \, d\mu \to 0$, pues $\mathbb{1}_{A_k} \to 0$ c.t.p. lo cual es una contradicción.

Supongamos ahora, que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $A \in \mathscr{A}$ si $\mu(A) > 0$ entonces $\mu(A) \geq \varepsilon$.

Dado que $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es de medida σ-finita, existe $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{A}$ disjuntos tales que

$$\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k \quad \text{y} \quad \mu(\Omega_k) < +\infty.$$

Cada Ω_k contiene a los más una cantidad finita de subconjuntos medibles, disjuntos y de medida es positiva. De otra forma, para $k \in \mathbb{N}$ fijo existiría $\{A^k_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{A}$ disjuntos tales que

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A^k_j \subseteq \Omega_k \text{ con } \mu(A^k_j) > 0.$$

Luego, necesariamente cada $\mu(A^k_j) \geq \varepsilon$ y lo que no llevaría a una contradicción pues

$$+\infty > \mu(\Omega_k) \geq \mu\left(\bigcup_{j=0}^m A^k_j\right) = \sum_{j=0}^m \mu(A^k_j) \geq (m+1)\varepsilon, \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto Ω tiene a lo más una cantidad numerable de subconjuntos disjuntos de medida positiva. A partir de esto, es fácil ver que $L^1_\mu(\Omega) \cong \ell^1(\mathbb{R})$, y por lo tanto $L^1_\mu(\Omega)$ no es reflexivo. $\square$

17.2 Compacidad débil en L^1

Dado que los espacios L^1 no son reflexivos, en general no bastará que una sucesión sea acotada para que ésta tenga una subsucesión débilmente convergente. Por esta razón se necesitan hipótesis adicionales, como la que introduciremos ahora.

Definición 17.2.1 Si $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida, diremos que un subconjunto $F \subseteq L^1_\mu(\Omega)$ es **equi-integrable** si:

1. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que
$$\int_A |f| d\mu < \varepsilon, \quad \forall A \in \mathscr{A} \text{ tal que } \mu(A) < \delta,\ \forall f \in F.$$
2. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $A \in \mathscr{A}$ con $\mu(A) < +\infty$ tal que
$$\int_{\Omega \setminus A} |f|\, d\mu < \varepsilon, \quad \forall f \in F.$$

Antes de continuar, necesitamos presentar el siguiente lema técnico.

Lema 17.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach y que $K \subseteq \mathbf{E}$ verifica
$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, K_\varepsilon \subseteq \mathbf{E} \text{ compacto débil tal que } K \subseteq K_\varepsilon + \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,\varepsilon)}. \tag{17.2}$$
Entonces K está contenido en un conjunto compacto débil.

Demostración. Notemos que para todo $\varepsilon > 0$, si $K_\varepsilon \subseteq \mathbf{E}$ es dado por (17.2) y $J : \mathbf{E} \to \mathbf{E}^{**}$ es la inyección canónica, tenemos:
$$J(K) \subseteq J(K_\varepsilon) + J(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,\varepsilon)}) \subseteq J(K_\varepsilon) + \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}(0,\varepsilon)}.$$

El conjunto $J(K_\varepsilon) + \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}(0,\varepsilon)}$ es compacto débil$-\star$ en $\mathbf{E}^{**}$.
En efecto:

- Dado que $(\mathbf{E}^{**}, \sigma(\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*))$ es un e.v.t., la suma de conjuntos compactos es un conjunto compacto.
- $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}(0,\varepsilon)}$ es compacto débil-$\star$ gracias al Teorema de Banach-Alaoglu.
- $J(K_\varepsilon)$ también lo es ya que $J : (\mathbf{E}, \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)) \to (\mathbf{E}^{**}, \sigma(\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*))$ es continua (Proposición 14.0.1).

Esto implica que $\overline{J(K)}^{\sigma(\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*)}$ es compacto débil-$\star$ en $\mathbf{E}^{**}$.
Notemos que
$$\overline{J(K)}^{\sigma(\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*)} \subseteq J(K_\varepsilon) + \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}(0,\varepsilon)} \subseteq J(\mathbf{E}) + \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}(0,\varepsilon)}, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

En consecuencia,
$$\overline{J(K)}^{\sigma(\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*)} \subseteq \overline{J(\mathbf{E})} = J(\mathbf{E}),$$
pues $J(\mathbf{E})$ es cerrado fuerte en $\mathbf{E}^{**}$ ya que $\mathbf{E}$ es un espacio de Banach.

Finalmente, dado que $J^{-1} : (J(\mathbf{E}), \sigma(\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*)) \to (\mathbf{E}, \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*))$ es continua (Proposición 14.0.1), obtenemos la conclusión:
$$K \subseteq J^{-1}\left(\overline{J(K)}^{\sigma(\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*)}\right), \qquad \text{pues } J(K) \subseteq \overline{J(K)}^{\sigma(\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*)}.$$

□

El lema precedente es una herramienta fundamental para demostrar el siguiente resultado de compacidad débil en L^1.

Teorema 17.2.1 — Dunford-Pettis. Supongamos que $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida σ-finita y que $F \subseteq L^1_\mu(\Omega)$ es conjunto acotado y equi-integrable. Entonces F está contenido en un conjunto compacto débil respecto a $\sigma\left(L^1_\mu(\Omega), L^\infty_\mu(\Omega)\right)$.

Demostración. En vista del Lema 17.1 y dado que $(L^1_\mu(\Omega), \|\cdot\|_{L^1})$ es un espacio de Banach, basta probar que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \subseteq L^1_\mu(\Omega) \text{ compacto débil tal que } F \subseteq K_\varepsilon + \overline{\mathbb{B}_{L^1_\mu(\Omega)}(0,\varepsilon)}.$$

Fijemos $\varepsilon > 0$, luego por equi-integrabilidad (condición (2)), existe un conjunto $A \in \mathscr{A}$ medible con $\mu(A) < +\infty$ tal que

$$\int_{\Omega \setminus A} |f|\, d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall\, f \in F.$$

Dado que F es acotado en $L^1_\mu(\Omega)$, definimos

$$c_F := \sup\{\|f\|_{L^1} \mid f \in F\} < +\infty.$$

Dados $k \in \mathbb{N}$ y $f \in F$ fijos, definamos el conjunto medible

$$E_k^f := \{x \in \Omega \mid |f(x)| > k+1\}.$$

Notemos que $|f| \cdot \mathbb{1}_{E_k^f} > k+1$, y por lo tanto

$$\mu(E_k^f) = \int_\Omega \mathbb{1}_{E_k^f}\, d\mu \leq \int_\Omega \frac{|f|}{k+1} \cdot \mathbb{1}_{E_k^f}\, d\mu \leq \frac{1}{k+1}\|f\|_{L^1} \leq \frac{c_F}{k+1}, \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ \forall f \in F.$$

Por otro lado, sea $\delta > 0$ dado por la equi-integrabilidad (condición (1)). Luego, para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{c_F}{k+1} < \delta$ tenemos

$$\int_{E_k^f} |f|\, d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall\, f \in F.$$

En adelante, consideramos $k \in \mathbb{N}$ fijo tal que $\frac{c_F}{k+1} < \delta$.
Dado $f \in F$, definamos $g_f \in L^1_\mu(\Omega)$, via la fórmula:

$$g_f := f \cdot \mathbb{1}_{A \setminus E_k^f} + \frac{(k+1)f}{|f|} \cdot \mathbb{1}_{A \cap E_k^f} + 0 \cdot \mathbb{1}_{\Omega \setminus A}.$$

Afirmamos que $\|f - g_f\|_{L^1} \leq \varepsilon$ para todo $f \in F$. Si esto es cierto, en particular tendremos que

$$F \subseteq \{g_f\}_{f \in F} + \overline{\mathbb{B}_{L^1_\mu(\Omega)}(0,\varepsilon)}.$$

En efecto, notemos que, debido a la forma que escogimos A y a que $g_f = 0$ c.t.p. en $\Omega \setminus A$, tenemos

$$\|f - g_f\|_{L^1} = \int_\Omega |f - g_f|\, d\mu = \int_{\Omega \setminus A} |f|\, d\mu + \int_A |f - g_f|\, d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_A |f - g_f|\, d\mu.$$

Por otro lado, dado que $g_f = f \cdot \mathbb{1}_{A\setminus E_k^f}$ c.t.p. en $A \setminus E_k^f$, tenemos que

$$\int_A |f-g_f|\,d\mu = \int_{A\setminus E_k^f} |f-g_f|\,d\mu + \int_{A\cap E_k^f} |f-g_f|\,d\mu = \int_{A\cap E_k^f} |f-g_f|\,d\mu = \int_{A\cap E_k^f} \left| f - \frac{(k+1)f}{|f|} \right| d\mu.$$

Dado que $|f| \cdot \mathbb{1}_{E_k^f} > k+1$ y $\frac{c_F}{k+1} < \delta$, obtenemos finalmente que

$$\int_{A\cap E_k^f} \left| f - \frac{(k+1)f}{|f|} \right| d\mu = \int_{A\cap E_k^f} |f| \left(1 - \frac{k+1}{|f|}\right) d\mu \leq \int_{A\cap E_k^f} |f|\,d\mu \leq \int_{E_k^f} |f|\,d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definamos ahora $F_\varepsilon = \{g_f\}_{f\in F}$. Dado que $F \subseteq F_\varepsilon + \overline{\mathbb{B}_M(0,\varepsilon)}$, para concluir resta ver que existe un compacto débil K_ε tal que $F_\varepsilon \subseteq K_\varepsilon$.

Definamos el operador $T : L^\infty_\mu(A) \to L^1_\mu(\Omega)$ via la fórmula:

$$T(u) = u \cdot \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{\Omega\setminus A}, \qquad \forall u \in L^\infty_\mu(A).$$

El operador, como función, está bien definido pues $\mu(A) < +\infty$ y

$$\|T(u)\|_{L^1} = \int_\Omega |u \cdot \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{\Omega\setminus A}|\,d\mu = \int_A |u|\,d\mu \leq \mu(A)\|u\|_{L^\infty}, \qquad \forall u \in L^\infty_\mu(A).$$

Ahora bien, dado $f \in F$, consideremos $h_f \in L^\infty_\mu(A)$ dada por:

$$h_f = f \cdot \mathbb{1}_{A\setminus E_k^f} + \frac{(k+1)f}{|f|} \cdot \mathbb{1}_{A\cap E_k^f}.$$

Notemos que $\|h_f\|_{L^\infty} \leq k+1$ y que también $g_f = f \cdot \mathbb{1}_{A\setminus E_k^f} + \frac{(k+1)f}{|f|} \cdot \mathbb{1}_{A\cap E_k^f} + 0 \cdot \mathbb{1}_{\Omega\setminus A} = T(h_f)$.

Por lo tanto,

$$F_\varepsilon \subseteq T\left((k+1)\overline{\mathbb{B}_{L^\infty_\mu(A)}}\right).$$

Dado que $(k+1)\overline{\mathbb{B}_{L^\infty_\mu(A)}}$ es compacto débil-$\star$ (Teorema de Banach-Alaoglu),

Si $T : \left(L^\infty_\mu(A), \sigma(L^\infty_\mu(A), L^1_\mu(A))\right) \to \left(L^1_\mu(\Omega), \sigma(L^1_\mu(\Omega), L^\infty_\mu(\Omega))\right)$ fuese continua, entonces obtenemos el resultado tomando

$$K_\varepsilon = T\left((k+1)\overline{\mathbb{B}_{L^\infty_\mu(A)}}\right).$$

Veamos que efectivamente $T : \left(L^\infty_\mu(A), \sigma(L^\infty_\mu(A), L^1_\mu(A))\right) \to \left(L^1_\mu(\Omega), \sigma(L^1_\mu(\Omega), L^\infty_\mu(\Omega))\right)$ es continua. En efecto, dado que T es lineal, basta ver la continuidad en $0 \in L^\infty_\mu(A)$.

Sea $V \in \mathcal{N}(T(0))$ en $\sigma(L^1_\mu(\Omega), L^\infty_\mu(\Omega))$. Luego, como $T(0) = 0$, existen $f_0, \ldots, f_m \in L^\infty_\mu(\Omega)$ y $r > 0$ tales que $V_0(f_0, \ldots, f_m; r) \subseteq V$. Notemos que en este caso tenemos que

$$V_0(f_0, \ldots, f_m; r) = \left\{ v \in L^1_\mu(\Omega) \mid \left| \int_\Omega v\, f_i d\mu \right| < r,\ \forall i = 0, \ldots, m \right\}$$

En consecuencia,

$$T^{-1}\left(V_0(f_0, \ldots, f_m; r)\right) = \left\{ u \in L^\infty_\mu(A) \mid \left| \int_\Omega (u \cdot \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{\Omega\setminus A})\, f_i d\mu \right| < r,\ \forall i = 0, \ldots, m \right\}$$

Con esto vemos que $T^{-1}(V_0(f_0,\dots,f_m;r)) \in \sigma(L^\infty_\mu(A), L^1_\mu(A))$ pues cada $f_i \cdot \mathbb{1}_A \in L^1_\mu(A)$ y

$$\langle u, f_i \cdot \mathbb{1}_A\rangle_{L^\infty_\mu(A),L^1_\mu(A)} = \int_A u\, f_i \cdot \mathbb{1}_A d\mu = \int_\Omega (u\cdot \mathbb{1}_A + 0\cdot \mathbb{1}_{\Omega\setminus A})\, f_i d\mu.$$

En otras palabras,

$$T^{-1}(V_0(f_0,\dots,f_m;r)) = W_0(f_0\cdot \mathbb{1}_A,\dots,f_m\cdot \mathbb{1}_A;r) \in \sigma(L^\infty_\mu(A), L^1_\mu(A)).$$

□

Proposición 17.2.2 Supongamos que $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ es un espacio de medida σ-finita y que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L^1_\mu(\Omega)$ es una sucesión acotada y equi-integrable. Luego existe $\hat{f}\in L^1_\mu(\Omega)$ y una subsucesión $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\int_\Omega f_{k_j} g\, d\mu \to \int_\Omega \hat{f} g\, d\mu, \qquad \forall\, g\in L^\infty_\mu(\Omega).$$

Demostración. Notemos que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L^1_\mu(\Omega)$ es conjunto acotado y equi-integrable. Luego, está contenido en un compacto débil respecto a $\sigma\left(L^1_\mu(\Omega), L^\infty_\mu(\Omega)\right)$; Teorema de Dunford-Pettis. Finalmente, la existencia de una subsucesión que converge débilmente está garantizada por el Teorema de Eberlein-Šmulian. □

17.3 Medidas de Radon

Ahora vamos a estudiar brevemente el dual topológico de $\mathscr{C}(\mathbf{X})$ y veremos su relación con los espacios L^1.

Definición 17.3.1 Supongamos que $\mathbf{X}\subseteq\mathbb{R}^n$ es un subconjunto compacto y no vacío. El dual topológico de $(\mathscr{C}(\mathbf{X}), \|\cdot\|_\infty)$, denotado $M(\mathbf{X})$, se llama el espacio de medidas de Radon en $\mathbf{X}$.

Notación 17.1. *La norma dual la denotaremos*

$$\|\ell\|_{M(\mathbf{X})} = \sup_{\|g\|_\infty\le 1} \left|\langle \ell, g\rangle_{M(\mathbf{X}),\mathscr{C}(\mathbf{X})}\right|.$$

O

- El espacio $(\mathscr{C}(\mathbf{X}), \|\cdot\|_\infty)$ no es reflexivo (Problema 2, Ayudantía 8).
- El nombre medidas de Radon para $M(\mathbf{X})$ viene del hecho que todo $\ell\in M(\mathbf{X})$ se puede representar a través de dos medidas definidas sobre los Borelianos de $\mathbf{X}$.

Corolario 17.3.1 Supongamos que $\mathbf{X}\subseteq\mathbb{R}^n$ es un subconjunto compacto y no vacío. Si $\{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq M(\mathbf{X})$ es una sucesión acotada, entonces existen $\hat{\ell}\in M(\mathbf{X})$ y $\{\ell_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\langle \ell_{k_j}, g\rangle_{M(\mathbf{X}),\mathscr{C}(\mathbf{X})} \to \langle \hat{\ell}, g\rangle_{M(\mathbf{X}),\mathscr{C}(\mathbf{X})}, \qquad \forall g\in\mathscr{C}(\mathbf{X}).$$

Demostración. Consecuencia directa del Teorema de Banach-Alaoglu y la Proposición 6.2.3. □

17.3.1 Relación con L^1

Proposición 17.3.2 Supongamos que $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto y que $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida con $\Omega \subseteq \mathbf{X}$. Si $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L^1_\mu(\Omega)$ es una sucesión acotada, entonces existen dos medidas Borelianas finitas, $\nu_1 : \mathscr{B}(\mathbf{X}) \to \mathbb{R}$ y $\nu_2 : \mathscr{B}(\mathbf{X}) \to \mathbb{R}$, y una subsucesión $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\int_\Omega f_{k_j} g \, d\mu \to \int_{\mathbf{X}} g \, d\nu_1 - \int_{\mathbf{X}} g \, d\nu_2, \qquad \forall g \in \mathscr{C}(\mathbf{X}).$$

Demostración. Dada $f \in L^1_\mu(\Omega)$, definamos el operador $\ell^f : \mathscr{C}(\mathbf{X}) \to \mathbb{R}$ via la fórmula:

$$\ell^f(g) := \int_\Omega fg \, d\mu, \qquad \forall g \in \mathscr{C}(\mathbf{X}).$$

Notemos que $\ell^f \in M(\mathbf{X})$, con $\|\ell^f\|_{M(\mathbf{X})} \leq \|f\|_{L^1}$, para todo $f \in L^1_\mu(\Omega)$, pues

$$\left|\ell^f(g)\right| \leq \int_\Omega |fg| \, d\mu \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_\infty, \qquad \forall g \in \mathscr{C}(\mathbf{X}).$$

Si $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L^1_\mu(\Omega)$ es una sucesión acotada, entonces $\{\ell^{f_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq M(\mathbf{X})$ es también acotada.

Luego, por el Corolario 17.3.1 y Proposición C.4.2 (Teorema de representación de Riesz-Radon) , existen $\hat{\ell} \in M(\mathbf{X})$, una subsucesión $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ y dos medidas Borelianas finitas, $\nu_1 : \mathscr{B}(\mathbf{X}) \to \mathbb{R}$ y $\nu_2 : \mathscr{B}(\mathbf{X}) \to \mathbb{R}$, tales que

$$\int_\Omega f_{k_j} g \, d\mu = \langle \ell^{f_{k_j}}, g \rangle_{M(\mathbf{X}), \mathscr{C}(\mathbf{X})} \to \langle \hat{\ell}, g \rangle_{M(\mathbf{X}), \mathscr{C}(\mathbf{X})} = \int_{\mathbf{X}} g \, d\nu_1 - \int_{\mathbf{X}} g \, d\nu_2, \qquad \forall g \in \mathscr{C}(\mathbf{X}).$$

$\square$

18. Distribuciones: breve introducción

Las distribuciones son una generalización de las funciones integrables que resulta muy útil para definir objetos como la derivada débil y los espacios de Sobolev, que a su vez proporcionan un marco muy poderoso para estudiar las ecuaciones diferenciales parciales (EDPs).

Por ejemplo, este concepto dará cabida al famoso ejemplo de δ, la *delta de Dirac*, que representa un impulso puntual (digamos, en $x = 0$), y que es usualmente descrito, de manera informal, por satisfacer

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x)dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0), \tag{18.1}$$

para toda función φ regular.

Si bien las propiedades establecidas en (18.1) no tienen sentido para ninguna $\delta \in L^1_{loc}(\Omega)$ (se puede pensar que δ debe tener un valor infinito en $x = 0$ e integral igual a 1), la idea que se expresa es la de dualidad: Las distribuciones se definirán por la manera en que actúan sobre funciones regulares.

Para definir esto, consideremos el espacio $L^2(\Omega)$, donde Ω denota un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Entones el mapeo $T_f : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido

$$T_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx,$$

está bien definido, es lineal y continuo. Además, sabemos que T_f determina a f totalmente, y de hecho $f \mapsto T_f$ es una isometría de $L^2(\Omega)$ sobre $L^2(\Omega)^* = \mathscr{L}(L^2(\Omega), \mathbb{R})$.

Ahora bien, si consideramos T_f definido *solamente* en un espacio $D \subset L^2(\Omega)$ denso, tendremos toda la información del funcional lineal T_f (pues se puede extender por continuidad y así recuperar el funcional original en todo $L^2(\Omega)$). Por otra parte, si el espacio D es dotado de una topología más fuerte que la heredada de $L^2(\Omega)$, y también posee estructura de espacio vectorial (compatible con la topología), entonces los funcionales lineales y continuos definidos en D (es decir, su espacio dual) incluirá a todas las T_f, es decir, a todo $L^2(\Omega)$, pero podría incluir muchas más funciones. Esto es justamente lo que ocurre si elegimos D como el espacio de funciones regulares con soporte compacto, y su dual resultarán ser justamente las distribuciones.

Para hacer preciso todo lo anterior, debemos ver varias definiciones y propiedades.

18.1 Espacios y topologías

Para llegar a la definición de las distribuciones, revisaremos los distintos espacios que usualmente se consideran para las funciones regulares, y sus respectivas topologías. Presentamos los principales espacios para hacer comprensible la construcción de la topología en $C_0^\infty(\Omega)$ (que no resulta simple de definir). Para cada caso, mencionaremos sin demostración el tipo de espacio que resulta.

Una notación usual es la de multiíndices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, y la del operador diferencial

$$\partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Si $K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ y $m \in \mathbb{N}$, entonces $C^m(K)$ está bien definido (con la usual convención de tomar derivadas laterales cuando corresponde), y puede ser dotado de la norma

$$\|u\|_{C^m(K)} := \sup\{|\partial^\alpha u(x)| : x \in K, |\alpha| \leq m\},$$

dotado de la cual, es un espacio de Banach.

Para el espacio

$$C^\infty(K) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(K),$$

pedemos considerar la familia de seminormas

$$p_m(u) := \|u\|_{C^m(K)}, \quad m \in \mathbb{N},$$

que lo convierten en un espacio de Frechet.

Para espacios definidos en conjuntos abiertos, ya no es posible tomar norma del supremo. Sin embargo, es posible usar el siguiente resultado Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces existen conjuntos compactos $\{K_j\}$ tal que $K_j \subset int(K_{j+1})$ y $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j = \Omega$.

Demostración. Basta considerar $K_j = \{x \in \Omega : |x| \leq j, dist(x, \Omega^c) \geq 1/j\}$, $j \in \mathbb{N}$.

Entonces podemos considerar, para funciones regulares en Ω, la familia de seminormas

$$p_{m,j} := \sup\{|\partial^\alpha u(x)| : x \in K_j, |\alpha| \leq m\}.$$

Entonces resulta que, para cada $k \in \mathbb{N}$, el espacio $C^k(\Omega)$ con las seminormas $\{p_{k,j} : j \in \mathbb{N}\}$, así como el espacio $C^\infty(\Omega) = \bigcap C^k(\Omega)$ con las seminormas $\{p_{k,j} : k \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}\}$, son espacios de Frechet con la topología inducida por tales seminormas.

Si $K \subset \Omega$ es compacto, entonces el espacio $C_K^\infty := \{u \in C^\infty(\Omega) : sop(u) \subset K\}$ es un subespacio cerrado de $C^\infty(\Omega)$, por lo que también se trata de un espacio de Frechet.

Ahora bien, el espacio de funciones regulares más importante para la teoría de las distribuciones es el siguiente.

Definición 18.1.1 Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto no vacío, definimos

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi : \Omega \to \mathbb{R} : \varphi \in C^\infty(\Omega),\ \mathrm{sop}(\varphi) \text{ es compacto}\}.$$

A modo de observación, es claro que $C_0^\infty(\Omega) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $p \geq 1$.

■ **Ejemplo 18.1.1** La función

$$\eta(x) = \begin{cases} C\exp\left(\dfrac{1}{|x|^2-1}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1, \end{cases}$$

con C constante, pertenece a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. ■

Ahora bien, la topología que definiremos en este espacio no es la que se obtiene como subespacio de $C^\infty(\Omega)$, pues resulta que no sería un espacio completo: en efecto, intuitivamente se puede pensar que nada impide que el soporte de una sucesión convergente de funciones se acerque arbitrariamente a la frontera de Ω, resultando en un límite cuyo soporte no es compacto, como es ilustrado en el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 18.1.2** Sea $\Omega = (-2,2)$ y consideremos a una función $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $sop(\varphi) = [-1,1]$. Si tomamos $\varphi_n(x) = \varphi(x-1+1/n)$ entonces $\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $\varphi_n \to \tilde{\varphi}$ en C^∞, donde $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x-1)$, función cuyo soporte es $[0,2]$. ■

La manera usual de definir una topología secuencialmente completa en $C_0^\infty(\Omega)$ es la siguiente. Por el Lema 18.1, se tiene que

$$C_0^\infty(\Omega) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_{K_j}^\infty(\Omega). \tag{18.2}$$

Existe una definición general para definir una topología en un espacio que se escribe de la forma (18.2), por medio de los espacios que aparecen en la unión (los espacios $C_{K_j}^\infty(\Omega)$ en este caso). Se trata de la *topología límite inductivo*, cuya definición precisa no veremos, pero que el lector podrá consultar. Usualmente se denota por $\mathscr{D}(\Omega)$ al espacio $C_0^\infty(\Omega)$ dotado de la topología asociada a la convergencia anterior definida.

Para los objetivos de estas notas, nos bastará enunciar las principales propiedades de esta topología para el espacio $C_0^\infty(\Omega)$ (que tomaremos como una definición):

Proposición 18.1.3 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto no vacío. Denotaremos por $\mathscr{D}(\Omega)$ al espacio $C_0^\infty(\Omega)$ dotado de la topología de la topología descrita arriba. Entonces se tiene:

1. El espacio $\mathscr{D}(\Omega)$ un espacio vectorial topológico localmente convexo y secuencialmente completo.
2. Una sucesión $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge a $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:
   a) Existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que $\mathrm{sop}(\varphi_n) \subset K$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y
   b) Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ se tiene $\partial^\alpha \varphi_n \to \partial^\alpha \varphi$ uniformemente en K.
3. Si Y es un e.v.t. loc. convexo, entonces una función lineal $\Lambda : C_0^\infty(\Omega) \longrightarrow Y$ es continua si y sólo si, para cada $j \in \mathbb{N}$, $\Lambda : C_{K_j}^\infty(\Omega) \longrightarrow Y$ es continua.

En el anterior resultado, de particular interés serán los casos $Y = C_0^\infty(\Omega)$ e $Y = \mathbb{R}$. Para este último caso, se tiene que $\Lambda : C_0^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua si y sólo si, para cada $j \in \mathbb{N}$, existen $N_j \in \mathbb{N}$, $C_j > 0$

tales que

$$|\Lambda(\varphi)| \leq C_j \sup\{|\partial^\alpha \varphi(x)| : x \in K_j, |\alpha| \leq N_j\}.$$

18.2 Distribuciones

Como ya comentamos al inicio, las distribuciones son funcionales lineales y continuas en $\mathscr{D}(\Omega)$.

Definición 18.2.1 Una distribución es un elemento $T \in \mathscr{D}'(\Omega) := \left(\mathscr{D}(\Omega)\right)^*$, esto es, $T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ es lineal y continuo respecto a la topología de $\mathscr{D}(\Omega)$, el cual denotaremos por $T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$ para toda $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

■ **Ejemplo 18.2.1** Se define $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$ para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Esta regla define una distribución $\delta \in \mathscr{D}'(\Omega)$, llamada Delta de Dirac. ■

■ **Ejemplo 18.2.2** Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, (en particular si $f \in L^p(\Omega)$), entonces podemos definir

$$\langle \Lambda_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f \varphi dx, \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Se demuestra que Λ_f define una distribución. Gracias a los resultados de aproximación (siguiente sección) se tendrá que $f \longmapsto \Lambda_f$ es un mapeo inyectivo, por lo que se usualmente identificaremos la función f con la distribución Λ_f, lo cual es una de las principales características de las distribuciones. ■

El espacio $\mathscr{D}'(\Omega)$ es un espacio vectorial, que puede ser dotado de una topología compatible con la estructura algebraica: la débil$-*$. Es decir, $\Lambda_k \to \Lambda$ en $\mathscr{D}'(\Omega)$ ssi $\langle \Lambda_k, \varphi \rangle \to \langle \Lambda, \varphi \rangle$ para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

18.3 Propiedades de aproximación

A continuación veremos algunos teorema de regularización, con el objetivo de demostrar que $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $p \in [1, +\infty)$, lo que directamente implica, por dualidad, que $f \in L^q \longmapsto \Lambda_f \in \mathscr{D}'$ es un mapeo inyectivo (de hecho, veremos que también es cierto para el caso más general $f \in L^1_{loc}$).

Definición 18.3.1 Dadas u, v funciones integrables definidas en $\mathbb{R}^n$ a valores reales, se define el producto convolución $u * v$ por

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy.$$

Teorema 18.3.1 — Desigualdad de Young. Sean $u \in L^p(\mathbb{R}),\ v \in L^q(\mathbb{R})$ para $p, q \geq 1$. Sea r tal que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

Entonces $u * v \in L^r$ y

$$\|u * v\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R})} \|v\|_{L^q(\mathbb{R})}.$$

Consideramos $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ definida en el Ejemplo 18.1.1, donde elegimos C tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)dx = 1,$$

y para cada $\varepsilon > 0$, denotamos

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right),$$

entonces

- $\eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,
- $\mathrm{sop}(\eta_\varepsilon) = \overline{B_\varepsilon(0)}$,
- $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x)dx = 1$.

Dada una función $f \in L^p(\Omega)$, podemos extenderla por cero a todo $\mathbb{R}^n$ (y denotamos de la misma forma a la función obtenida), para obtener $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Definimos a continuación

$$f_\varepsilon(x) = (f * \eta_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\eta_\varepsilon(y)dy = \int_{B_\varepsilon} f(x-y)\eta_\varepsilon(y)dy. \tag{18.3}$$

Para estudiar la relación con los espacios L^p, es conveniente considerar el subespacio de tales funciones con soporte compacto:

$$L_c^p(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : sop(u) \subset \Omega \text{ es compacto }\}$$

Sea $f \in L^p(\Omega)$. Entonces

1. $\mathrm{sop}(f_\varepsilon) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}\big(x, \mathrm{sop}(f)\big) \leq \varepsilon\}$.
2. $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
3. Si $f \in L_c^p(\Omega)$ entonces existe ε_0 tal que $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ para $\varepsilon < \varepsilon_0$.
4. Si f es continua en Ω, entonces $f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f$ uniformemente en compactos de Ω.
5. Si $p \in [1,\infty)$ entonces
$$\|f_\varepsilon\|_p \leq \|f\|_p \quad y \quad \|f_\varepsilon - f\|_p \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Demostración. Probaremos 5. Sea $q = p/(p-1)$. Por la desigualdad de Holder se tiene

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)f(y)dy &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)dy\right)^{1/q}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)|f(y)|^p dy\right)^{1/p} \\ &= \left(\int \eta_\varepsilon(x-y)|f(y)|^p dy\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Por esta desigualdad y el Teorema de Fubini tenemos que

$$\|f_\varepsilon\|_{L^p}^p = \int_\Omega |f_\varepsilon|^p dx \leq \int_\Omega \left(\int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)|f(y)|^p dy\right)dx = \int_\Omega |f(y)|^p \left(\int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)dx\right)dy \tag{18.4}$$

$$\leq \int_\Omega |f(y)|^p \tag{18.5}$$

$$= \|f\|_p^p. \tag{18.6}$$

Ahora, dado $\delta > 0$, sabemos que existe $g \in C_0(\Omega)$ tal que $\|g - f\|_p < \delta$. Por (18.6) se tiene

$$\|g_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \leq \|g - f\|_p < \delta.$$

Por la propiedad 4, como g tiene soporte compacto, tenemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|g_\varepsilon - g\|_p < \delta$. Finalmente

$$\|f - f_\varepsilon\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g_\varepsilon\|_p + \|g_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p < 3\delta,$$

de donde se sigue el resultado.

■ **Ejemplo 18.3.2** Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Entonces f_ε está bien definida en $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ y $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Notar que $f_\varepsilon \not\to f$ en $L^\infty(\Omega)$ pero $\|f_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \|f\|_\infty$. ■

Ya estamos listos para demostrar el principal resultado de esta sección.

Teorema 18.3.3 Para cada $p \in [1, \infty)$, el espacio $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$.

Demostración. Usaremos como paso intermedio el espacio $L^p_c(\Omega)$ de funciones en $L^p(\Omega)$ con soporte compacto en Ω: Si $f \in L^p_c(\Omega)$, entonces el Lema 18.3 implica que $\operatorname{sop}(f_\varepsilon)$ es un compacto de Ω para $\varepsilon > 0$ pequeño, y además $f_\varepsilon \to f$ en $L^p(\Omega)$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Por otra parte, consideremos el caso general $f \in L^p(\Omega)$, y sea $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ la sucesión de conjuntos compactos cuya existencia garantiza el Lema 18.1. Denotando por χ la función característica de un conjunto, se tiene $\{\chi_{K_j} f\}_{j\in\mathbb{N}} \subset L^p_c(\Omega)$, $|\chi_{K_n} f| \leq |f|$ y además $\chi_{K_j} f \to f$ puntualmente en Ω. Entonces, por el Teorema de Convergencia dominada se tiene $\|\chi_{K_n} f - f\|_{L^p} \to 0$.

Por lo tanto, concluimos que $f_\varepsilon \to f$ en $L^p(\Omega)$ cuando $\varepsilon \to 0$ para cada $f \in L^p(\Omega)$. □

Como ya hemos mencionado, por dualidad tenemos el siguiente resultado.

Corolario 18.3.4 El mapeo $f \in L^1_{loc}(\Omega) \longmapsto \Lambda_f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ es inyectivo.

Dado este resultado, podemos pensar el conjunto de funciones $L^1_{loc}(\Omega)$, (y en particular cada uno de los espacios $L^p(\Omega)$), como *subconjuntos* del enorme espacio $\mathscr{D}'(\Omega)$. Comúnmente, para referirnos a la distribución Λ_f hablaremos simplemente de la función f.

18.4 Derivadas de distribuciones

A continuación, nuestro objetivo será derivar distribuciones, y por tanto, cualquier función localmente integrable.

Para explicar de manera intuitiva las propiedades que obtendremos, pensemos que si $f \in C_0^1(\mathbb{R})$ se deberá tener

$$(\Lambda_f)' = \Lambda_{f'}.$$

Es decir, la *derivada distribucional* deberá coincidir con la distribución definida por la derivada de la funcion.

Por otra parte, para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, integrando por partes tenemos que

$$\langle \Lambda_{f'}, \varphi \rangle = \int_\Omega f' \varphi dx = -\int_\Omega f \varphi' dx = -\langle \Lambda_f, \varphi' \rangle.$$

Por lo tanto, esto sugiere definir, para toda $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$,

$$\langle \Lambda', \varphi \rangle = \langle \Lambda, -\varphi' \rangle.$$

Y más en general, tenemos la siguiente:

Definición 18.4.1 Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, para cada $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ se define $\partial_{x_j}\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ por

$$\langle \partial_{x_j}\Lambda, \varphi \rangle = -\langle \Lambda, \partial_{x_j}\varphi \rangle, \ \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

y para todo multiíndice α

$$\langle D^\alpha \Lambda, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle \Lambda, D^\alpha \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Recordamos el Teorema de Gauss para $\mathbb{R}^n$ (que es una generalización de la integración por partes en $\mathbb{R}$) para Ω se tiene

$$\int_\Omega u\partial_{x_i} v dx = -\int_\Omega v\partial_{x_i} u dx + \int_{\partial\Omega} uv\widehat{n}_i d\sigma.$$

■ **Ejemplo 18.4.1** Sea $f \in C^1(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$. Entonces, para cada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \langle \partial_{x_i} f, \varphi \rangle = -\langle f, \partial_{x_i}\varphi \rangle &= -\int_\Omega f\partial_{x_i}\varphi dx \\ &= \int_\Omega \varphi \partial_{x_i} f dx - \int_{\partial\Omega} f\varphi \widehat{n}_i d\sigma \\ &= \int_\Omega (\partial_{x_i} f)\varphi dx, \end{aligned}$$

es decir, la derivada usual coincide con la derivada distribucional. ■

■ **Ejemplo 18.4.2** Consideramos H la función de salto (usualmente llamada función escalón de Heaviside)

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

donde $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Para derivar H en el sentido de las distribuciones, aplicamos la definición vista arriba, y tenemos

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} H\varphi' dx = -\int_0^\infty \varphi' dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

es decir, $H' = \delta$ en el sentido de las distribuciones, donde δ denota la delta de Dirac en 0, que ya hemos introducido antes. ■

Notemos que $u, D^\alpha u \in D'(\Omega)$ implica

$$\langle D^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^\alpha \langle u, D^\alpha \varphi \rangle. \tag{18.7}$$

18.5 Espacios de Sobolev

Ahora introduciremos los espacios que son bastante útiles para el estudio de ecuaciones diferenciales parciales. Veremos solamente las definiciones y las propiedades más básicas.

Definición 18.5.1 Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, definimos el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ por

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \partial_{x_j} u \in L^2(\Omega), \forall j = 1, \ldots, n.\}.$$

■ **Ejemplo 18.5.1** La función de Heaviside H no pertenece a $H^1(\Omega)$, pues $H' = \delta_0 \notin L^2(\Omega)$. ■

■ **Ejemplo 18.5.2** Sea $f(x) = |x|$, la cual no es diferenciable en el sentido usual. Para $\Omega = (-1,1)$ se tiene

$$\langle f', \varphi \rangle = -\int_{-1}^{1} f'(x)\varphi(x)dx = -\int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)dx = \int_{-1}^{0} x\varphi(x)dx - \int_{0}^{1} x\varphi(x)dx$$

integrando por partes y utilizando que φ tiene soporte compacto

$$\langle f', \varphi \rangle = \int_{-1}^{0} (-\varphi(x))dx + \int_{0}^{1} \varphi(x)dx = \int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)dx$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ -1, & -1 < x < 0 \end{cases},$$

así $f' = g$ en el sentido de las distribuciones. ■

Dotamos al espacio $H^1(\Omega)$ con la norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \textstyle\sum_{j=1} \|\partial_{x_j} u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \tag{18.8}$$

$$= \left(\int_{\Omega} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx \right)^{1/2}. \tag{18.9}$$

Ahora probaremos que el espacio $\left(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}\right)$ resulta ser un espacio completo. Más aún, la norma (18.8) proviene del producto interno

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} \tag{18.10}$$

Proposición 18.5.3 El espacio $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Ahora, cuando trabajamos con funciones en $L^2(\Omega)$, a priori, no tiene sentido evaluar funciones en el borde, pues este resulta ser un conjunto de medida n-dimensional 0. Es así que se introduce el operador traza

A continuación, introducimos un importante subespacio de $H^1(\Omega)$.

Definición 18.5.2 Se define $H_0^1(\Omega)$ como la clausura en $H^1(\Omega)$ del conjunto $C_c^\infty(\Omega)$.

18.5.1 Caso unidimensional: el espacio de Sobolev $H^1(a,b)$

En esta parte, enunciaremos y demostraremos varias propiedades de espacios de Sobolev para el caso particular de una dimensión, dado que las demostraciones son mś sencillas en este caso. La mayoría de los resultados tienen un análogo para abiertos acotados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Consideraremos un dominio $(a,b) \subset \mathbb{R}$, que puede incluir el caso $(-\infty, +\infty)$ (a menos que se exprese explícitamente otra hipótesis).

Proposición 18.5.4 Una distribución $\Lambda \in \mathscr{D}'(a,b)$ satisface

$$\Lambda' = 0 \iff \Lambda \text{ es una función constante.}$$

Demostración. Se deja como ejercicio. Se sugiere seguir los siguientes pasos:

1. Pruebe la parte $(\Leftarrow)$.
2. Pruebe que si $\Lambda' = 0$ entonces $\langle \Lambda, \phi \rangle = 0$ para todo $\phi \in \mathscr{D}_0 := \{\phi \in \mathscr{D}(a,b) : \int_a^b \phi(x)dx = 0\}$.
3. Sea $\phi_1 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ cualquier función test tal que $\int_a^b \phi_1(x)dx = 1$. Pruebe que cada $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$ se descompone de la forma
$$\varphi = \phi_0 + \left(\int_a^b \varphi(x)dx \right) \phi_1 \tag{18.11}$$
para alguna $\phi_0 \in \mathscr{D}_0$.
(Obs: La elección de ϕ_0 depende de φ, mientras que ϕ_1 está fija).
4. De (3) y (2), concluya la parte $(\Rightarrow)$.

En la siguiente proposición se enuncia un resultado muy útil: en dimensión 1, las funciones del espacio de Sobolev $H^1(a,b)$ son continuas (en todo el intervalo $[a,b]$).

Proposición 18.5.5 Para toda $u \in H^1(a,b)$ existe $\tilde{u} \in C([a,b])$ tal que $u = \tilde{u}$ c.t.p. en (a,b), y además

$$\tilde{u}(y) = \tilde{u}(x) + \int_x^y u'(t)dt \tag{18.12}$$

para todo $x, y \in [a,b]$.

Demostración. Ver ejercicios / ayudantía.

Gracias a este resultado, podemos considerar que $H^1(a,b) \subset C([a,b])$ (dado que cada elemento tiene un representante continuo). De hecho, la representación (18.12) nos permitirá probar que tal inyección es continua, (y de hecho *compacta*, concepto que veremos más adelante), así como la continuidad del operador traza.

Proposición 18.5.6 La inyección

$$u \in H^1(0,1) \mapsto u \in C([a,b])$$

está bien definida, es lineal y continua.

Demostración. Por la Proposición 18.5.5, sabemos que cada elemento de $H^1(a,b)$ tiene un representante continuo. Es decir, es igual c.t.p. a una función continua, por lo que la inyección está bien definida, y además, claramente, es lineal.

Además, para cada $u \in H^1(a,b)$, por (18.12) se tiene que, para cada $x \in (a,b)$,

$$|u(x)| \leq |u(y)| + \int_a^b |u'(t)|\, dt.$$

Usando desigualdad de Hölder, se obtiene que

$$|u(x)| \leq |u(y)| + c_1 \|u'\|_{L^2}.$$

Integrando esta desigualdad en $y \in (a,b)$ y aplicando de nuevo Holder, tenemos

$$|u(x)| \leq c_2\|u\|_{L^2} + c_1\|u'\|_{L^2}$$

para cada $x \in (a,b)$. Por lo tanto, tomando supremo en $x \in (a,b)$, concluimos que

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{H^1},$$

lo que demuestra la continuidad de la inyección. $\square$

En general, se puede probar que este espacio se caracteriza por

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : tr(u) = 0\}. \tag{18.13}$$

Teorema 18.5.7 — Desigualdad de Poincaré. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado y no vacío. Entonces existe una constante $C > 0$, que depende sólo de Ω, tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

para toda $u \in H_0^1(\Omega)$.

Notemos que la desigualdad de Poincaré implica que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ es una norma en $H_0^1(\Omega)$, equivalente a la norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Es así que $\left(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}\right)$ resulta ser también un espacio completo.

19. Problemas de certámenes

19.1 Enunciados

19.1.1 Problema 2 - Certamen 2 - 2019

Sea $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ un espacio de Banach real uniformemente convexo y sea $C \subseteq \mathbf{E}$ un conjunto convexo cerrado no vacío.

a) Demuestre por contradicción que para todo $r > 0$ y $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}(0,r)} \text{ con } \|x-y\|_{\mathbf{E}} > \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_{\mathbf{E}}^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|_{\mathbf{E}}^2 + \frac{1}{2}\|y\|_{\mathbf{E}}^2 - \delta.$$

b) Demuestre para todo $x \in \mathbf{E}$ existe un **único** elemento en C, que llamaremos la proyección de x sobre C y que denotaremos $P_C(x)$, tal que

$$\|x - P_C(x)\|_{\mathbf{E}} = \operatorname{dist}(x, C) := \inf_{c \in C} \|x - c\|_{\mathbf{E}}.$$

c) Sea $\bar{x} \in \mathbf{E}$ fijo y $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ una sucesión que verifica que $c_k \in C$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y es tal que

$$\lim_{k \to +\infty} \|\bar{x} - c_k\|_{\mathbf{E}} = \operatorname{dist}(\bar{x}, C)$$

Demuestre $c_k \to P_C(\bar{x})$ fuertemente en $\mathbf{E}$ cuando $k \to +\infty$.

19.1.2 Problema 2 - Certamen 2 - 2019

Sea $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ un espacio de Banach real. Sean $\varphi : \mathbf{E}^* \to \mathbb{R}$ un funcional lineal y $\alpha \in \mathbb{R}$ dados. Suponga que el hiperplano $H \subseteq \mathbf{E}^*$ definido más abajo es cerrado para la topología $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})$:

$$H := \{\ell \in \mathbf{E}^* \mid \varphi(\ell) = \alpha\}.$$

a) Pruebe que $\varphi : \mathbf{E}^* \to \mathbb{R}$ es continuo para el caso en que en $\mathbf{E}^*$ se considera la topología $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})$.
INDICACIÓN: Note que dado $\bar{\ell} \in \mathbf{E}^*$, los conjuntos de la forma $W = W_{\bar{\ell}}(x_0, \ldots, x_m; \delta) - \bar{\ell}$ son vecindades simétricas y abiertas de $0 \in \mathbf{E}^*$ en la topología $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})$.

b) Usando la parte anterior, pruebe que existe $\bar{x} \in \mathbf{E}$ con $\bar{x} \neq 0$ tal que

$$H = \{\ell \in \mathbf{E}^* \mid \langle \ell, \bar{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \alpha\}.$$

19.1.3 Problema 3 - Certamen 2 - 2019

Sea $\mathscr{AC}[0,1]$ el conjunto de todas las funciones continuas en $[0,1]$ a valores en $\mathbb{R}$ que son derivables en casi todo punto de $[0,1]$ y cuya derivada pertenece a $L^1_{\mathrm{m}}([0,1])$. En particular, si $x \in \mathscr{AC}[0,1]$ entonces

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(s)ds, \qquad \forall t \in [0,1].$$

Sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{AC}[0,1]$ una sucesión tal que $\{x_k(t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotado para cada $t \in [0,1]$ y para la cual existe $\alpha \in L^1_{\mathrm{m}}([0,1])$ positiva que verifica

$$|x'_k(t)| \leq \alpha(t), \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \text{ c.t.p. } t \in [0,1].$$

a) Pruebe que existe una subsucesión de $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente a algún $\bar{x} \in \mathscr{C}[0,1]$.
Por simplicidad, asumamos que la subsucesión encontrada en la parte anterior coincide con la sucesión original. Ahora buscamos demostrar que $\bar{x} \in \mathscr{AC}[0,1]$ con $x'_{n_k} \rightharpoonup \bar{x}'$ débilmente en la topología $\sigma(L^1_{\mathrm{m}}([0,1]), L^\infty_{\mathrm{m}}([0,1]))$ para alguna subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$.

b) Para cada $k \in \mathbb{N}$, considere la función $t \mapsto w_k(t) := \dfrac{x'_k(t)}{\alpha(t)}$ definida c.t.p. en $[0,1]$. Pruebe que existe una subsucesión $\{w_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\bar{w} \in L^\infty_{\mathrm{m}}([0,1])$ tal que $w_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{w}$ débilmente en $\sigma\left(L^\infty_{\mathrm{m}}([0,1]), L^1_{\mathrm{m}}([0,1])\right)$.

c) Sea $T : L^\infty_{\mathrm{m}}([0,1]) \to L^1_{\mathrm{m}}([0,1])$ el operador definido por

$$T(w) = \alpha w, \qquad \forall w \in L^\infty_{\mathrm{m}}([0,1]).$$

Pruebe que T es continuo si en $L^\infty_{\mathrm{m}}([0,1])$ se considera la topología débil-$*$ $\sigma\left(L^\infty_{\mathrm{m}}([0,1]), L^1_{\mathrm{m}}([0,1])\right)$ y en $L^1_{\mathrm{m}}([0,1])$ la topología débil $\sigma\left(L^1_{\mathrm{m}}([0,1]), L^\infty_{\mathrm{m}}([0,1])\right)$.

d) Pruebe que $x'_{n_k} \rightharpoonup \alpha\bar{w}$ débilmente en $\sigma\left(L^1_{\mathrm{m}}([0,1]), L^\infty_{\mathrm{m}}([0,1])\right)$ y concluya el resultado pedido.

19.1.4 Problema 2 - Certamen 2 - 2020

En este problema supondremos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach real, $K \subseteq \mathbf{E}$ es un subconjunto compacto no vacío de $\mathbf{E}$ y $\Gamma \subseteq \mathbf{E}^*$ es un cono convexo cerrado débil-$\star$ no vacío de $\mathbf{E}^*$.

a) Supongamos que $K \subseteq \mathbf{E}$ es convexo. El objetivo de esta parte es demostrar que si

$$\forall \ell \in \Gamma,\ \exists x \in K \text{ (que puede depender de } \ell) \text{ tal que } \langle \ell, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \geq 0 \tag{H}$$

entonces

$$\exists x_0 \in K \text{ tal que } \langle \ell, x_0 \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \geq 0, \qquad \forall \ell \in \Gamma. \tag{C}$$

Notemos que la diferencia entre (H) y (C), es que en esta última x_0 no depende de $\ell \in \Gamma$. Observemos también que (C) es equivalente a decir que $A \cap K \neq \emptyset$, donde

$$A := \{x \in \mathbf{E} \mid \langle \ell, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \geq 0 \text{ para todo } \ell \in \Gamma\}.$$

En adelante asumiremos por contradicción que $A \cap K = \emptyset$.

1) Muestre que existe $\ell_0 \in \mathbf{E}^*$ tal que

$$\sup_{x\in K}\langle \ell_0, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} < 0 \leq \inf_{a\in A}\langle \ell_0, a\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}.$$

INDICACIÓN: Pruebe que A es un conjunto convexo cerrado no vacío.

2) Muestre, razonando por contradicción y usando el Teorema de Hahn-Banach en $\mathbf{E}^*$, que $\ell_0 \in \Gamma$. A partir de esto demuestre que (H) $\Longrightarrow$ (C).

b) En esta parte buscamos extender la implicancia (H) $\Longrightarrow$ (C) para el caso en que K no es necesariamente convexo, pero que verifica que $Q := \bigcup_{\lambda\geq 0}\lambda K$ es convexo y que

$$\forall x,y\in K, \quad 0 \notin [x,y] := \{z\in \mathbf{E} \mid \exists \lambda \in [0,1],\ z = \lambda x + (1-\lambda)y\}.$$

1) Verifique que $0 \notin K$ y pruebe que Q es cerrado.

2) Muestre que existen $\ell_0 \in E^*$ y $\delta > 0$ tales que $\langle \ell_0, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \geq \delta$, para todo $x\in K$.
INDICACIÓN: Primero justifique el hecho que si $x\in K$ entonces $-x\notin Q$. Luego muestre que para todo $x\in K$ existe $\ell\in \mathbf{E}^*\setminus\{0\}$ tal que

$$\langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} > 0 \qquad \text{y} \qquad \langle \ell, y\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \geq 0 \quad \forall y\in K.$$

Concluya el resultado pedido usando la compacidad de K.

3) Definamos $K_0 := Q\cap H$ donde $H = \{x\in \mathbf{E} \mid \ \langle \ell_0, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 1\}$. Pruebe que $x\in K$ entonces $\lambda x \in K_0$ para algún $\lambda > 0$. Además, pruebe que

$$K_0 \subseteq \bigcup_{0\leq \lambda\leq \frac{1}{\delta}} \lambda K.$$

Concluya a partir de esto que K_0 es compacto.

4) Demuestre la implicancia (H) $\Longrightarrow$ (C) usando las partes anteriores.

c) Supongamos ahora que $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ es otro espacio de Banach real. En esta parte consideramos $L\subseteq \mathbf{E}^*$ y $M\subseteq \mathbf{F}^*$ subconjuntos dados y $\psi : \mathbf{E}^* \to \mathbf{F}$ una función fija que verifica

$$\forall y^*\in M,\ \exists x^*\in L \text{ tal que } \ \langle y^*, \psi(x^*)\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} \geq 0.$$

Supongamos que adicionalmente tenemos que

i) $\psi(L)$ es compacto y $\bigcup_{\lambda\geq 0}\lambda M$ es un convexo cerrado débil-$\star$ de $\mathbf{F}^*$.

ii) $\bigcup_{\lambda\geq 0}\lambda\psi(L)$ es convexo.

iii) $0\neq \lambda\psi(x) + (1-\lambda)\psi(y)$ cualquiera sean $x,y\in L$ y $\lambda\in[0,1]$.

Pruebe que

$$\exists x_0^*\in L, \text{ tal que } \ \langle y^*, \psi(x_0^*)\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} \geq 0, \quad \forall y^*\in M.$$

d) Supongamos $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ son tales que $a<b$ y $c<d$. Tomemos $\mathbf{E} = C([a,b])$ y $\mathbf{F} = C([c,d])$, espacios de funciones continuas a valores en $\mathbb{R}$, ambos dotados de la norma $\|\cdot\|_\infty$ correspondiente. Denotemos por $P([a,b])$ y $P([c,d])$ a los conjuntos de todas las medidas de probabilidad (Borelianas) definidas sobre los intervalos $[a,b]$ y $[c,d]$, respectivamente. Notemos que $P([a,b])$ se puede identificar con un subconjunto de $\mathbf{E}^*$, pues dado $\mu\in P([a,b])$ el funcional

$$f \mapsto \ell_\mu(f) := \int_{[a,b]} f\, d\mu$$

es lineal continuo en $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$. De forma análoga $P([c,d])$ se puede identificar con un subconjunto de $\mathbf{F}^*$.
Dada una función continua $\pi : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$, consideremos $B : P([a,b]) \times P([c,d]) \to \mathbb{R}$ definido por

$$B(\mu,\nu) := \iint_{[a,b]\times[c,d]} \pi(s,t)d\mu(s)d\nu(t), \qquad \forall \mu \in P([a,b]),\ \nu \in P([c,d]).$$

Esta función están bien definida gracias al Teorema de Fubini. El objetivo de esta parte de demostrar, usando la parte anterior, que

$$c_* := \sup_{\mu\in P([a,b])} \inf_{\nu\in P([c,d])} B(\mu,\nu) = \inf_{\nu\in P([c,d])} \sup_{\mu\in P([a,b])} B(\mu,\nu) =: c^*. \tag{19.1}$$

1) Pruebe que $P([a,b])$ y $P([c,d])$ son compactos débiles-$\star$ en $\mathbf{E}^*$ y $\mathbf{F}^*$, respectivamente. Pruebe además que $\cup_{\lambda\geq 0}\lambda P([c,d])$ es un convexo cerrado débil-$\star$ en $\mathbf{F}^*$.
2) Supongamos $k \in \mathbb{N}$ fijo y consideremos la función $\psi_k : P([a,b]) \to C([c,d])$ dada por

$$\psi_k(\mu)(t) = \int_{[a,b]} \pi(s,t)d\mu(s) - \frac{kc^*}{k+1}, \qquad \forall \mu \in P([a,b]),\ \forall t \in [c,d].$$

   i) Pruebe que $\psi_k : (P([a,b]), \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})) \to (C([c,d]), \sigma(\mathbf{F},\mathbf{F}^*))$ es continua en $P([a,b])$.
   ii) Demuestre que $\psi_k(P([a,b]))$ es cerrado fuerte en $C([c,d])$.
   iii) Pruebe, usando el Teorema de Arzelá-Ascoli que $\psi_k(P([a,b]))$ es relativamente compacto en $C([c,d])$. Muestre entonces que $\psi_k(P([a,b]))$ es compacto en $C([c,d])$
3) Pruebe que $c_* \geq \frac{kc^*}{k+1}$. Concluya a partir de esto que la igualdad (19.1) es cierta.

19.1.5 Problema 3 - Certamen 2 - 2020

En este problema supondremos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach real. Diremos que $B \subseteq C$ es una **J-frontera** para C si para todo $x \in \mathbf{E}$, existe un $\ell_0 \in B$ tal que $\langle \ell_0, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \sup_{\ell\in C}\langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}$.

Un conjunto $B \subset \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}$ se dice un **J-frontera** de $\mathbf{E}$ si es una J-frontera para el conjunto $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}$

a) Supongamos que $\mathbf{E}$ es un espacio de Banach tal que su dual topológico $\mathbf{E}^*$ es separable. Sea C un subconjunto acotado convexo cerrado no vacío de $\mathbf{E}^*$. Demostraremos que si B es una J-frontera para C, entonces $C = \overline{\mathrm{conv}}(B)$.
   1) Demuestre que si $\ell_0 \in C\setminus\overline{\mathrm{conv}}(B)$, entonces existen $\varphi \in S_{\mathbf{E}^{**}}$ y $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\langle \varphi, \ell\rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} \leq \alpha < \beta < \langle \varphi, \ell_0\rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*},\ \forall \ell \in B.$$

   2) Pruebe que existe una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$ tal que $J_{x_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ en $\sigma(\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*)$ y concluya el resultado

En lo que sigue, consideremos A un subconjunto cerrado débil de $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$.

b) 1) Demuestre si A es $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$-compacto, entonces todo funcional lineal continuo $\ell \in \mathbf{E}^*$ alcanza su supremo en algún punto de A.
   2) Demuestre que si $\mathbf{E}^{**}$ es separable y todo funcional lineal continuo $\ell \in \mathbf{E}^*$ alcanza su supremo en A, entonces A es compacto débil en $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$.
   INDICACIÓN: Defina el conjunto $C = \overline{\mathrm{conv}}(A)$ y use la parte a) para demostrar que es compacto débil en $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$.

19.1.6 Problema 4 - Certamen 2 - 2020

En esta pregunta demostraremos el siguiente resultado: Un espacio de Banach $\mathbf{E}$ es reflexivo sí y solo si existe un $\theta \in (0,1)$ tal que para toda sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $S_{\mathbf{E}}$ (la esfera unitaria de $\mathbf{E}$) que verifica $\inf\{\|u\|_{\mathbf{E}} \mid u \in \operatorname{conv}\{x_0,x_1,x_2,\dots\}\} \geq \theta$ se tiene que existe $k_0 \in \mathbb{N}$, $u \in \operatorname{conv}\{x_0,\dots,x_{k_0}\}$ y $v \in \operatorname{conv}\{x_{k_0+1},\dots\}$ tales que $\|u-v\|_{\mathbf{E}} \leq \theta$.

a) Pruebe que si $\mathbf{E}$ es reflexivo, entonces los conjuntos $K_k = \overline{\operatorname{conv}}\{x_{k+1},\dots\}$ forman una familia anidada de conjuntos débiles compactos y concluya la condición necesaria.
b) Pruebe que para todo s.e.v. cerrado propio Y de un e.v.n. $(X,\|\cdot\|)$ y $\varepsilon > 0$, existe un elemento en la esfera unitaria, $x \in S_X$, tal que $\operatorname{dist}(x,Y) \geq 1-\varepsilon$.
c) Usando la parte anterior pruebe que para $\theta \in (0,1)$, existe un elemento

$$\varphi_\theta \in S_{\mathbf{E}^{**}} \setminus \bigcup_{x\in\mathbf{E}} \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}(J_x;\theta)}$$

y concluya que existe una vecindad de φ_θ en $\sigma(\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*)$ convexa V_1 disjunta de $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}(0;\theta)}$.
d) Para demostrar la condición suficiente, utilice la parte anterior para construir de manera recursiva una familia de vecindades de φ_θ en $\sigma(\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*)$ convexas y una sucesión $\{x_k\} \subset S_E$ tal que

$$V_k \cap (J_{x_{k-1}} + \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}(0;\theta)}) = \emptyset$$

Concluya por contradicción.

19.1.7 Problema 2 - Examen - 2020

En adelante supondremos que $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{F},\|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ son espacios de Banach reales.

Definición 19.1.1 Diremos que una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ es de *Cauchy débil* si para toda vecindad abierta débil $A \in \sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$ de $x=0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k - x_k \in A$ para todo $k,j \geq k_0$.

a) Demuestre que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ es una sucesión de *Cauchy débil* si y sólo si para todo $\ell \in \mathbf{E}^*$ la sucesión $\{\langle \ell, x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ es de Cauchy.
b) Supongamos que $\mathbf{E}^*$ es separable. Pruebe que toda sucesión acotada $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ tiene una subsucesión de *Cauchy débil*.
c) Demuestre que si $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ es una sucesión de *Cauchy débil*, entonces existe $c > 0$ tal que $\|x_k\|_{\mathbf{E}} \leq c$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
d) Supongamos que $\mathbf{E}$ es reflexivo. Pruebe que toda sucesión de *Cauchy débil* necesariamente converge débilmente en $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$.

Definición 19.1.2 Diremos que un operador $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$ es *débilmente compacto* si $\overline{T(\mathbb{B}_{\mathbf{E}})}$ es compacto débil en $\sigma(\mathbf{F},\mathbf{F}^*)$.

e) Supongamos que $\mathbf{E}$ o $\mathbf{F}$ es reflexivo. Pruebe que todo operador $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$ es un operador *débilmente compacto*.
f) Sean $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$ y $S \in \mathscr{L}C(\mathbf{F},\mathbf{G})$, con $(\mathbf{G},\|\cdot\|_{\mathbf{G}})$ otro espacio de Banach real. Pruebe que S o bien T es un operador *débilmente compacto*, entonces $S \circ T$ es un operador *débilmente compacto*.
g) Pruebe que si $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$ es un operador *débilmente compacto* y $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ es una sucesión de *Cauchy débil*, entonces $\{T(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{F}$ converge débilmente en $\sigma(\mathbf{F},\mathbf{F}^*)$.
h) Pruebe que si $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$ es un operador *compacto débil* entonces $\operatorname{im}(T^{**}) \subseteq J_{\mathbf{F}}(\mathbf{F})$, donde $J_{\mathbf{F}} : \mathbf{F} \to \mathbf{F}^{**}$ denota la inyección canónica en $\mathbf{F}$.

i) Pruebe que si $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$ es un operador *compacto débil* entonces T^* también lo es.
j) Pruebe que si $T \in \mathscr{L}C(c_0)$ es un operador *débilmente compacto*, entonces T operador compacto.

19.1.8 Problema 2 - Certamen 2 - 2021

Supongamos que $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach. Pruebe, usando el **Teorema de Banach-Alaoglu** y el **Teorema de Kakutani**, que $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es reflexivo si y sólo si $\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}) = \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}^{**})$.

19.1.9 Problema 3 - Certamen 2 - 2021

Sean $p,q \in (1,+\infty)$ tales $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Supongamos que $\Lambda\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función convexa, continua y que existen $\alpha > 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\Lambda(y,u) \geq \alpha|u|^p + \beta, \qquad \forall (y,u) \in \mathbb{R}^2.$$

Fijemos $b \in L^q_{\mathrm{m}}([0,1])$ y consideremos el operador $T : L^p_{\mathrm{m}}([0,1]) \times \mathbb{R} \to \mathscr{C}([0,1])$ definido por

$$T(u,x)(t) := xe^t + \int_0^t e^{(t-s)} b(s)u(s)ds, \qquad \forall t \in [0,1].$$

Pruebe, usando el **Teorema de Weierstrass-Hilbert-Tonelli**, que existen $\bar{u} \in L^p_{\mathrm{m}}([0,1])$ y $\bar{x} \in [-1,1]$ tales que, si $\bar{y} = T(\bar{u},\bar{x})$, entonces

$$\int_0^1 \Lambda(\bar{y}(t),\bar{u}(t))dt \leq \int_0^1 \Lambda(y(t),u(t))dt, \quad \forall\, u \in L^p_{\mathrm{m}}([0,1]),\ x \in [-1,1],\ y = T(u,x).$$

Indicación: Demuestre que el espacio $\mathbf{E} = L^p_{\mathrm{m}}([0,1]) \times \mathbb{R}$ dotado de la norma

$$\|(u,x)\|_{\mathbf{E}} = \|u\|_{L^p} + |x|, \qquad \forall (u,x) \in L^p_{\mathrm{m}}([0,1]) \times \mathbb{R}$$

es reflexivo. Para esto puede serle útil utilizar el **Teorema de Kakutani** y el **Teorema de Tychonoff**.

19.1.10 Problema 4 - Certamen 2 - 2021

Supongamos que $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y que $N \subseteq \mathbf{E}^*$ es un s.e.v. de $\mathbf{E}^*$. Demuestre usando el **Teorema de Hahn-Banach Geométrico**, que

$$\overline{N}^{\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})} = (N^{\perp})^{\perp}.$$

19.1.11 Problema 5 - Certamen 2 - 2021

Supongamos que $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{F},\|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ son dos e.v.n. y que $S \in \mathscr{L}C(\mathbf{F}^*,\mathbf{E}^*)$. Pruebe que $S : (\mathbf{F}^*,\sigma(\mathbf{F}^*,\mathbf{F})) \to (\mathbf{E}^*,\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}))$ es continuo si y sólo si existe $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$ tal que $S = T^*$.

19.1.12 Problema 6 - Certamen 2 - 2021

Supongamos que $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto y no vacío. Demuestre, usando el **Lema Goldstine**, que existe una sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}(\mathbf{X})$ que verifica

$$\forall \varphi \in (M(\mathbf{X}),\|\cdot\|_{M(\mathbf{X})})^*,\ \mu \in M(\mathbf{X}),\ \varepsilon > 0,\ \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } \left| \langle \varphi,\mu\rangle_{M(\mathbf{X})^*,M(\mathbf{X})} - \int_{\mathbf{X}} f_k d\mu \right| < \varepsilon.$$

19.1.13 Problema 7 - Certamen 2 - 2021

Supongamos que $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida σ-finita y que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función convexa y continua. Consideremos la función $\psi : L^\infty_\mu(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dada por

$$\psi(v) := \sup_{u \in L^1_\mu(\Omega)} \left\{ \int_\Omega uv - f(u)\, d\mu \right\}, \qquad \forall v \in L^\infty_\mu(\Omega).$$

1. Demuestre que ψ es s.c.i. para la topología débil-$\star$ $\sigma\left(L^\infty_\mu(\Omega), L^1_\mu(\Omega)\right)$.
2. Supongamos que $u_0 \in L^1_\mu(\Omega)$ es tal que existen $r > 0$ y $M \in \mathbb{R}$ para los cuales se verifica

$$\int_\Omega f(u)\, d\mu \leq M, \qquad \forall u \in \overline{\mathbb{B}_{L^1_\mu(\Omega)}(u_0, r)}.$$

Demuestre, usando el **Teorema de Banach-Alaoglu** (o algún corolario), que existe $\bar{v} \in L^\infty_\mu(\Omega)$ tal que

$$\psi(\bar{v}) - \int_\Omega u_0 \cdot \bar{v}\, d\mu = \inf_{v \in L^\infty_\mu(\Omega)} \left\{ \psi(v) - \int_\Omega u_0 v\, d\mu \right\}.$$

19.1.14 Problema 5 - Examen - 2021

Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_\mathbf{E})$ un espacio de Banach reflexivo, $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_\mathbf{F})$ es un e.v.n y $K \subseteq \mathbf{E}$ es cerrado débil. Demuestre que $T(K)$ es cerrado fuerte, donde $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ es un operador que satisface

$$\operatorname{im}(T^*) + b(K) = \mathbf{E}^*, \quad \text{donde } b(K) = \left\{ \ell \in \mathbf{E}^* \mid \sup_{x \in K} \langle \ell, x \rangle_{\mathbf{E}^*, \mathbf{E}} < +\infty \right\}.$$

19.1.15 Problema 6 - Examen - 2021

Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_\mathbf{E})$ y $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_\mathbf{F})$ son dos e.v.n. dados y que para cada $x \in \mathbf{E}$ existe un conjunto $\Phi(x) \subseteq \mathbf{F}$ no vacío dado. Pruebe que $\operatorname{gr}(\Phi^*) := \{(f, \ell) \in \mathbf{F}^* \times \mathbf{E}^* \mid \ell \in \Phi^*(f)\}$ es cerrado en la topología producto $\sigma(\mathbf{F}^*, \mathbf{F}) \otimes \sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})$, donde

$$\Phi^*(f) := \{\ell \in \mathbf{E}^* \mid \langle f, y \rangle_{\mathbf{F}^*, \mathbf{F}} \geq \langle \ell, x \rangle_{\mathbf{E}^*, \mathbf{E}},\ \forall x \in \mathbf{E},\ \forall y \in \Phi(x)\}, \qquad \forall f \in \mathbf{F}^*.$$

Muestre a partir de esto que $\Phi^*\left(\overline{\mathbb{B}}_{\mathbf{F}^*}\right)$ es cerrado débil-$\star$ en $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})$

Indicación: Puede usar (sin demostrar) que si $(\mathbf{X}, \mathscr{T}_\mathbf{X})$ es un espacio topológico compacto, $(\mathbf{Y}, \mathscr{T}_\mathbf{Y})$ es un espacio topológico Hausdorff y $\pi_\mathbf{Y} : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}$ es la proyección sobre la segunda coordenada ($\pi_\mathbf{Y}(x, y) = y$), entonces $\pi_\mathbf{Y}(A)$ es cerrado para todo $A \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ cerrado en $\mathscr{T}_\mathbf{X} \otimes \mathscr{T}_\mathbf{Y}$.

19.2 Soluciones

19.2.1 Problema 1 - Certamen 2 - 2019

a) Supongamos por contradicción que existen $r_0 > 0$ y $\varepsilon_0 > 0$ tales que para todo $\delta > 0$ se tiene que

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2_\mathbf{E} > \frac{1}{2}\|x\|^2_\mathbf{E} + \frac{1}{2}\|y\|^2_\mathbf{E} - \delta$$

para algunos $x, y \in \overline{\mathbb{B}_\mathbf{E}(0, r_0)}$ tales que $\|x - y\|_\mathbf{E} > \varepsilon_0$. Tomando $\delta = \frac{1}{k+1}$ para $k \in \mathbb{N}$, podemos construir dos sucesiones $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tales que $\|x_k - y_k\|_\mathbf{E} > \varepsilon_0$ con $x_k, y_k \in \overline{\mathbb{B}_\mathbf{E}(0, r_0)}$.

$$\left\| \frac{x_k+y_k}{2} \right\|^2_\mathbf{E} > \frac{1}{2}\|x_k\|^2_\mathbf{E} + \frac{1}{2}\|y_k\|^2_\mathbf{E} - \frac{1}{k+1} \tag{19.2}$$

y esto implica que

$$\|x_k\|_{\mathbf{E}}^2 + 2\|x_k\|_{\mathbf{E}}\|y_k\|_{\mathbf{E}} + \|y_k\|_{\mathbf{E}}^2 \geq 2\|x_k\|_{\mathbf{E}}^2 + 2\|y_k\|_{\mathbf{E}}^2 - \frac{4}{k+1}$$

y por lo tanto

$$\frac{4}{k+1} \geq (\|x_k\|_{\mathbf{E}} - \|y_k\|_{\mathbf{E}})^2 \tag{19.3}$$

Sin perdida de generalidad podemos asumir que $\|x_k\|_{\mathbf{E}} \to a$ y $\|y_k\|_{\mathbf{E}} \to b$, para algunos $a,b \geq 0$. Por (19.3) se tiene que $a = b$, y además como $\|x_k\|_{\mathbf{E}} + \|y_k\|_{\mathbf{E}} \geq \|x_k - y_k\|_{\mathbf{E}} > \varepsilon_0$ y entonces $2a \geq \varepsilon_0$ y esto último implica que $a \neq 0$. Por lo tanto podemos asumir que $\|x_k\|_{\mathbf{E}} \neq 0$ e $\|y_k\|_{\mathbf{E}} \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
Sean $a_k = \frac{x_k}{\sigma_k}$ y $b_k = \frac{y_k}{\sigma_k}$ con $\sigma_k = \max\{\|x_k\|_{\mathbf{E}}, \|y_k\|_{\mathbf{E}}\}$. Notemos que $a_k, b_k \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$ y $\sigma_k \to a$. Además,

$$\|a_k - b_k\|_{\mathbf{E}} = \frac{1}{\sigma_k}\|x_k - y_k\|_{\mathbf{E}} \geq \frac{\varepsilon_0}{\sigma_k} \to \frac{\varepsilon_0}{a}.$$

Luego existe $k_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$\|a_k - b_k\|_{\mathbf{E}} \geq \frac{\varepsilon_0}{2a}, \quad \forall\, k \geq k_0.$$

Ahora bien, como $\mathbf{E}$ es uniformemente convexo, tenemos que existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$\left\|\frac{a_k + b_k}{2}\right\|_{\mathbf{E}} < 1 - \delta_0, \quad \forall\, k \geq k_0,$$

dividiendo (19.2) por σ_k^2 tenemos

$$\frac{1}{2}\frac{\|x_k\|_{\mathbf{E}}^2}{\sigma_k^2} + \frac{1}{2}\frac{\|y_k\|_{\mathbf{E}}^2}{\sigma_k^2} - \frac{1}{(k+1)\sigma_k^2} < (1-\delta_0)^2$$

luego haciendo $k \to +\infty$ obtenemos $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < (1-\delta_0)^2$ lo que es una contradicción.

b) Notemos que la función $c \mapsto \|x - c\|_{\mathbf{E}}$ es convexa y continua en C, y además se tiene que

$$\lim_{\substack{x \in C \\ \|x\|_{\mathbf{E}} \to \infty}} \|x - c\|_{\mathbf{E}} = +\infty \qquad \text{o bien } C \text{ es acotado.}$$

Luego por el teorema de Weierstrass-Hilbert-Tonelli tenemos que existe $\bar{c} \in C$ tal que

$$\operatorname{dist}(x, C) = \|x - \bar{c}\|_{\mathbf{E}}$$

Veamos la unicidad. Supongamos que existen $c_1, c_2 \in C$ tales que $c_1 \neq c_2$ y

$$d = \operatorname{dist}(x, C) = \|x - c_1\|_{\mathbf{E}} = \|x - c_2\|_{\mathbf{E}}$$

Por la parte a) tenemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\left\|x - \frac{c_1 + c_2}{2}\right\|_{\mathbf{E}}^2 \leq \frac{1}{2}\|x - c_1\|_{\mathbf{E}}^2 + \frac{1}{2}\|x - c_2\|_{\mathbf{E}}^2 - \delta = \operatorname{dist}(x, C)^2 - \delta$$

pero $\left\|x - \frac{c_1+c_2}{2}\right\|_{\mathbf{E}}^2 \geq \operatorname{dist}(x, C)^2$, lo que es una contradicción y por lo tanto $c_1 = c_2$.

c) Notemos que la sucesión $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada, luego como $\mathbf{E}$ es reflexivo (pues es uniformemente convexo) tenemos que, gracias al Teorema de compacidad secuencial débil existe una subsucesión $\{c_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ y $\bar{c}\in C$ tales que $c_{k_j} \rightharpoonup \bar{c}$. En particular la sucesión $\bar{x}-c_{k_j} \rightharpoonup \bar{x}-\bar{c}$ y como

$$\limsup_{j\to+\infty} \|\bar{x}-c_{k_j}\|_{\mathbf{E}} = \operatorname{dist}(\bar{x},C) \leq \|\bar{x}-\bar{c}\|_{\mathbf{E}}$$

Podemos concluir que $c_{k_j} \to \bar{c}$ fuertemente por la Proposición 16.0.1. Más aún, esto implica que $\|\bar{x}-\bar{c}\|_{\mathbf{E}} = \operatorname{dist}(\bar{x},C)$, luego por la parte b) tenemos que $\bar{c} = P_C(\bar{x})$. Veamos ahora que la sucesión completa $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $P_C(\bar{x})$. Supongamos que no, luego existe una subsucesión $\{c_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ y $\varepsilon>0$ tal que

$$\|c_{k_j} - P_C(\bar{x})\|_{\mathbf{E}} \geq \varepsilon, \qquad \forall\, j\in\mathbb{N}. \tag{19.4}$$

Pasando a una subsucesión nuevamente (que denotaremos igual por simplicidad) podemos asumir que $\{c_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a algún $\hat{c}\in C$. Repitiendo el argumento anterior, podemos probar que $c_{k_j} \to \hat{c} = P_C(\bar{x})$ lo que contradice (19.4). □

19.2.2 Problema 2 - Certamen 2 - 2019

a) Notemos que si $\varphi\equiv 0$ no hay nada que probar. Supongamos $\varphi\not\equiv 0$. Dado que φ es lineal tenemos que $\varphi(\ell)-\varphi(\ell_0)=\varphi(\ell-\ell_0)$, luego basta ver que φ es continua en $\ell_0=0$, es decir, basta ver que dado $\varepsilon>0$ existe una vecindad W en $\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})$ de $\ell_0=0$ tal que

$$|\varphi(\ell)|<\varepsilon, \qquad \forall\,\ell\in W.$$

Tomemos $\bar{\ell}\in\mathbf{E}^*\setminus H$ tal que $0<\alpha-\varphi(\bar{\ell})<\varepsilon$. Como H es cerrado en $\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})$ existen $\delta>0$ y $x_0,\dots,x_m\in\mathbf{E}$ tales que

$$\ell\in W_{\bar{\ell}}(x_0,\dots,x_m;\delta) \implies \varphi(\ell)\neq\alpha.$$

Notemos que si $\varphi(\ell)>\alpha$, entonces la función

$$h(t):=\varphi(t\ell+(1-t)\bar{\ell}) = t\varphi(\ell)+(1-t)\varphi(\bar{\ell})$$

satisface $h(1)=\varphi(\ell)>\alpha$ y $h(0)=\varphi(\bar{\ell})<\alpha$ luego existe $t^*\in(0,1)$ tal que $h(t^*)=\alpha$, es decir, $t^*\ell+(1-t^*)\bar{\ell}\in H$, sin embargo $W_{\bar{\ell}}(x_0,\dots,x_m;\delta)$ es convexo y luego

$$t^*\ell+(1-t^*)\ell\in W_{\bar{\ell}}(x_0,\dots,x_m;\delta)$$

lo que no puede ser. Así, $\varphi(\ell)<\alpha$. Sea $W=W_{\bar{\ell}}(x_0,\dots,x_m;\delta)-\bar{\ell}$ es claro que $W=-W$ y que W es un abierto en $\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})$ y que contiene a $0\in\mathbf{E}^*$. Notemos que si $\ell\in W$, entonces

$$\varphi(\ell)=\varphi(\tilde{\ell})-\varphi(\bar{\ell}) \quad \text{con } \tilde{\ell}\in W_{\bar{\ell}}(x_0,\dots,x_m;\delta)$$

y entonces $\varphi(\ell)<\alpha-\varphi(\bar{\ell})<\varepsilon$. Ahora bien, como $W=-W$, tenemos que

$$|\varphi(\ell)|<\varepsilon, \qquad \forall\,\ell\in W,$$

luego φ es continua en $\ell_0=0$.

b) Notemos que, por continuidad, existen $\delta > 0$ y $x_0, \ldots, x_m \in \mathbf{E}$ tales que si

$$|\langle \ell, x_i \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| < \delta \;\; \forall\, i = 0, \ldots, m \implies |\varphi(\ell)| < 1 \tag{19.5}$$

Sean $\varphi_i(\ell) = \langle \ell, x_i \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}$ para $i = 0, \ldots, m$. Sea $\ell \in \mathbf{E}^*$ tal que $\varphi_i(\ell) = 0$ para todo $i = 0, \ldots, m$, luego $\varphi_i(k\ell) = k\varphi_i(\ell) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces por (19.5) tenemos $|\varphi((k+1)\ell)| < 1$ y por lo tanto $|\varphi(\ell)| < \frac{1}{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, necesariamente $\varphi(\ell) = 0$ y entonces por Lema 13.1 se obtiene que

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i = \left\langle \cdot\,, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}$$

$\square$

19.2.3 Problema 3 - Certamen 2 - 2019

a) Sea $z(t) = \displaystyle\int_0^t \alpha(s)\, ds$. Notemos que $z \in \mathscr{C}([0,1])$ y por lo tanto es uniformemente continua en $[0,1]$. Por otro lado, es fácil ver que

$$|x_k(t_2) - x_k(t_1)| \leq |z(t_2) - z(t_1)|, \qquad \forall\, t_1, t_2 \in [0,1],$$

luego dado que z es uniformemente continua en $[0,1]$ se concluye que $\{x_k(t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada para todo $t \in [0,1]$. Por Arzelá-Ascoli se obtiene el resultado pedido.

b) Notemos que $\|w_k\|_{L^\infty} \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego por Teorema de Banach-Alaoglu secuencial se obtiene lo pedido.

c) Dado que T es lineal, basta probar la continuidad en $w = 0$. Sea $\varepsilon > 0$ y $z_0, \ldots, z_m \in L^\infty_{\mathrm{m}}([0,1])$. Tenemos que probar que existe una vecindad A, débil-$\star$ en $L^\infty_{\mathrm{m}}([0,1])$ de $w = 0$ tal que

$$|\langle z_i, \alpha w \rangle_{L^\infty_{\mathrm{m}}([0,1]), L^1_{\mathrm{m}}([0,1])}| < \varepsilon \qquad \forall\, i = 0, \ldots, m, \; \forall\, w \in A.$$

Notemos que si $z_i \in L^\infty_{\mathrm{m}}([0,1])$, entonces $\alpha z_i \in L^1_{\mathrm{m}}([0,1])$, luego basta tomar

$$A = W_0(\alpha z_0, \ldots, \alpha z_m; \varepsilon)$$

d) Por la parte c), tenemos que $T(w_{k_j}) \rightharpoonup T(\bar{w})$ en $\sigma\left(L^1_{\mathrm{m}}([0,1]), L^\infty_{\mathrm{m}}([0,1])\right)$, es decir,

$$x'_{k_j} = \alpha w_{k_j} = T(w_{k_j}) \rightharpoonup T(\bar{w}) = \alpha \bar{w}.$$

Luego, por un lado tenemos que

$$x_{k_j}(t) \to \bar{x}(t) \qquad \forall\, t \in [0,1]$$

y por otro lado

$$x_{k_j}(t) = x_{k_j}(0) + \int_0^t x'_{k_j}(s)\, ds \to \bar{x}(0) + \int_0^t \alpha \bar{w}(s)\, ds \qquad \forall\, t \in [0,1]$$

y por lo tanto $\bar{x}(t) = \bar{x}(0) + \displaystyle\int_0^t \alpha(s)\bar{w}(s)\, ds$, y esto permite concluir que

$$\bar{x}'(t) = \alpha(t)\bar{w}(t) \qquad \forall\, t \in [0,1] \text{ c.t.p.}$$

$\square$

19.2.4 Problema 2 - Certamen 2 - 2020

a) 1) Notemos $A = \bigcap_{\ell\in\Gamma}\{x \in \mathbf{E} \mid \langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \geq 0\}$, y dado que para cada $\ell \in \Gamma$ fijo el conjunto $\{x \in \mathbf{E} \mid \langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \geq 0\}$ es convexo y cerrado entonces A es convexo y cerrado. Además, es no vacío pues $0 \in A$, luego si $A \cap K = \emptyset$, dado que K es convexo, compacto y no vacío, por Hahn-Banach geométrico (segunda versión), existe $\ell_0 \in \mathbf{E}^*$ tal que

$$\sup_{x\in K}\langle \ell_0, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} < \inf_{a\in A}\langle \ell_0, a\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}$$

dado que $0 \in A$, tenemos que $\sup_{x\in K}\langle \ell_0, a\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} < 0$.
Por otro lado, si $\inf_{a\in A}\langle \ell_0, a\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} < 0$, existiría $\bar{a} \in A$ tal que $\langle \ell_0, \bar{a}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} < 0$ pero $t\bar{a} \in A$ para todo $t > 0$,

$$\sup_{x\in K}\langle \ell_0, x\rangle_{\mathbf{E}*,\mathbf{E}} < t\langle \ell_0, \bar{a}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \qquad \forall\, t > 0$$

haciendo tender $t \to +\infty$ se tiene la contradicción.

2) Supongamos $\ell_0 \notin \Gamma$. Dado que Γ es un convexo cerrado débil-$\star$ no vacío de $\mathbf{E}^*$, por el Hahn-Banach Geométrico, segunda versión topología $\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})$, tenemos que existe $\bar{x} \in \mathbf{E}\setminus\{0\}$ tal que

$$\langle \ell_0, \bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} < \inf_{\ell\in\Gamma}\langle \ell, \bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}$$

dado que Γ es un cono, tenemos que

$$\langle \ell, \bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \geq 0, \qquad \forall\, \ell \in \Gamma$$

pues

$$\langle \ell_0, \bar{x}\rangle < t\langle \ell, \bar{x}\rangle, \qquad \forall\, t > 0,\ \ell \in \Gamma$$

y esto implica

$$\frac{1}{t}\langle \ell_0, \bar{x}\rangle < \langle \ell, \bar{x}\rangle, \qquad \forall\, t > 0,\ \ell \in \Gamma$$

haciendo $t \to +\infty$ se concluye. En particular, $\bar{x} \in A$ y por lo tanto $\langle \ell_0, \bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \geq 0$ pero

$$\langle \ell_0, \bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} < \inf_{\ell\in\Gamma}\langle \ell, \bar{x}\rangle \leq 0 \quad \text{pues } 0 \in \Gamma$$

lo cual es una contradicción y por lo tanto $\ell_0 \in \Gamma$. Luego sea $x_0 \in K$ dado por (H), con esto tenemos que $\langle \ell_0, x_0\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \geq 0$ pero por la parte a)1) tenemos que $\langle \ell_0, x_0\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} < 0$. Por lo tanto, si (H) es verdadera, pero (C) no lo es, llegamos a una contradicción. Luego necesariamente (H) implica (C).

b) 1) Claramente, si $0 \in K$ entonces $0 \in [0,0]$ lo que contradice la hipótesis, luego $0 \notin K$. Veamos que Q es cerrado. Sea $\{\lambda_k x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq Q$ con $\lambda_k \geq 0$ y $x_k \in K$ tal que $\lambda_k x_k \to y$ para algún $y \in \mathbf{E}$. Dado que K es compacto y $0 \notin K$ existen $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$0 < c_1 \leq \min_{x\in K}\|x\|_{\mathbf{E}} \leq \|x_k\|_{\mathbf{E}} \leq \max_{x\in K}\|x\|_{\mathbf{E}} < c_2$$

y esto implica que

$$|\lambda_k| \leq \frac{\|y_k\|_{\mathbf{E}}}{\|x_k\|_{\mathbf{E}}} \leq \frac{\|y_k\|_{\mathbf{E}}}{c_1} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},\ \text{donde } y_k = \lambda x_k$$

dado que $y_k \to y$, $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotado, y por lo tanto $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotado. Luego existen subsucesiones $\{\lambda_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ y $\{x_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ que convergen en $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ y K respectivamente,

$$\lambda_{k_j} \to \bar{\lambda} \quad \text{y} \quad x_{k_j} \to \bar{x}$$

y esto implica que $y_{k_j} \to \bar{\lambda}\bar{x}$ y por lo tanto $y = \bar{\lambda}\bar{x}$ y entonces Q es cerrado.

2) Si $x \in K$ y suponemos por contradicción que $-x \in Q$, tendríamos que $-x = \lambda y$, para algún $\lambda \geq 0$, $y \in K$. Luego, dado que $0 = x - x$, entonces

$$0 = \frac{x}{1+\lambda} - \frac{x}{1+\lambda} = \frac{x}{1+\lambda} + \frac{\lambda y}{1+\lambda} \in [x,y]$$

lo que es una contradicción y por lo tanto $-x \notin Q$. Ahora bien por Hahn-Banach geométrico (segunda versión) (dado que Q es convexo, cerrado y no vacío), para todo $x \in K$, existe $\ell_x \in \mathbf{E}^* \setminus \{0\}$ tal que

$$\langle \ell_x, -x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} < \inf_{y\in Q}\langle \ell_x, y\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \leq \inf_{y\in K}\langle \ell_x, y\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}$$

dado que $tQ \subseteq Q$ para todo $t \geq 0$, vemos que

$$\inf_{y\in K}\langle \ell_x, y\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \geq \inf_{y\in Q}\langle \ell_x, y\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \geq 0 \quad \text{y} \quad \langle \ell_x, -x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} < 0$$

con esto hemos probado la indicación. Para concluir, definamos para todo $x \in K$ el conjunto

$$U_x = \left\{ y \in \mathbf{E} \;\middle|\; \left\langle \ell_x, y - \tfrac{1}{2}x \right\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} > 0 \right\}$$

donde $\ell_x \in \mathbf{E}^*$ viene dado por la indicación probada. Por continuidad de ℓ_x, tenemos que U_x es abierto para todo $x \in K$ y además, $x \in U_x$, sigue que,

$$K \subseteq \bigcup_{x\in K} U_x$$

Dado que K es compacto, existen $x_1,\ldots,x_m \in K$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}$$

definiendo $\ell_0 = \sum_{i=1}^{m} \ell_{x_i}$ y $\delta = \min_{i=1,\ldots,m} \frac{1}{2}\langle \ell_{x_i}, x_i\rangle$, y recordando que como $x \in K$, existe $i = 1,\ldots,m$ tal que $x \in U_{x_i}$, tenemos que

$$\langle \ell_0, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \sum_{j=1}^{m} \langle \ell_{x_j}, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \geq \langle \ell_{x_i}, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} > \frac{1}{2}\langle \ell_{x_i}, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \geq \delta.$$

3) Sea $x \in K$, luego por la parte b)2) sabemos que $\langle \ell_0, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \geq \delta > 0$. Sigue que

$$\left\langle \ell_0, \tfrac{1}{\langle \ell_0, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}} x \right\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 1$$

tomando $\lambda = \frac{1}{\langle \ell_0, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}} > 0$ se concluye que $\lambda x \in K_0$. Por otra parte, si $y \in K_0$ entonces existe $\lambda > 0$ y existe $x \in K$ tales que $y = \lambda x$ con $\langle \ell_0, y\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 1$ y por lo tanto $\langle \ell_0, \lambda x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 1$,

$$\frac{1}{\lambda} = \langle \ell_0, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \geq \delta \implies \lambda \in \left(0, \frac{1}{\delta}\right]$$

y de ahí que

$$K_0 \subseteq \bigcup_{0 \leq \lambda \leq \frac{1}{\delta}} \lambda K$$

Ahora bien, el conjunto $\bigcup_{0 \leq \lambda \leq \frac{1}{\delta}} \lambda K$ es compacto, pues es la imágen de la función continua $(t,x) \mapsto tx$ del conjunto $\left[0, \frac{1}{\delta}\right] \times K$ (el cual es compacto). Más aún, dado que Q es cerrado y H también (pues $\ell_0 \in \mathbf{E}^*$) tenemos que $Q \cap H = K_0$ es cerrado y dado que está contenido en un compacto, concluimos que K_0 también es compacto.

4) Dado que Q y H son convexos, entonces K_0 es convexo y compacto. Supongamos (H) verdadera, es decir, dado $\ell \in \Gamma$ existe $x \in K$ tal que $\langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \geq 0$, por la parte c)3) existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda x \in K_0$ y por lo tanto

$$\langle \ell, \lambda x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \geq 0$$

es decir, (H) es válida para K_0 (que es compacto y convexo), luego por la parte a) tenemos que existe $\tilde{x}_0 \in K_0$ tal que

$$\langle \ell, \tilde{x}_0\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \geq 0, \qquad \forall\, \ell \in \Gamma$$

por parte c)3) existen $\lambda \in \left[0, \frac{1}{\delta}\right]$ y $x_0 \in K$ tal que $\tilde{x}_0 = \lambda_0 x_0$. Notemos que $\lambda_0 > 0$ pues $\langle \ell_0, \tilde{x}_0\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 1$ de donde se sigue

$$\langle \ell, x_0\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \geq 0, \qquad \forall\, \ell \in \Gamma.$$

c) Basta tomar $K = \psi(L)$ y $\Gamma = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda M$ y usar la parte b).

d) 1) Notemos que si $\mu \in P([a,b])$, entonces

$$1 = \mu([a,b]) = \int_{[a,b]} \mathbb{1}\, d\mu,$$

donde $\mathbb{1}$ denota la función (continua) constante igual a 1. Por otra parte, tenemos que

$$|\ell_\mu(f)| \leq \|f\|_\infty \mu([a,b]) = \|f\|_\infty \qquad \forall\, f \in \mathbf{E}$$

y por lo tanto $\|\ell_\mu\|_{\mathbf{E}^*} = 1$. Luego por el Teorema de representación de Riesz-Radon, tenemos que

$$P([a,b]) = \underbrace{\{\ell \in \mathbf{E}^* \mid \langle \ell, 1\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 1\}}_{\text{cerrado débil-}\star} \bigcap \underbrace{\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}}_{\text{compacto débil-}\star}$$

y la última aseveración está garantizada por Teorema de Banach-Alaoglu. Por lo tanto $P([a,b])$ es compacto débil-$\star$. El mismo argumento es válido para $P([c,d])$. Por otra parte

$$\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda P([c,d]) = \{\ell \in \mathbf{E}^* \mid \langle \ell, f\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \geq 0,\ \forall\, f \in \mathbf{E},\ f \geq 0\}$$

$$= \bigcap_{\substack{f \in \mathbf{E} \\ f \geq 0}} \underbrace{\{\ell \in \mathbf{E}^* \mid \langle \ell, f\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \geq 0\}}_{\text{cerrado débil-}\star \text{ y convexo.}}$$

De aquí concluimos que $\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda P([c,d])$ es un conjunto convexo, cerrado débil-$\star$ de $\mathbf{F}$.

2) Veamos i). Usemos la definición, sea $\mu \in P([a,b])$, notamos que

$$t \mapsto \varphi(\mu)(t) := \int_{[a,b]} \pi(s,t)\, d\mu(s)$$

define una función continua sobre el intervalo $[c,d]$ y por lo tanto $\varphi_\mu \in \mathbf{F}$. Sea $\varepsilon > 0$ y $\nu_0, \dots, \nu_m \in P([c,d])$. Fijemos $\bar{\mu} \in P([a,b])$, luego

$$W_{\varphi(\bar{\mu})}(\nu_0, \dots, \nu_m; \varepsilon) = \{\bar{\varphi} \in \mathbf{F} \mid |\langle \ell_{\nu_i}, \bar{\varphi} - \varphi(\bar{\mu}) \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} < \varepsilon,\ i = 0, \dots, m.\}$$

es una vecindad para la topología débil $\sigma(\mathbf{F}, \mathbf{F}^*)$ de $\varphi(\bar{\mu})$ (respecto a la topología de la traza). Sigue que

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}\left(W_{\varphi(\bar{\mu})}(\nu_0, \dots, \nu_m; \varepsilon)\right) &= \{\mu \in P([a,b]) \mid \varphi(\mu) \in W_{\varphi(\bar{\mu})}(\nu_0, \dots, \nu_m; \varepsilon)\} \\
&= \{\mu \in P([a,b]) \mid |\langle \ell_{\nu_i}, \varphi(\mu) - \varphi(\bar{\mu}) \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}| < \varepsilon,\ i = 0, \dots, m\ \} \\
&= \left\{\mu \in P([a,b]) \;\Big|\; \left| \int\int_{[a,b]\times[c,d]} \pi(s,t) d(\mu - \bar{\mu})(s) d\nu_i(t) \right| < \varepsilon,\ i = 0, \dots, m \right\} \\
&= \left\{\mu \in P([a,b]) \;\Big|\; \left| \int_{[a,b]} \left(\int_{[c,d]} \pi(s,t) d\nu_i(t) \right) d(\mu - \bar{\mu})(s) \right| < \varepsilon,\ i = 0, \dots, m \right\}
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene por el hecho de que $\left(\int_{[c,d]} \pi(s,t) d\nu_i(t)\right)$ es una función continua en $[a,b]$. Definiendo $\alpha_i(s) = \int_{[c,d]} \pi(s,t) d\nu_i(t)$ vemos que

$$\varphi^{-1}\left(W_{\varphi(\bar{\mu})}(\nu_1, \dots, \nu_m; \varepsilon)\right) = \{\mu \in P([a,b]) \mid |\langle \ell_{\mu - \bar{\mu}}, \alpha_i \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| < \varepsilon,\ i = 0, \dots, m.\ \}$$

el cual es un abierto en $P([a,b])$ para la topología débil-$\star$ $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})$. Luego,

$$\varphi : (P([a,b]), \sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})) \longrightarrow (C([c,d]) \sigma(\mathbf{F}^*, \mathbf{F}))$$

es continua y dado que $\psi_k = \varphi + \frac{kc^*}{k+1}$ se concluye.

Ahora veamos ii). Dado que ψ_k es continua para la topología débil-$\star$ y $P([a,b])$ es compacto débil-$\star$. Tenemos que $\psi_n(P([a,b]))$ es compacto débil en $\mathbf{E}$. En particular, es cerrado débil en $\mathbf{E}$ y por lo tanto cerrado fuerte en $\mathbf{E}$.

Veamos iii). Notemos que para $t \in [c,d]$ fijo, tenemos que $\{\psi_k(\mu)(t) \mid \mu \in P([a,b])\}$ es acotado pues

$$|\psi_k(\mu)(t)| \leq \|\pi\|_\infty + c^*, \qquad \forall\ \mu \in P([a,b])$$

Además, dado $\mu \in P([a,b])$ tenemos que

$$|\psi_k(\mu)(t_1) - \psi_k(\mu)(t_2)| = \left| \int_{[a,b]} (\pi(s,t_1) - \pi(s,t_2))\, d\mu(s) \right|$$

dado que π es continua, en particular es uniformemente continua, luego dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|t_1 - t_2| < \delta$ entonces $|\pi(s,t_1) - \pi(s,t_2)| < \varepsilon$ (δ no depende de μ). Por lo tanto

$$|\psi_k(\mu)(t_1) - \psi_k(\mu)(t_2)| < \varepsilon \quad \text{si } |t_1 - t_2| < \delta$$

y entonces $\{\psi_k(\mu) \mid \mu \in P([a,b])\}$ es equicontinua. Finalmente, por Arzelá-Ascoli, $\psi_k(P([a,b]))$ es relativamente compacto, pero dado que sabemos que $\psi_k(P([a,b]))$ es cerrado fuerte en $\mathbf{E}$ entonces será compacto fuerte en $\mathbf{E}$.

3) Por definición de c^* tenemos que

$$c^* \leq \sup_{\mu \in P([a,b])} B(\mu,\nu), \qquad \forall\, \nu \in P([c,d]).$$

Supongamos $c^* > 0$, fijemos $\nu \in P([c,d])$ y $k \in \mathbb{N}$, luego existe $\mu \in P([a,b])$ tal que

$$c^* \leq B(\mu,\nu) + \frac{c^*}{k+1}$$

y esto pasa si y sólo si

$$0 \leq B(\mu,\nu) - \frac{kc^*}{k+1} = \langle \ell_\nu, \psi_k(\mu)\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}$$

luego (H) de la parte c) se verifica para $\psi = \psi_k$. Por 2) tenemos que la condición i) de la parte c) se verifica con $L = P([a,b])$ y $M = P([c,d])$. Por otro lado, dado $\mu_1, \mu_2 \in P([a,b])$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ (pero no ambos cero simultaneamente) y $\alpha \in [0,1]$ tenemos que

$$\begin{aligned}\big(\alpha\lambda_1\psi_k(\mu_1) + (1-\alpha)\lambda_2\psi_k(\mu_2)\big)(t) &= \int_{[a,b]} \pi(s,t)\; d(\alpha\lambda_1\mu_1 + (1-\alpha)\lambda_2\mu_2)(s)\\ &\quad - (\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2)\frac{kc^*}{k+1}\\ &= (\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2)\psi\left(\frac{\alpha\lambda_1\mu_1 + (1-\alpha)\lambda_2\mu_2}{(\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2)}\right)\end{aligned}$$

dado que $\frac{\alpha\lambda_1\mu_1+(1-\alpha)\lambda_2\mu_2}{(\alpha\lambda_1+(1-\alpha)\lambda_2)} \in P([a,b])$ tenemos que la condición ii) de la parte c) se verifica. Supongamos ahora que $0 = \lambda\psi_k(\mu_1) + (1-\lambda)\psi_k(\mu_2)$ para algún $\lambda \in [0,1]$ y $\mu_1, \mu_2 \in P([a,b])$ y entonces

$$\int_{[a,b]} \pi(s,t) d(\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2)(s) = \frac{kc^*}{k+1}, \qquad \forall\, t \in [a,b]$$

y de aqui se desprende, $B(\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2, \nu) = \frac{kc^*}{k+1}$ para todo $\nu \in P([c,d])$ y tomando ínfimo,

$$\inf_{\nu \in P([c,d])} B(\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2, \nu) = \frac{kc^*}{k+1}$$

y por lo tanto $c^* \geq \frac{kc^*}{k+1}$. Por otro lado, si $0 \neq \lambda\psi_k(\mu_1) + (1-\lambda)\psi_k(\mu_2)$ para todo $\lambda \in [0,1]$ y $\mu_1, \mu_2 \in P([a,b])$ entonces la condición iii) de la parte c) se verifica, luego existe $\mu_0 \in P([a,b])$ tal que

$$\langle \ell_\nu, \psi_k(\mu_0)\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} \geq 0, \qquad \forall\, \nu \in P([c,d])$$

y esto implica que

$$B(\mu_0,\nu) \geq \frac{kc^*}{k+1}, \qquad \forall\, \nu \in P([a,b])$$

de donde

$$c_* = \sup_{\mu \in P([a,b])} \inf_{\nu \in P([c,d])} B(\mu,\nu) \geq \inf_{\nu \in P([c,d])} B(\mu_0,\nu) \geq \frac{kc^*}{k+1}$$

y por lo tanto $c_* \geq \frac{kc^*}{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego haciendo $k \to +\infty$ obtenemos $c_* \geq c^*$. pero como $c_* \leq c^*$ siempre, concluimos que $c_* = c^*$.
Si $c^* \leq 0$. Basta reemplezar π por $\tilde{\pi} = \pi + \|\pi\|_\infty + 1$ y repetir el mismo análisis. En este caso

$$\tilde{B}(\mu,\nu) = \int\int_{[a,b]\times[c,d]} \tilde{\pi}(s,t)\, d\mu(s)\, d\nu(t) \geq 1 \qquad \forall\, \mu \in P([a,b]),\, \forall\, \nu \in P([c,d])$$

□

19.2.5 Problema 3 - Certamen 2 - 2020

a) 1) Sabemos que C es un conjunto acotado, convexo y cerrado, luego es un cerrado débil y $\overline{\mathrm{conv}(B)}$ es cerrado débil ($B \subseteq C$).
Por Hahn-Banach geométrico (segunda versión), podemos separar de la forma estricta ℓ_0 y $\overline{\mathrm{conv}(B)}$, es decir, existe $\varphi \in \mathbf{E}^{**}$ con $\|\varphi\|_{\mathbf{E}^{**}} = 1$ (inicialmente $\varphi \in \mathbf{E}^{**}$ pero podemos tomar $\varphi = \frac{\tilde{\varphi}}{\|\tilde{\varphi}\|}$) y existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\langle \varphi, \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} \leq \alpha < \beta < \langle \varphi, \ell_0 \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}, \quad \forall\, \ell \in \overline{\mathrm{conv}(B)}, \tag{19.6}$$

en particular lo anterior se tiene para todo $\ell \in B$.

2) Veamos que existe $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$ tal que $J_{x_k} \overset{\star}{\rightharpoonup} \varphi$ en $\sigma(\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*)$. Por Lema de Goldstein, sabemos que $J(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}})$ es densa en $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}}$ con respecto a $\sigma(\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*)$. Además, $\sigma(\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*)$ es metrizable en $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}}$. Como $\varphi \in S_{\mathbf{E}^{**}} \subseteq \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}}$, entonces existe $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$ tal que

$$J_{x_k} \overset{\star}{\rightharpoonup} \varphi \quad \text{en} \quad \sigma(\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*),$$

es decir, para todo $\ell \in \mathbf{E}^*$, $\langle J_{x_k}, \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} \to \langle \varphi, \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}$ y recordemos que $\langle J_{x_k}, \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} = \langle \ell, x_k \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}$. Luego, tomando supremo en los ℓ en B en la ecuación (19.6) se sigue que

$$\alpha \geq \sup_{\ell\in B} \langle \varphi, \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} = \sup_{\ell\in B} \lim_{k\to+\infty} \langle J_{x_k}, \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} = \sup_{\ell\in B} \lim_{k\to+\infty} \langle \ell, x_k \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}$$

Como $B \subseteq C$ es una J-frontera para C, entonces para todo $x_k \in \mathbf{E}$, existe un $\ell_k \in B$ tal que $\langle \ell_k, x_k \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \sup_{\ell\in C} \langle \ell, x_k \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}$. Se sigue que

$$\begin{aligned}
\alpha &\geq \sup_{\ell\in B} \lim_{k\to+\infty} \langle \ell, x_k \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \\
&\geq \sup_{j\in\mathbb{N}} \lim_{k\to+\infty} \langle \ell_j, x_k \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \\
&\geq \limsup_{k\to+\infty} \langle \ell_k, x_k \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \\
&= \limsup_{k\to+\infty} \sup_{\ell\in C} \langle \ell, x_k \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \\
&\geq \limsup_{k\to+\infty} \langle \ell_0, x_k \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \\
&= \limsup_{k\to+\infty} \langle J_{x_k} \ell_0 \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} \\
&= \lim_{k\to+\infty} \langle J_{x_k} \ell_0 \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} \\
&= \langle \varphi, \ell_0 \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} \\
&> \beta,
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción con que $\alpha < \beta$. Luego, no existe $\ell_0 \in C \setminus \overline{\text{conv}(B)}$ y se concluye el resultado. $\square$

b) 1) Si suponemos que A es $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$ compacto y $\ell \in \mathbf{E}^*$ lineal continua, entonces de la definición de topología débil en $\mathbf{E}$ se tiene que $\ell : (\mathbf{E},\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)) \to \mathbb{R}$ es continuo, luego ℓ alcanza su máximo en A.

2) Supongamos que $\mathbf{E}^{**}$ es separable y que cualquier $\ell \in \mathbf{E}^*$, ℓ alcanza su supremo sobre A. Veamos que A es $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$-compacto.

$$\begin{aligned}
&\forall\, \ell \in \mathbf{E}^*,\ \ell \text{ alcanza su máximo en } A.\\
&\iff \forall\, \ell \in \mathbf{E}^*,\ \exists\, x_0 \in A : \langle \ell, x_0\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \sup_{x\in A}\langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\\
&\iff \forall\, \ell \in \mathbf{E}^*,\ \exists\, J_{x_0} \in J(A) : \langle J_{x_0}, \ell\rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} = \sup_{J_x\in J(A)}\langle J_x, \ell\rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}\\
&\iff \forall\, \ell \in \mathbf{E}^*,\ \exists\, J_{x_0} \in J(A) : \langle J_{x_0}, \ell\rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} = \sup_{J_x\in \overline{\text{conv}(J(A))}}\langle J_x, \ell\rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}\\
&\iff \forall\, \ell \in \mathbf{E}^*,\ \exists\, J_{x_0} \in J(A) : \langle J_{x_0}, \ell\rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} = \sup_{J_x\in \overline{C}^{\sigma(\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*)}}\langle J_x, \ell\rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}.
\end{aligned}$$

Finalmente, $J(A)$ es una $J-$frontera para $\overline{C}^{\sigma(\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*)}$. Por la parte a), $C = \overline{\text{conv}}(J(A)) = \overline{C}^{\sigma(\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*)}$. Además, por hipótesis para todo $\ell \in \mathbf{E}^*$ y para todo $x \in A$, $|\langle \ell, x\rangle| < M$. Por Teorema de Banach-Steinhaus, C es acotado. Luego C es un conjunto débil-$\star$ cerrado, ($C = \overline{C}^{\sigma(\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*)}$), convexo ($C = \overline{\text{conv}}(J(A))$ y por lo tanto, $\sigma(\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*)$-compacto. El resultado sigue de la continuidad de $J : (\mathbf{E},\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)) \to (\mathbf{E}^{**},\sigma(\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*))$ $A \subseteq J^{-1}(C)$, $J^{-1}(C)$ es $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$-compacto, A es $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$-cerrado en $J^{-1}(C)$ con lo que se concluye.

19.2.6 Problema 4 - Certamen 2 - 2020

a) Sea $\mathbf{E}$ reflexivo. Sea $\theta \in (0,1)$ y sea $\{x_k\} \subseteq \mathbb{S}_{\mathbf{E}}$. Claramente, por definición $K_{n+1} \subseteq K_k$ y K_k son conjuntos convexos cerrados y acotados (no vacíos). Se sigue que K_k es una familia de conjuntos compactos. Luego,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_k \neq \emptyset.$$

Para $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_k$, se tiene que

- $x \in K_0$ si y solo si existe n_0 y existe $u \in \text{conv}\{x_1,\ldots,x_{n_0}\}$ tales que $\|x-u\| < \dfrac{\theta}{2}$.
- $x \in K_{n_0}$ si y solo si existe $v \in \text{conv}\{x_{n_0+1},\ldots\}$ tal que $\|x-v\| < \dfrac{\theta}{2}$.

con lo cual se concluye que $\|u-v\| < \theta$.

b) $Y \subseteq X$ s.e.v. propio. Sea $\varepsilon > 0$. Veamos que existe $x \in \mathbb{S}_X$ tal que $d(x,Y) \geq 1-\varepsilon$. En efecto sea $\hat{z} \in X \setminus Y$ tal que $1 > \|\hat{z}\| > 1-\varepsilon$. Tomemos $z \in \hat{Z}$, con $\|z\| \leq 1$ y definamos $x = \dfrac{z}{\|z\|}$, de donde

$$d(x,Y) = \frac{d(z,Y)}{\|z\|} = \frac{\|\hat{z}\|}{\|z\|} \geq \|\hat{z}\| > 1-\varepsilon$$

c) Sea $\theta \in (0,1)$. Notemos que

$$\bigcup_{x\in\mathbf{E}} \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}(J_x;\theta)}$$

es un s.e.v. propio y cerrado de $\mathbf{E}^{**}$, luego por la parte b), existe $\varphi_\theta \in S_{\mathbf{E}^{**}}$ tal que

$$d\left(\varphi_\theta, \bigcup_{x\in\mathbf{E}} \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}(J_x;\theta)}\right) \geq 1-\varepsilon.$$

En particular, $\varphi_\theta \notin \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}(0,\theta)}$ que es cerrado fuerte, convexo y acotado, con lo cual es cerrado débil-$\star$. Así, $\varphi_\theta \in (\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}(0,\theta)})^c$ es abierto débil-$\star$. Luego, existe una vecindad V_1 débil-$\star$ de φ_θ tal que

$$V_1 \bigcap \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}(0,\theta)} = \emptyset.$$

d) Usando V_1 de la parte anterior, sea $x_1 \in V_1 \cap S_{\mathbf{E}^{**}}$. Como $\varphi_\theta \notin \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}(J_x,\theta)}$ y siguiendo el mismo argumento de la parte anterior, existe $V_2 \subseteq V_1$ vecindad débil-$\star$ de φ_θ disjunta de $\mathbb{B}(J_{x_1},\theta)$. Sea $x_2 \in V_2 \bigcap S_{\mathbf{E}^{**}}$, como $\varphi_\theta \notin \mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}(J_{x_1};\theta)$ y $\varphi_\theta \notin \mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}(J_{x_2};\theta)$, entonces

$$\varphi_\theta \notin \mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}(\operatorname{conv}(J_{x_1},J_{x_2});\theta).$$

Se sigue que existe $V_3 \subseteq V_2$ vecindad convexa de φ_θ tal que

$$V_3 \bigcap \mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}(\operatorname{conv}(J_{x_1},J_{x_2});\theta) = \emptyset.$$

siguiendo de manera inductiva, existe una suceisón de abiertos débil-$\star$ convexos $\{V_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ y una sucesión de puntos $\{J_{x_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ con las siguientes propiedades:

i) $\{V_k\}$ es decreciente.

ii) $\operatorname{conv}(J_{x_1},J_{x_2},\dots) \subseteq V_1$ implica que

$$\inf_{J_u\in\operatorname{conv}(\{J_{x_k}\})} \|J_u\| \geq \theta$$

iii) Para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene que

$$\operatorname{conv}(J_{x_{n+1}},J_{x_{n+2}},\dots) \subseteq V_{n+1} \quad \text{y} \quad V_{n+1} \bigcap \mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}(\operatorname{conv}(J_{x_1},\dots,J_{x_k});\theta) = \emptyset.$$

de donde se tiene que

$$J_u \in \operatorname{conv}(J_{x_1},\dots,J_{x_k}) \text{ y } J_v \in \operatorname{conv}(J_{x_{n+1}},\dots)$$

si y solamente si

$$u \in \operatorname{conv}(x_1,\dots,x_k) \text{ y } v \in \operatorname{conv}(x_{n+1},\dots),$$

luego se tiene que

$$\|J_u - J_v\| = \|u-v\| > \theta,$$

contradiciendo la hipótesis.

19.2.7 Problema 2 - Examen - 2020

Parte 1

a) $(\Rightarrow)$ Sea $\ell \in \mathbf{E}^*$ y $\varepsilon > 0$, luego $V_0(\ell;\varepsilon)$ es una vecindad débil de $x=0$. Luego, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $x_k - x_m \in V_0(\ell;\varepsilon)$, es decir

$$|\langle \ell, x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} - \langle \ell, x_m\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| = |\langle \ell, x_k - x_m\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| < \varepsilon,$$

con lo cual se tiene que $\{\langle \ell, x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

($\Leftarrow$) Sea $A \in \sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$ una vecindad abierta débil de $x=0$. Luego existe $\ell_1,\ldots,\ell_m \in \mathbf{E}^*$ y $\varepsilon > 0$ tales que $V_0(\ell_1,\ldots,\ell_m;\varepsilon) \subseteq A$.
Dado que $\{\langle \ell_i, x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy para todo $i=1,\ldots,m$ se tiene que existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n,m \geq n_i$

$$|\langle \ell_i, x_k - x_m\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| = |\langle \ell_i, x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} - \langle \ell_i, x_m\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| < \varepsilon$$

sigue que definiendo $n_0 = \text{máx}\{n_1,\ldots,n_m\}$ se tiene que

$$|\langle \ell_i, x_k - x_m\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| < \varepsilon, \qquad \forall\, n,m \geq n_0,\ \forall\, i=1,\ldots,m.$$

Se concluye que $x_k - x_m \in V_0(\ell_1,\ldots,\ell_m;\varepsilon) \subseteq A$ para todo $n,m \geq n_0$.

b) Si $\mathbf{E}^*$ es separable, entonces $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}}$ es metrizable y por el Teorema de Banach-Alaoglu, toda sucesión acotada en $\mathbf{E}^{**}$ tiene una subsucesión que converge débilmente en $\sigma(\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*)$ (topología débil-$\star$). Si $\{x_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $\mathbf{E}$, tenemos que $\{J_{x_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $\mathbf{E}^{**}$ ($\|x_n\|_{\mathbf{E}} = \|J_{x_n}\|_{\mathbf{E}^{**}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$) y por lo tanto, existe una subsucesión $\{x_{k_j}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\{J_{x_{k_j}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente en $\sigma(\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*)$. Así, para todo $\ell \in \mathbf{E}^*$ la sucesión $\{\langle J_{x_{k_j}}, \ell\rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathbb{R}$, y por lo tanto es de Cauchy. Finalmente, dado que

$$\langle J_{x_k}, \ell\rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} = \langle \ell, x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se concluye que $\{\langle \ell, x_{k_j}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

c) Sea $\{x_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy débil, definamos $\varphi_k : \mathbf{E}^* \to \mathbb{R}$ via la fórmula

$$\varphi_k(\ell) = \langle \ell, x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \qquad \forall\, \ell \in \mathbf{E}.$$

Dado que $\{\langle \ell, x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy para todo $\ell \in \mathbf{E}^*$, tenemos que

$$\varphi(\ell) := \lim_{k\to+\infty} \varphi_k(\ell)$$

está bien definido y corresponde a un operador lineal. Mas aún, por el Teorema de Banach-Steinhaus, $\varphi \in \mathscr{L}C(\mathbf{E}^*,\mathbb{R}) \cong \mathbf{E}^{**}$, y

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_k\|_{\mathbf{E}^{**}} < +\infty.$$

Dado que $\|\varphi_k\|_{\mathbf{E}^{**}} = \|x_k\|_{\mathbf{E}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se concluye que $\{x_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

d) Si $\{x_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy débil, por la parte c) existe $c > 0$ tal que $\|x_k\|_{\mathbf{E}} \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando el mismo argumento de la parte c), tenemos que existe $\varphi \in \mathbf{E}^{**}$ tal que

$$\langle \ell, x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \to \langle \varphi, \ell\rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}, \qquad \forall\, \ell \in \mathbf{E}^*.$$

ahora bien, como $\mathbf{E}^{**} \cong \mathbf{E}$ pues $\mathbf{E}$ es reflexivo, existe $\bar{x} \in \mathbf{E}$ tal que $\varphi = J_{\bar{x}}$, de donde $\langle \ell, x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \to \langle \ell, \bar{x}\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}$. Por lo tanto $x_k \rightharpoonup \bar{x}$ en $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$.

Parte 2

e) Si $\mathbf{E}$ es reflexivo, por el Teorema de Kakutani tenemos que $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$ es compacto débil en $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)$. Dado que $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$ si y solo si T es débil continua, $T(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}})$ es compacto débil en $\sigma(\mathbf{F},\mathbf{F}^*)$. Por otro lado, si $\mathbf{F}$ fuese reflexivo, entonces dado que $\overline{T(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}})}$ es un convexo cerrado fuerte, es también cerrado débil. Dado que $\overline{T(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}})}$ es acotado también, se concluye por el Teorema de Kakutani que T es débil compacto.

f) Si S es débil compacto, entonces

$$S \circ \underbrace{T(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}})}_{\text{convexo}} = S(T(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}})) \subseteq \underbrace{\|T\|_{\mathscr{L}C} S(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{F}}})}_{\text{relativamente débil compacto}}.$$

Si T es débil compacto, entonces

$$S \circ \underbrace{T(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}})}_{\text{convexo}} \subseteq S(\overline{T(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}})}),$$

de donde usando el hecho de que $\overline{T(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}})}$ es débil compacto y que S es débil continua se tiene que $S(\overline{T(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}})})$ es débil compacto.

g) Notemos que $\langle \ell, T(x_k) - T(x_m) \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} = \langle T^*(\ell), x_k - x_m \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}$, de donde $\{T(x_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy débil en $\mathbf{F}$, pues $T^*(\ell) \in \mathbf{E}^*$ para todo $\ell \in \mathbf{F}^*$.
Dado que $\{x_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ es también acotada por la parte c), la sucesión $\{T(x_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto relativamente compacto débil en $\mathbf{F}$. Por el Teorema de Eberlein-Smulian existe una subsucesión $\{x_{k_j}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\{T(x_{k_j})\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente en $\sigma(\mathbf{F},\mathbf{F}^*)$ a algún $y \in \mathbf{F}$. Dado $\ell \in \mathbf{F}^*$, como $\{T(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy débil existe $L(\ell) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{k\to+\infty} \langle \ell, T(x_k) \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} = L(\ell).$$

Como $T(x_{k_j}) \rightharpoonup y$ en $\sigma(\mathbf{F},\mathbf{F}^*)$ tenemos que

$$L(\ell) = \langle \ell, y \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}, \qquad \forall\, \ell \in \mathbf{F}^*.$$

Ahora bien, si y' fuese otro punto de acumulación con respecto a la topología débil $\sigma(\mathbf{F},\mathbf{F}^*)$ tendriamos también que

$$L(\ell) = \langle \ell, y' \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}, \qquad \forall\, \ell \in \mathbf{F}.$$

Por lo tanto $y' = y$, es decir, $\{T(x_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un único punto de acumulación débil, luego necesariamente $\{T(x_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge con respecto a la topología débil.

h) Recordemos que $T^{**} \circ J_{\mathbf{E}} = J_{\mathbf{F}} \circ T$, luego tenemos que

$$T^{**}(J_{\mathbf{E}}(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}})) = J_{\mathbf{F}}(T(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}})) \subseteq J_{\mathbf{F}}(\overline{T(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}})})$$

Dado que $\overline{T(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}})}$ es compacto débil en $\sigma(\mathbf{F},\mathbf{F}^*)$ y $J_{\mathbf{F}} : (\mathbf{F}, \sigma(\mathbf{F},\mathbf{F}^*)) \to (\mathbf{F}^{**}, \sigma(\mathbf{F}^{**},\mathbf{F}^*))$ es continua, tenemos que $J_{\mathbf{F}}(\overline{T(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}})})$ es compacto débil-$\star$ en $\mathbf{F}^{**}$ y por lo tanto

$$\overline{T^{**}(J_{\mathbf{E}}(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}))}^{\sigma(\mathbf{F}^{**},\mathbf{F}^*)} \subseteq J_{\mathbf{F}}(\overline{T(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}})}) \subseteq J_{\mathbf{F}}(\mathbf{F})$$

Notemos que en general, si $\psi : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \sigma)$ es una función continua entre espacios topológicos, entonces $\psi(\overline{A}^{\mathscr{T}}) \subseteq \overline{\psi(A)}^{\sigma}$, luego dado que $T^{**} : (\mathbf{E}^{**}, \sigma(\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*)) \to (\mathbf{F}^{**}, \sigma(\mathbf{F}^{**},\mathbf{F}^*))$ es continua se tiene

$$T^{**}(\overline{J_{\mathbf{E}}(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}})}^{\sigma(\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*)}) \subseteq \overline{T^{**}(J_{\mathbf{E}}(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}))}^{\sigma(\mathbf{F}^{**},\mathbf{F}^*)}.$$

Finalmente, usando el Lema de Goldstein, llegamos a

$$T^{**}(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}}) \subseteq J_{\mathbf{F}}(\mathbf{F})$$

de donde se obtiene fácilmente que $T^{**}(\mathbf{E}^{**}) \subseteq J_{\mathbf{F}}(\mathbf{F})$.

i) Por la parte h) tenemos que $\mathrm{im}(T^{**}) \subseteq J_{\mathbf{F}}(\mathbf{F})$. Veamos que en este caso T^* es débil-$\star$-débil continuo. Basta ver esto en $\ell = 0 \in \mathbf{F}^*$. Sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathbf{E}^{**}$ y $\varepsilon > 0$, luego

$$W_0(\varphi_1, \ldots, \varphi_m; \varepsilon) := \{\ell \in \mathbf{E}^* \mid |\langle \varphi_i, \ell \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, m\}$$

es una vecindad abierta de $T^*(0) = 0 \in \mathbf{E}^*$ en $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}^{**})$. Notemos que

$$\begin{aligned}(T^*)^{-1}(W_0(\varphi_1, \ldots, \varphi_m; \varepsilon)) &= \{\ell \in \mathbf{F}^* \mid T(\ell) \in W_0(\varphi_1, \ldots, \varphi_m; \varepsilon)\} \\ &= \{\ell \in \mathbf{F}^* \mid |\langle \varphi_i, T^*(\ell) \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, m\} \\ &= \{\ell \in \mathbf{F}^* \mid |\langle T^{**}(\varphi_i), \ell \rangle_{\mathbf{F}^{**},\mathbf{F}^*}| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, m\}\end{aligned}$$

Por h) tenemos que existen $x_1, \ldots, x_m \in \mathbf{F}$ tales que $T^{**}(\varphi_i) = J_{\mathbf{F}}(x_i)$, $i = 1, \ldots, m$. Lo cual implica que

$$\begin{aligned}(T^*)^{-1}(W_0(\varphi_1, \ldots, \varphi_m; \varepsilon)) &= \{\ell \in \mathbf{F}^* \mid |\langle J_{\mathbf{F}}(x_i), \ell \rangle_{\mathbf{F}^{**},\mathbf{F}^*}| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, m\} \\ &= \{\ell \in \mathbf{F}^* \mid |\langle \ell, x_i \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, m\}\end{aligned}$$

Por lo tanto $(T^*)^{-1}(W_0(\varphi_1, \ldots, \varphi_m; \varepsilon))$ es un abierto débil-$\star$ en $\sigma(\mathbf{F}^*, \mathbf{F})$. Luego, $T^* : (\mathbf{F}^*, \sigma(\mathbf{F}^*, \mathbf{F})) \to (\mathbf{E}^*, \sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}^{**}))$ es continua. Finalmente, por el Teorema de Banach-Alaoglu, $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{F}^*}}$ es compacta débil-$\star$ en $\sigma(\mathbf{F}^*, \mathbf{F})$ y por lo tanto $T^*(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{F}^*}})$ es compacto débil en $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}^{**})$.

j) Veamos que $T(K)$ es compacto fuerte en $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$. Para ello basta ver que dada una sucesión en $T(K)$ esta tiene una subsucesión que converge (fuerte) en $\mathbf{F}$.
Sea $\{x_k\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$, dado que K es compacto débil, pasando a una subsucesión si fuese necesario, podemos asumir que $x_k \rightharpoonup \bar{x}$ débilmente en $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)$ a algún $\bar{x} \in \mathbf{E}$ (Teorema de Eberlein-Smulian) Si $\{T(x_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente, el candidato natural a límite sería $T(\bar{x})$. Veamos que esto es así argumentando por contradicción. supongamos que $\|T(x_k) - T(\bar{x})\|_{\mathbf{F}} \geq \delta$ para algún $\delta > 0$ (para todo $n \in \mathbb{N}$). Por el Corolario 3 existe $\ell_k \in \mathbf{F}^*$ tal que $\|\ell_k\|_{\mathbf{F}^*} = 1$ y

$$\langle \ell_k, T(x_k - \bar{x}) \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} = \|T(x_k - \bar{x})\|_{\mathbf{F}} \geq \delta.$$

Dado que T^* es compacto débil, por la parte g) podemos asumir que $\{T^*(\ell_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a algún $\bar{\ell} \in \mathbf{E}^*$. Luego, tenemos que $x_k - \bar{x} \rightharpoonup 0$ y $T^*(\ell_k) - \bar{\ell} \rightharpoonup 0$. Por lo tanto, por la propiedad de Dunford Pettis tenemos que

$$\langle T^*(\ell_k) - \bar{\ell}, x_k - \bar{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \to 0$$

Pero

$$\langle T^*(\ell_k), x_k - \bar{x} \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle \ell_k, T(x_k - \bar{x}) \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} \geq \delta$$

y $\langle \bar{\ell}, x_k - \bar{x} \rangle \to 0$ pues $x_k - \bar{x} \rightharpoonup 0$. Por lo tanto, $\{T(x_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ debe tener una subsucesión que converge fuertemente a $T(\bar{x})$.

k) Recordemos que $c_0 \subseteq \ell^\infty$ y $\ell^1 \cong (c_0)^*$. Como ℓ^1 es separable, luego por b) toda sucesión acotada en c_0 tiene una subsucesión de Cauchy débil.

19.2.8 Problema 2 - Certamen 2 - 2021

- Recordemos que en general tenemos $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}) \subseteq \sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}^{**})$.
  Por otro lado, si $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es reflexivo, entonces $\mathbf{E}^{**} = J(\mathbf{E})$ y por lo tanto para todo $\hat{\ell} \in \mathbf{E}^*$ tenemos

$$V_{\hat{\ell}}(\varphi_0, \ldots, \varphi_m; \varepsilon) = W_{\hat{\ell}}(J^{-1}(x_1), \ldots, J^{-1}(x_m); \varepsilon), \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \varphi_0, \ldots, \varphi_m \in \mathbf{E}^{**}.$$

  Luego, todo abierto débil es un abierto débil-$\star$ y por lo tanto $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}) = \sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}^{**})$.

- Supongamos ahora que $\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}) = \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}^{**})$. Por el **Teorema de Banach-Alaoglu**, sabemos que $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}$ es compacto débil-$\star$. Luego, dado que $\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}) = \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}^{**})$, tenemos que $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^*}}$ es también compacto débil.
  En consecuencia, gracias al **Teorema de Kakutani**, $\mathbf{E}^*$ es un espacio reflexivo. Finalmente, como $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach, tenemos que $\mathbf{E}$ es también reflexivo.

19.2.9 Problema 3 - Certamen 2 - 2021

Veamos primero que el espacio $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es reflexivo. En efecto dado que $p \in (1+\infty)$, por el **Teorema de Dualidad de espacios** L^p sabemos que $L^p_{\mathfrak{m}}([0,1])$ es reflexivo y $L^p_{\mathfrak{m}}([0,1])^* \cong L^q_{\mathfrak{m}}([0,1])$. Luego, por el **Teorema de Kakutani** tenemos que $\overline{\mathbb{B}_{L^p_{\mathfrak{m}}([0,1])}}$ es compacto débil, y en consecuencia, por el Teorema de Tychonoff, $\overline{\mathbb{B}_{L^p_{\mathfrak{m}}([0,1])}} \times [-1,1]$ es compacto en el e.v.t.

$$(\mathbf{E},\sigma(L^p_{\mathfrak{m}}([0,1]),L^q_{\mathfrak{m}}([0,1]))\otimes\sigma(\mathbb{R},\mathbb{R}^*))$$

Sabemos que (Proposición 42, apunte & Proposición 3- Clase 13)

$$\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*) = \sigma(L^p_{\mathfrak{m}}([0,1]),L^q_{\mathfrak{m}}([0,1]))\otimes\sigma(\mathbb{R},\mathbb{R}^*)$$

y por lo tanto $\overline{\mathbb{B}_{L^p_{\mathfrak{m}}([0,1])}} \times [-1,1]$ es compacto débil en $\mathbf{E}$.

Por otra parte, como

$$\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}} \subseteq \overline{\mathbb{B}_{L^p_{\mathfrak{m}}([0,1])}} \times [-1,1].$$

y $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$ es convexo y cerrado fuerte, es en particular cerrado débil (Proposición 41, apunte & Proposición 6 - Clase 13). A posteriori, tenemos que $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$ es compacto débil (es un cerrado débil contenido en un compacto débil) y por el **Teorema de Kakutani** concluimos que $\mathbf{E}$ es reflexivo.

Para usar el **Teorema de Weierstrass-Hilbert-Tonelli**, definamos el conjunto $A = L^p_{\mathfrak{m}}([0,1]) \times [-1,1]$, el cual es claramente cerrado (fuerte), convexo y no vacío, y la función $f:\mathbf{E}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(u,x) := \int_0^1 \Lambda(T(u,x)(t),u(t))dt, \qquad \forall (u,x)\in\mathbf{E}.$$

Veamos que f está bien definida. Notemos primero que $T: L^p_{\mathfrak{m}}([0,1])\times\mathbb{R}\to\mathscr{C}([0,1])$ es lineal por propiedades de la integral, y además continua, pues por la desigualdad de Hölder tenemos

$$|T(u,x)(t)| \le |x|e + \int_0^1 e|b(s)||u(s)|ds \le e(|x|+\|b\|_{L^q}\|u\|_{L^p}) \le e\,\text{máx}\{1,\|b\|_{L^q}\}\|(u,x)\|_{\mathbf{E}}), \quad \forall t\in[0,1].$$

Esto implica que $t\mapsto\Lambda(T(u,x)(t),u(t))$ es una función acotada y medible, en particular, integrable y por lo tanto $f(u,x)\in\mathbb{R}$ para todo $(u,x)\in\mathbf{E}$.

Dado que T es lineal y Λ es convexa, es fácil ver, usando la linealidad de la integral, que f es convexa.

Además, f es s.c.i para la topología fuerte, pues, si $\{(u_k,x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbf{E}$ converge en norma a $(\bar{u},\bar{x})$, tenemos que $T(u_k,x_k)\to T(\bar{u},\bar{x})$ uniformemente y $\{(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en $L^p_{\mathfrak{m}}([0,1])$ a $\bar{u}$, en particular, existe una subsucesión que converge c.t.p a $\bar{u}$. En particular,

$$\Lambda(T(\bar{u},\bar{x})(t),\bar{u}(t)) \le \liminf_{k\to+\infty}\Lambda(T(u_k,x_k)(t),\bar{u}_k(t))$$

Usando, el **lema de Fatou** tenemos que

$$f(\bar{u},\bar{x}) = \int_0^1 \Lambda(T(\bar{u},\bar{x})(t),\bar{u}(t))dt \le \liminf_{k\to+\infty}\int_0^1 \Lambda(T(u_k,x_k)(t),\bar{u}_k(t))dt = \liminf_{k\to+\infty} f(x_k,x_k).$$

Finalmente, tomando por ejemplo $(u_0, x_0) = (0,0)$ tenemos que

$$\beta + \alpha \|u\|_{L^p}^p \leq f(u,x) \leq f(u_0,x_0) = \Lambda(0,0)$$

Luego el conjunto $A_f(u_0,x_0)$ es acotado, y por el **Teorema de Weierstrass-Hilbert-Tonelli** concluimos el resultado.

La reflexividad del espacio $\mathbf{E} = L^p_{\mathrm{m}}([0,1]) \times \mathbb{R}$ también se podría argumentar usando una norma equivalente

$$\|(u,x)\|_{\mathbf{E}} = \sqrt{\|u\|_{L^p}^2 + |x|^2}, \qquad \forall (u,x) \in L^p_{\mathrm{m}}([0,1]) \times \mathbb{R}$$

y probar que en este caso el espacio es un espacio de Banach uniformemente convexo; en clases sólo demostramos la convexidad uniforme de $L^p_{\mathrm{m}}([0,1])$ para el caso $p \geq 2$, el caso $p \in (1,2)$ sólo se mencionó.

19.2.10 Problema 4 - Certamen 2 - 2021

Por un lado sabemos que $N \subseteq (N^\perp)^\perp$ (visto en clases).

Notemos primero que $(N^\perp)^\perp$ es cerrado débil-$\star$. En efecto, si $M \subseteq \mathbf{E}$ es un s.e.v. de $\mathbf{E}$, entonces $M^\perp$ es cerrado débil-$\star$ pues

$$M^\perp = \bigcap_{x \in M} \{\ell \in \mathbf{E}^* \mid \langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 0\} = \bigcap_{x \in M} J_x^{-1}(\{0\}).$$

Luego, $M^\perp$ se escribe como intersección de conjuntos cerrados débil-$\star$.

En particular, tenemos $\overline{N}^{\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})} \subseteq (N^\perp)^\perp$.

Supongamos por contradicción que existe $\hat{\ell} \in (N^\perp)^\perp \setminus \overline{N}^{\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})}$.

Por el Teorema de Hahn-Banach para la topología débil-$\star$ (segunda versión), existen $x \in \mathbf{E} \setminus \{0\}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que

$$\langle \hat{\ell}, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} < \lambda < \langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \qquad \forall \ell \in \overline{N}^{\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})}. \tag{19.7}$$

Dado que N es un s.e.v. de $\mathbf{E}^*$ tenemos que

$$\lambda < \langle t\ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = t\langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall \ell \in N.$$

Luego, necesariamente $\langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 0$ para todo $\ell \in N$, es decir, $x \in N^\perp$.

Por otro lado, dado que $\hat{\ell} \in (N^\perp)^\perp$, tenemos que $\langle \hat{\ell}, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 0$.

Luego, por (19.7) tenemos que $\lambda > 0$.

Sin embargo, evaluando en $\ell = 0 \in \overline{N}^{\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})}$ en (19.7), obtenemos $\lambda < 0$, lo que es absurdo.

19.2.11 Problema 5 - Certamen 2 - 2021

[$\Longleftarrow$] Si existe $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$ tal que $S = T^*$, entonces $S \in \mathscr{L}C(\mathbf{F}^*,\mathbf{E}^*)$. Luego, repitiendo los argumentos usados para demostrar la Proposición 43 del apunte (Proposición 4, Clase 13), pero para la base de vecindades de la topología débil-$\star$ se obtiene fácilmente que el operador $S : (\mathbf{F}^*, \sigma(\mathbf{F}^*,\mathbf{F})) \to (\mathbf{E}^*, \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}))$ es continuo.

[$\Longrightarrow$] Supongamos ahora que $S : (\mathbf{F}^*, \sigma(\mathbf{F}^*,\mathbf{F})) \to (\mathbf{E}^*, \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}))$ es continuo. Dado $x \in \mathbf{E}$, sabemos que por definición

$$J_x : (\mathbf{E}^*, \sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_{\mathbb{R}})$$

es un operador continuo. Luego,

$$J_x \circ S : (\mathbf{F}^*, \sigma(\mathbf{F}^*, \mathbf{F})) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_{\mathbb{R}})$$

es un operador continuo. Siguiendo los argumentos usados para demostrar el **Hahn-Banach Geométrico, primera versión topología $\sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})$**, existe $y \in \mathbf{F}$ tal que $J_y = J_x \circ S$. En particular, esto implica que

$$J_E \circ S(\mathbf{F}^*) \subseteq J_{\mathbf{F}}(\mathbf{F}).$$

Definamos entonces $T : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ vía la fórmula:

$$T(x) = J_F^{-1} \circ J_x \circ S, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Supongamos que T es un operador acotado, luego tendríamos que

$$\langle \ell, T(x) \rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} = \langle J_F(T(x)), \ell \rangle_{\mathbf{F}^{**},\mathbf{F}^*} = \langle J_x \circ S, \ell \rangle_{\mathbf{F}^{**},\mathbf{F}^*} = \langle S(\ell), x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E},\ \ell \in \mathbf{F}^*.$$

Esto implicaría que $S = T^*$. Luego, para concluir tenemos que probar que T es un operador acotado.

Observemos primero que

$$\|T(x)\|_{\mathbf{F}} = \|J_F^{-1} \circ J_x \circ S\|_{\mathbf{F}} = \|J_x \circ S\|_{\mathbf{F}^{**}} = \sup_{\|\ell\|_{\mathbf{F}^*}} |\langle J_x \circ S, \ell \rangle_{\mathbf{F}^{**},\mathbf{F}^*}| = \sup_{\|\ell\|_{\mathbf{F}^*} \le 1} |\langle J_x, S(\ell) \rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*}|, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

En consecuencia

$$\|T(x)\|_{\mathbf{F}} = \sup_{\|\ell\|_{\mathbf{F}^*} \le 1} |\langle S(\ell), x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| \le \sup_{\|\ell\|_{\mathbf{F}^*} \le 1} \|S(\ell)\|_{\mathbf{E}^*} \|x\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Notemos que si S fuese un operador acotado, es decir, $S \in \mathscr{L}C(\mathbf{F}^*, \mathbf{E}^*)$, entonces

$$\sup_{\|\ell\|_{\mathbf{F}^*} \le 1} \|S(\ell)\|_{\mathbf{E}^*} = \|S\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{F}^*,\mathbf{E}^*)}$$

y podríamos concluir que T es un operador acotado, es decir, $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Esto es efectivamente el caso, basta adaptar los argumentos vistos en clases para la topología débil-$\star$.

- Dado que $S : (\mathbf{F}^*, \sigma(\mathbf{F}^*, \mathbf{F})) \to (\mathbf{E}^*, \sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}))$ es continuo, usando los mismos argumentos de la demostración de la Proposición 44 del apunte (Proposición 5, Clase 13), podemos ver que $\mathrm{Gr}(S)$ es cerrado en la topología producto $\sigma(\mathbf{F}^*, \mathbf{F}) \otimes \sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E})$.
- Similar a lo hecho en la Proposición 42 del apunte (Proposición 3, Clase 13), podemos ver que $\sigma(\mathbf{F}^*, \mathbf{F}) \otimes \sigma(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}) = \sigma((\mathbf{F} \times \mathbf{E})^*, \mathbf{F} \times \mathbf{E})$. Luego, $\mathrm{Gr}(S)$ es cerrado débil-$\star$ y a posteriori cerrado fuerte en el espacio de Banach $\mathbf{F}^* \times \mathbf{E}^*$.
- Usando el **Teorema del Grafo Cerrado**, tenemos que S es un operador acotado

19.2.12 Problema 6 - Certamen 2 - 2021

Por el Lema de Goldstine, sabemos que

$$\overline{J(\mathscr{C}(\mathbf{X}))}^{\sigma(M(\mathbf{X})^*, M(\mathbf{X})} = \mathscr{C}(\mathbf{X})^{**} = M(\mathbf{X})^*.$$

Luego, para todo $\varphi \in (M(\mathbf{X}), \|\cdot\|_{M(\mathbf{X})})^*$, $\mu \in M(\mathbf{X}) \setminus \{0\}$ y $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$W_\varphi\left(\mu; \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap J(\mathscr{C}(\mathbf{X})) \neq \emptyset$$

Luego, existe $f \in \mathscr{C}(\mathbf{X})$ tal que

$$\left| \langle \varphi, \mu \rangle_{M(\mathbf{X})^*, M(\mathbf{X})} - \int_{\mathbf{X}} f d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sabemos que $\mathscr{C}(\mathbf{X})$ es separable, luego existe $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}(\mathbf{X})$ densa en $(\mathscr{C}(\mathbf{X}), \|\cdot\|_\infty)$. En particular, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f - f_k\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\|\mu\|_{M(\mathbf{X})}}$$

$$\left| \langle \varphi, \mu \rangle_{M(\mathbf{X})^*, M(\mathbf{X})} - \int_{\mathbf{X}} f_k d\mu \right| \leq \left| \langle \varphi, \mu \rangle_{M(\mathbf{X})^*, M(\mathbf{X})} - \int_{\mathbf{X}} f d\mu \right| + \left| \int_{\mathbf{X}} (f - f_k) d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \|f - f_k\|_\infty \|\mu\|_{M(\mathbf{X})} < \varepsilon.$$

Notar que la desigualdad es trivial si $\mu = 0$.

19.2.13 Problema 7 - Certamen 2 - 2021

1. Denotemos por

$$\mathscr{U} := \left\{ u \in L^1_\mu(\Omega) \mid \int_\Omega f(u)\, d\mu < +\infty \right\}.$$

Si $\mathscr{U} = \emptyset$ entonces $\psi \equiv -\infty$ y su epígrafo sería $L^\infty_\mu(\Omega) \times \mathbb{R}$ el cual es cerrado débil-$\star$ en la topología $\sigma\left(L^\infty_\mu(\Omega), L^1_\mu(\Omega)\right)$. Lo que implica que ψ es s.c.i. para la topología débil-$\star$ $\sigma\left(L^\infty_\mu(\Omega), L^1_\mu(\Omega)\right)$. Supongamos entonces que $\mathscr{U} \neq \emptyset$, luego sigue que

$$\psi(v) = \sup_{u\in\mathscr{U}} \left\{ \int_\Omega uv - f(u)\, d\mu \right\}, \qquad \forall v \in L^\infty_\mu(\Omega).$$

y por lo tanto

$$\operatorname{epi}(\psi) = \bigcap_{u\in\mathscr{U}} \operatorname{epi}(\psi_u), \qquad \text{donde } \psi_u(v) := \int_\Omega uv - f(u)\, d\mu.$$

Notemos que si $\displaystyle\int_\Omega f(u)\, d\mu > -\infty$, entonces la función

$$\psi_u : \left(L^\infty_\mu(\Omega), \sigma\left(L^\infty_\mu(\Omega), L^1_\mu(\Omega)\right)\right) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_\mathbb{R})$$

es continua pues el término lineal

$$v \mapsto \int_\Omega uv\, d\mu = J_u(v)$$

es un funcional de evaluación sobre $L^\infty_\mu(\Omega)$, y por lo tanto una función continua respecto a la topología débil-$\star$ $\sigma\left(L^\infty_\mu(\Omega), L^1_\mu(\Omega)\right)$. Luego, ψ_u es suma de una lineal continua débil-$\star$ y una constante. En particular, $\operatorname{epi}(\psi_u)$ es cerrado débil-$\star$.
Si por otro lado $\displaystyle\int_\Omega f(u)\, d\mu = -\infty$, entonces $\operatorname{epi}(\psi_u) = \emptyset$ que también es cerrado débil-$\star$. Por lo tanto, $\operatorname{epi}(\psi)$ es cerrado débil-$\star$, lo que implica que ψ es s.c.i. para la topología débil-$\star$ $\sigma\left(L^\infty_\mu(\Omega), L^1_\mu(\Omega)\right)$.

Otra forma de argumentar y evitar considerar el caso $\int_\Omega f(u)\,d\mu = -\infty$, es como sigue:

Dado $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ es un espacio de medida σ-finita, existe una sucesión de conjuntos medibles $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$ tales que

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \mu(\Omega_k) < +\infty, \quad \Omega_k \subseteq \Omega_{k+1} \quad \text{y} \quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k = \Omega.$$

Dado que

$$\int_{\Omega_k} uv - f(u)\,d\mu \to \int_\Omega uv - f(u)\,d\mu, \qquad \forall u\in L^1_\mu(\Omega),\ \forall v\in L^\infty_\mu(\Omega),$$

es fácil ver que

$$\psi(v) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{u\in\mathscr{U}} \left\{ \int_{\Omega_k} uv - f(u)\,d\mu \right\}, \qquad \forall v\in L^\infty_\mu(\Omega),$$

y por lo tanto

$$\operatorname{epi}(\psi) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{u\in\mathscr{U}} \operatorname{epi}(\psi_u), \qquad \text{donde } \psi_u^k(v) := \int_{\Omega_k} uv - f(u)\,d\mu.$$

Ahora bien, como f es convexa y continua, existen $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tales que $f(s)\geq \alpha s+\beta$ para todo $s\in\mathbb{R}$ (Teorema de Hahn-Banach Geométrico en $\mathbb{R}^2$). En particular,

$$\alpha\int_\Omega u\cdot \mathbb{1}_{\Omega_k} + \beta\mu(\Omega_k) \leq \int_{\Omega_k} f(u), \qquad \forall u\in L^1_\mu(\Omega),\ \forall k\in\mathbb{N}.$$

Esto implica que para todo $u\in\mathscr{U}$ y $k\in\mathbb{N}$ la función

$$\psi_u^k : (L^\infty_\mu(\Omega), \sigma\left(L^\infty_\mu(\Omega), L^1_\mu(\Omega)\right)) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_\mathbb{R})$$

es continua, y a posterior, ψ es s.c.i. para la topología débil-$\star$ $\sigma\left(L^\infty_\mu(\Omega), L^1_\mu(\Omega)\right)$.

2. Dado $v\in L^\infty_\mu(\Omega)$ tenemos que

$$\psi(v) \geq \sup_{u\in L^1_\mu(\Omega)} \left\{ \int_\Omega uv - f(u)\,d\mu \mid u\in \overline{\mathbb{B}_{L^1_\mu(\Omega)}(u_0,r)} \right\} \geq \sup_{u\in L^1_\mu(\Omega)} \left\{ \int_\Omega uv\,d\mu \mid u\in \overline{\mathbb{B}_{L^1_\mu(\Omega)}(u_0,r)} \right\} - M.$$

Pero

$$\sup_{u\in L^1_\mu(\Omega)} \left\{ \int_\Omega uv\,d\mu \mid u\in \overline{\mathbb{B}_{L^1_\mu(\Omega)}(u_0,r)} \right\} = r\sup_{\|u\|_{L^1}\leq 1} \int_\Omega uv\,d\mu + \int_\Omega u_0 v\,d\mu = r\|v\|_{L^\infty} + \int_\Omega u_0 v\,d\mu.$$

Luego,

$$\psi(v) - \int_\Omega u_0 v\,d\mu \geq r\|v\|_{L^\infty} - M, \qquad \forall v\in L^\infty_\mu(\Omega).$$

Notemos que si $\psi(v) - \int_\Omega u_0 v\,d\mu = +\infty$ para todo $v\in L^\infty_\mu(\Omega)$ la conclusión es directa. Supongamos entonces que existe $v_0\in L^\infty_\mu(\Omega)$ tal que $\psi(v_0) - \int_\Omega u_0 v_0\,d\mu < +\infty$. En particular, tenemos que

$$A_{\psi - J_{u_0}}(v_0) := \left\{ v\in L^\infty_\mu(\Omega) \mid \psi(v) - \int_\Omega u_0 v\,d\mu \leq \psi(v_0) - \int_\Omega u_0 v_0\,d\mu \right\}$$

es acotado y cerrado débil-$\star$; esto último pues ψ es s.c.i topología débil-$\star$ $\sigma\left(L^\infty_\mu(\Omega),L^1_\mu(\Omega)\right)$ y el término integral es $J_{u_0}(v)$, el cual, por definición es continuo respecto a la topología débil-$\star$ $\sigma\left(L^\infty_\mu(\Omega),L^1_\mu(\Omega)\right)$. En particular, el conjunto $A_{\psi-J_{u_0}}(v_0)$ es compacto débil-$\star$ gracias al **Teorema de Banach-Alaoglu**.

Para concluir, y al igual que con el **Teorema de Weierstrass-Hilbert-Tonelli**, basta probar que

$$\bigcap_{\gamma>\inf_{L^\infty_\mu(\Omega)}(\psi-J_{u_0})}\left\{v\in L^\infty_\mu(\Omega)\mid \psi(v)-\int_\Omega u_0v\,d\mu\le\gamma\right\}\neq\emptyset.$$

Dado que $A_{\psi-J_{u_0}}(v_0)$ es compacto débil-$\star$, argumentando por contradicción, podemos asegurar que existen $\gamma_1,\dots,\gamma_m>\inf_{L^\infty_\mu(\Omega)(\psi-J_{u_0})}$ tales que

$$A_{\psi-J_{u_0}}(v_0)\subseteq\bigcup_{i=1}^m\{v\in A_{\psi-J_{u_0}}(v_0)\mid\psi(v)-J_{u_0}(v)>\gamma_i\}=\left\{v\in A_{\psi-J_{u_0}}(v_0)\;\middle|\;\psi(v)-J_{u_0}(v)>\min_{i=1,\dots,m}\gamma_i\right\}.$$

Esto implica que para todo $v\in A_{\psi-J_{u_0}}(v_0)$ tenemos que $\min_{i=1,\dots,m}\gamma_i<\psi(v)-J_{u_0}(v)$.

Sin embargo, esto no puede ocurrir, puesto si no obtendríamos

$$\inf_{v\in L^1_\mu(\Omega)}\psi(v)-J_{u_0}(v)=\inf_{v\in A_{\psi-J_{u_0}}(v_0)}\psi(v)-J_{u_0}(v)\ge\min_{i=1,\dots,m}\gamma_i>\inf_{v\in L^1_\mu(\Omega)}\psi(v)-J_{u_0}(v).$$

O Para argumentar que $\psi-J_{u_0}$ es s.c.i topología débil-$\star$ $\sigma\left(L^\infty_\mu(\Omega),L^1_\mu(\Omega)\right)$ basta notar que

$$\psi(v)-J_{u_0}(v)=\sup_{u\in L^1_\mu(\Omega)}\left\{\int_\Omega(u-u_0)v-f(u)\,d\mu\right\},\qquad\forall v\in L^\infty_\mu(\Omega),$$

y usar los argumentos de la parte (a).

19.2.14 Problema 5 - Examen - 2021

Sea $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq T(K)$ una sucesión que converge a $y\in\mathbf{F}$, luego existe una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq K$ tal que $y_k=T(x_k)$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Debemos probar que existe $\bar{x}\in K$ tal que $y=T(\bar{x})$.

Veamos que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada. Recordemos que $\|x_k\|_{\mathbf{E}}=\|J_{x_k}\|_{\mathbf{E}^{**}}$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Luego, para obtener que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada, basta ver que $\{J_{x_k}(\ell)\}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $\mathbb{R}$ para todo $\ell\in\mathbf{E}^*$ fijo y luego aplicar el Teorema de Banach-Steinhaus.

Notemos que dado $\ell\in\mathbf{E}^*$, por hipótesis, tenemos que existen $f\in\mathbf{F}^*$ y $h\in b(K)$ tales que $\ell=T^*(f)+h$, y por lo tanto

$$\langle\ell,x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}=\langle T^*(f),x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}+\langle h,x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\le\langle f,T(x_k)\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}+\sup_{x\in K}\langle h,x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}},\qquad\forall k\in\mathbb{N}.$$

Similarmente, existen $f'\in\mathbf{F}^*$ y $h'\in b(K)$ tales que $-\ell=T^*(f')+h'$, y por lo tanto

$$-\langle\ell,x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}=\langle T^*(f'),x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}+\langle h',x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\le\langle f',T(x_k)\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}+\sup_{x\in K}\langle h',x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}},\qquad\forall k\in\mathbb{N}.$$

Dado que $T(x_k)\to y$ y $h,h'\in b(K)$, concluimos

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}|J_{x_k}(\ell)|=\sup_{k\in\mathbb{N}}|\langle\ell,x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}|<+\infty,$$

y por lo tanto, el Teorema de Banach-Steinhaus obtenemos que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada.

Luego, por el Teorema de Compacidad secuencial débil, existe una subsucesión (que denotaremos igual), que converge débilmente a algún $\bar{x}\in\mathbf{E}$. Dado que $x_k\in K$, para todo $k\in\mathbb{N}$ y K es cerrado débil, tenemos que $\bar{x}\in K$. Dado que $T\in\mathscr{L}C(E,F)$, tenemos que $T(x_k)\rightharpoonup T(\bar{x})$, y por lo tanto, dado que $(\mathbf{E},\sigma(\mathbf{E},\mathbf{E}^*))$ es un e.v.t. Hausdorff, tenemos que $y=T(\bar{x})$, pues en particular $T(x_k)\rightharpoonup y$; el límite de sucesiones que convergen débilmente es único.

19.2.15 Problema 6 - Examen - 2021

Notemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{gr}(\Phi^*) &:= \{(f,\ell)\in\mathbf{F}^*\times\mathbf{E}^* \mid \langle f,y\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}\geq\langle\ell,x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}},\ \forall x\in\mathbf{E},\ \forall y\in\Phi(x)\}\\
&= \bigcap_{(x,y)\in\mathrm{gr}(\Phi)} \{(f,\ell)\in\mathbf{F}^*\times\mathbf{E}^* \mid \langle f,y\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}\geq\langle\ell,x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\}\\
&= \bigcap_{(x,y)\in\mathrm{gr}(\Phi)} \{(f,\ell)\in\mathbf{F}^*\times\mathbf{E}^* \mid \langle f,y\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}\geq\langle\ell,x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\}\\
&= \bigcap_{(x,y)\in\mathrm{gr}(\Phi)} \{(f,\ell)\in\mathbf{F}^*\times\mathbf{E}^* \mid \langle(f,\ell),(y,x)\rangle_{\mathbf{F}^*\times\mathbf{E}^*,\mathbf{F}\times\mathbf{E}}\geq 0\}\\
&= \bigcap_{(x,y)\in\mathrm{gr}(\Phi)} \{(f,\ell)\in\mathbf{F}^*\times\mathbf{E}^* \mid \langle(J_y,J_x),(f,\ell)\rangle_{\mathbf{F}^{**}\times\mathbf{E}^{**}}\geq 0\}\\
&= \bigcap_{(x,y)\in\mathrm{gr}(\Phi)} (J_y,J_x)^{-1}[0,+\infty)
\end{aligned}$$

Dado que cada $(J_y,J_x)\in\mathbf{F}^{**}\times\mathbf{E}^{**}\subseteq(\mathbf{F}\times\mathbf{E})^{**}$, tenemos que $(J_y,J_x)^{-1}[0,+\infty)$ es cerrado débil-$\star$ en $\sigma((\mathbf{F}\times\mathbf{E})^*,\mathbf{F}\times\mathbf{E})$. En consecuencia, $\mathrm{gr}(\Phi^*)$ es cerrado débil-$\star$ en $\sigma((\mathbf{F}\times\mathbf{E})^*,\mathbf{F}\times\mathbf{E})$.

Ahora bien, similar a lo hecho en la Proposición 42 del apunte (Proposición 3, Clase 13), podemos ver que $\sigma(\mathbf{F}^*,\mathbf{F})\otimes\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})=\sigma((\mathbf{F}\times\mathbf{E})^*,\mathbf{F}\times\mathbf{E})$. Esto implica que $\mathrm{gr}(\Phi^*)$ es cerrado en la topología producto $\sigma(\mathbf{F}^*,\mathbf{F})\otimes\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})$.

Por otro lado, tenemos que

$$\overline{\mathbb{B}}_{\mathbf{F}^*}\times\Phi^*\left(\overline{\mathbb{B}}_{\mathbf{F}^*}\right)=\mathrm{gr}(\Phi^*)\cap\overline{\mathbb{B}}_{\mathbf{F}^*}\times\mathbf{E}^*.$$

Por el Teorema de Banach-Alaoglu, tenemos que $\overline{\mathbb{B}}_{\mathbf{F}^*}$ es un conjunto compacto débil-$\star$ en $\mathbf{E}^*$, y en particular cerrado débil-$\star$ pues la topología débil-$\star$ es Hausdorff. Por lo tanto $\overline{\mathbb{B}}_{\mathbf{F}^*}\times\mathbf{E}^*$ es cerrado en la topología producto $\sigma(\mathbf{F}^*,\mathbf{F})\otimes\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})$, y en consecuencia $\overline{\mathbb{B}}_{\mathbf{F}^*}\times\Phi^*\left(\overline{\mathbb{B}}_{\mathbf{F}^*}\right)$ es cerrado en la topología producto $\sigma(\mathbf{F}^*,\mathbf{F})\otimes\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})$.

Luego, dado que $\left(\overline{\mathbb{B}}_{\mathbf{F}^*},\sigma(\mathbf{F}^*,\mathbf{F})\right)$ es un espacio topológico compacto, usando la indicación, concluimos que $\Phi^*\left(\overline{\mathbb{B}}_{\mathbf{F}^*}\right)$ es cerrado débil-$\star$ en $\sigma(\mathbf{E}^*,\mathbf{E})$.

III Introducción a la teoría espectral

20. Complemento Topológico

Vamos a comenzar esta parte del curso estudiando la noción complemento topológico, la cual será útil para la secciones venideras.

Definición 20.0.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y $G \subseteq \mathbf{E}$ un s.e.v. cerrado. Diremos un s.e.v. $L \subseteq \mathbf{E}$ es un **complemento topológico** de G si L es cerrado y $\mathbf{E} = G \oplus L$.

Lema 20.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach y $G \subseteq \mathbf{E}$ un s.e.v. cerrado. Si G admite un complemento topológico, entonces $P_G \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$.

Demostración. La conclusión viene del Teorema del Grafo Cerrado. En efecto, si $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ es tal que

$$x_k \to x \quad \text{y} \quad P_G(x_k) \to y,$$

entonces, si $L \subseteq \mathbf{E}$ es un complemento topológico de G, tenemos

$$P_L(x_k) = x_k - P_G(x_k) \to x - y.$$

Dado que G y L son cerrados, tenemos

$$y \in G \quad \text{y} \quad z := x - y \in L,$$

y por lo tanto $y = P_G(x)$, pues $x = y + z \in G + L$. □

Veamos ahora algunos casos importantes donde podemos asegurar la existencia de un complemento topológico.

Proposición 20.0.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y $G \subseteq \mathbf{E}$ un s.e.v. de dimensión finita. Entonces G admite un complemento topológico.

Demostración. Supongamos $G = \langle\{e_1,\dots,e_n\}\rangle$ con $\{e_1,\dots,e_n\}$ linealmente independientes. Por el Corolario 2.3.2, para cada $k \in \{1,\dots,n\}$, existe $\ell_k \in \mathbf{E}^*$ tal que

$$\ell_k(e_k) = 1 \qquad \text{y} \qquad \ell_k(e_i) = 0 \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}\setminus\{k\}.$$

Sea $L = \bigcap_{k=1}^{n} \ker(\ell_k)$. Notemos que L es cerrado y además tenemos

$$\ell_k\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \ell_k(e_i) = \alpha_k, \qquad \forall \alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R},\ \forall k \in \{1,\dots,n\}. \tag{20.1}$$

Resta ver que $\mathbf{E} = G \oplus L$. Esto viene de notar que

- si $x \in G\cap L$, entonces $\ell_k(x) = 0$ y existen $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que $x = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$. Luego, por (20.1), tenemos que $\alpha_k = 0$ para cada $k \in \{1,\dots,n\}$. Por lo tanto $x = 0$.
- tenemos
$$x = \sum_{i=1}^{n}\ell_i(x)e_i + x - \sum_{i=1}^{n}\ell_i(x)e_i \in\ G+L, \qquad \forall x \in \mathbf{E}$$
pues
$$\ell_k\left(x - \sum_{i=1}^{n}\ell_i(x)e_i\right) = \ell_k(x) - \ell_k(x) = 0, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

□

Proposición 20.0.2 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y $N \subseteq \mathbf{E}^*$ un s.e.v. de dimensión finita. Entonces $N^\perp$ admite un complemento topológico, cuya dimensión (que es finita) coincide con la de N.

Demostración. Supongamos que $N = \langle\{\ell_1,\dots,\ell_n\}\rangle$, con $\{\ell_1,\dots,\ell_n\}$ siendo linealmente independiente. Afirmamos que existen $x_1,\dots,x_n \in \mathbf{E}$ tales que

$$\langle \ell_k, x_k\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 1 \qquad \text{y} \qquad \langle \ell_k, x_i\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 0 \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}\setminus\{k\},$$

pues la función (lineal) $\psi : \mathbf{E} \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\psi(x) := \left(\langle \ell_1, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}},\dots,\langle \ell_n, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}\right), \qquad \forall\, x \in \mathbf{E}$$

es sobreyectiva, pues si no fuese así, $\psi(\mathbf{E}) \subsetneq \mathbb{R}^n$ y por el Corolario 3.2.3 existiría $\eta \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ tal que

$$\langle \sum_{i=1}^{n}\eta_i\ell_i, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \sum_{i=1}^{n}\eta_i\langle \ell_i, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \eta^\top\psi(x) = 0, \qquad \forall\, x \in \mathbf{E}.$$

Luego $\sum_{i=1}^{n}\eta_i\ell_i = 0$, pero como $\{\ell_1,\dots,\ell_n\}$ es linealmente independiente, necesariamente $\eta = 0$.

Veamos que $F = \langle\{x_1,\dots,x_n\}\rangle$ es un complemento topológico de $N^\perp$.

- Notemos que $\mathbf{E} = N^{\perp} + F$, pues dado $x \in \mathbf{E}$ tenemos

$$x = x - \sum_{i=1}^{n} \langle \ell_i, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} x_i + \sum_{i=1}^{n} \langle \ell_i, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} x_i.$$

  Claramente, $\sum_{i=1}^{n} \langle \ell_i, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} x_i \in F$ y por otro lado $x - \sum_{i=1}^{n} \langle \ell_i, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} x_i \in N^{\perp}$ pues

$$\langle \ell_k, x - \sum_{i=1}^{n} \langle \ell_i, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} x_i \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle \ell_k, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} - \langle \ell_k, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} \langle \ell_k, x_k \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 0, \qquad \forall k \in \{1 \ldots, n\}.$$

- Además, para todo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\langle \ell_k, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \alpha_k, \qquad \forall k \in \{1, \ldots, n\}. \tag{20.2}$$

  Notemos que si $x \in F \bigcap N^{\perp}$, entonces $\langle \ell_k, x \rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = 0$ para todo $k = 1, \ldots, n$ y

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

  En consecuencia, $F \bigcap N^{\perp} = \{0\}$ y por lo tanto $\mathbf{E} = N^{\perp} \oplus F$.

Finalmente, $\dim(F) = n$ pues $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es linealmente independiente. En efecto, si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ con $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, entonces por (20.2) tenemos que $\alpha_k = 0$ para todo $k \in \{1 \ldots, n\}$. $\square$

21. Operadores compactos

Ahora pasaremos a estudiar la noción de operador compacto entre e.v.n. y presentaremos algunas de sus propiedades más importantes.

Definición 21.0.1 Diremos que un operador $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$ entre dos e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ es un **operador compacto** si toda sucesión acotada $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ tiene una subsucesión tal que $\{T(x_{k_j})\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{F}$ converge fuertemente.

Denotaremos por $\mathscr{K}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ a la colección de todos los operadores compactos de $\mathbf{E}$ en $\mathbf{F}$.

Notemos que $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ si y sólo si $\overline{T(\mathbb{B}_{\mathbf{E}})}$ es subconjunto compacto (fuerte) del e.v.n. $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$.

Notación 21.1. *Si* $\mathbf{E} = \mathbf{F}$ *escribiremos simplemente* $\mathscr{L}C(\mathbf{E})$ *y* $\mathscr{K}(\mathbf{E})$ *en vez de* $\mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{E})$ *y* $\mathscr{K}(\mathbf{E},\mathbf{E})$*, respectivamente.*

■ **Ejemplo 21.0.1** Dada $\kappa : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ Lipschitz continua, el operador $T : \mathscr{C}([0,1]) \to \mathscr{C}([0,1])$ es compacto:

$$T(f)(x) = \int_0^1 \kappa(x,y) f(y)\, dy, \qquad \forall f \in \mathscr{C}([0,1]),\ \forall x \in [0,1].$$

En efecto:

- Claramente T es lineal, por linealidad de la integral.
- $T(f) \in \mathscr{C}([0,1])$, de hecho es Lipschitz continua

$$|T(f)(x_1) - T(f)(x_2)| \le \int_0^1 |\kappa(x_1,y) - \kappa(x_2,y)||f(y)|\, dy \le L_\kappa |x_1 - x_2| \|f\|_\infty, \quad \forall x_1, x_2 \in [0,1].$$

- T es un operador acotado pues $\|T(f)\|_\infty \le \|\kappa\|_\infty \|f\|_\infty$ para todo $f \in \mathscr{C}([0,1])$.

- $T(\overline{\mathbb{B}_{\mathscr{C}([0,1])}})$ relativamente compacto gracias al Teorema de Arzelá-Ascoli:
  - $T(\overline{\mathbb{B}_{\mathscr{C}([0,1])}})$ es equi-continuo pues

$$|T(f)(x_1) - T(f)(x_2)| \leq L_\kappa |x_1 - x_2|, \qquad \forall x_1, x_2 \in [0,1],\ \forall f \in \mathbb{B}_{\mathscr{C}([0,1])}.$$

  - Para todo $x \in [0,1]$ el conjunto $\{T(f)(x) \mid \mathbb{B}_{\mathscr{C}([0,1])}\}$ es acotado en $\mathbb{R}$ pues

$$|T(f)(x)| \leq \|\kappa\|_\infty, \quad \forall \|f\|_\infty \leq 1.$$

■

El resultado es igual de válido si $\kappa : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continua (por continuidad uniforme).

21.1 Propiedades básicas

Veamos primero algunas propiedades algebraicas de operadores compactos.

Proposición 21.1.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_\mathbf{E})$ y $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_\mathbf{F})$ son dos e.v.n. Luego, $\mathscr{K}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ es un s.e.v. de $\mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$. Si además, $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_\mathbf{F})$ es un espacio de Banach, entonces $\mathscr{K}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ es un s.e.v. cerrado de $(\mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F}), \|\cdot\|_{\mathscr{L}C})$.

Demostración. Veamos primero que $\mathscr{K}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ es un s.e.v. de $\mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$. Recordemos que $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_\mathbf{F})$ es un e.v.t., luego las funciones suma y multiplicación por escalar son continuas

$$f_{\text{sum}}(x,y) := x + y \quad \text{y} \quad f_{\text{mult}}(\lambda, y) := \lambda x, \qquad \forall x, y \in \mathbf{E},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Si $\overline{T(\mathbb{B}_\mathbf{E})}$ es compacto, entonces $\lambda\overline{T(\mathbb{B}_\mathbf{E})} = f_{\text{mult}}\left(\{\lambda\} \times \overline{T(\mathbb{B}_\mathbf{E})}\right)$ también es compacto.
  Por lo tanto,
$$\lambda T \in \mathscr{K}(\mathbf{E},\mathbf{F}), \quad \forall T \in \mathscr{K}(\mathbf{E},\mathbf{F}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$
- Si $T_1, T_2 \in \mathscr{K}(\mathbf{E},\mathbf{F})$, entonces también tenemos que $T_1 + T_2 \in \mathscr{K}(\mathbf{E},\mathbf{F})$.
  En efecto, observemos que
$$T_1(\mathbb{B}_\mathbf{E}) + T_2(\mathbb{B}_\mathbf{E}) \subseteq \overline{T_1(\mathbb{B}_\mathbf{E})} + \overline{T_2(\mathbb{B}_\mathbf{E})} = f_{\text{sum}}\left(\overline{T_1(\mathbb{B}_\mathbf{E})} \times \overline{T_2(\mathbb{B}_\mathbf{E})}\right).$$
  Esto implica que $\overline{T_1(\mathbb{B}_\mathbf{E}) + T_2(\mathbb{B}_\mathbf{E})}$ está contenido en un compacto de $\mathbf{F}$, y por lo tanto es compacto.

Veamos ahora que $\mathscr{K}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ es cerrado. Tomemos $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{K}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ tal que $T_k \to T$ en $\mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$. Si $\left(\overline{T(\mathbb{B}_\mathbf{E})}, d_\mathbf{F}\right)$ fuese un e.m. completo y totalmente acotado, entonces sería un e.m. compacto, donde

$$d_\mathbf{F}(x,y) = \|x - y\|_\mathbf{F}, \qquad \forall x, y \in \mathbf{F}.$$

En consecuencia, $\overline{T(\mathbb{B}_\mathbf{E})}$ sería compacto (fuerte) en $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_\mathbf{F})$, y por lo tanto, tendríamos que $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E},\mathbf{F})$. Dado que $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_\mathbf{F})$ es un espacio de Banach, es directo que $\left(\overline{T(\mathbb{B}_\mathbf{E})}, d_\mathbf{F}\right)$ es un e.m. completo.

Veamos ahora que es un e.m. totalmente acotado. Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T_k - T\|_{\mathscr{L}C} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dado que $\overline{T_k\left(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}\right)}$ es compacto fuerte en $\mathbf{F}$, existen $y_1, \ldots, y_m \in \mathbf{F}$ tales que

$$\overline{T_k\left(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}\right)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(y_i, \tfrac{\varepsilon}{3}).$$

Fijemos $y \in \overline{T\left(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}\right)}$, y tomemos $x \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$ tal que $\|y - T(x)\|_{\mathbf{F}} < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Notemos que también existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\|T_k(x) - y_i\|_{\mathbf{F}} < \dfrac{\varepsilon}{3}$. En consecuencia

$$\|y - y_i\|_{\mathbf{F}} \leq \|y - T(x)\|_{\mathbf{F}} + \|T(x) - T_k(x)\|_{\mathbf{F}} + \|T_k(x) - y_i\|_{\mathbf{F}} < \frac{\varepsilon}{3} + \|T - T_k\|_{\mathscr{L}C} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Luego, $y \in \displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(y_i, \varepsilon)$, y a partir de esto podemos concluir que $\left(\overline{T\left(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}\right)}, d_{\mathbf{F}}\right)$ es totalmente acotado pues

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, y_1, \ldots, y_m \in \mathbf{F},\ \text{ tales que }\ \overline{T\left(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}\right)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \left(\mathbb{B}_{\mathbf{F}}(y_i, \varepsilon) \cap \overline{T\left(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}\right)}\right) = \bigcup_{i=1}^{m} \mathbb{B}_{\overline{T\left(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}\right)}}(y_i, \varepsilon).$$

□

Veamos ahora algunos resultados sobre la composición de operadores compactos.

Proposición 21.1.2 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$, $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ y $(\mathbf{G}, \|\cdot\|_{\mathbf{G}})$ son e.v.n.

- Si $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ y $S \in \mathscr{K}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$, entonces $S \circ T \in \mathscr{K}(\mathbf{E}, \mathbf{G})$.
- Si $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ y $S \in \mathscr{L}C(\mathbf{F}, \mathbf{G})$, entonces $S \circ T \in \mathscr{K}(\mathbf{E}, \mathbf{G})$.

Demostración.

- Dado que $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, existe $r > 0$ tal que $T\left(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}\right) \subseteq \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{F}}(0, r)}$. Esto implica que

$$S \circ T\left(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}\right) = S(T\left(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}\right)) \subseteq rS(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{F}}}) \subseteq r\overline{S(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{F}}})}.$$

  Si $S \in \mathscr{K}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ entonces $\overline{rS(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{F}}})}$ es compacto, y por lo tanto $\overline{S \circ T\left(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}\right)}$ también lo es. Por lo tanto $S \circ T$ es un operador compacto.
- Por otro lado, notemos que

$$S \circ T\left(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}\right) = S(T\left(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}\right)) \subseteq S(\overline{T\left(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}\right)}).$$

  Si $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, entonces $\overline{T\left(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}\right)}$ es compacto, y luego $S(\overline{T\left(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}\right)})$ también es compacto, pues $S \in \mathscr{L}C(\mathbf{F}, \mathbf{G})$. A posteriori, $\overline{S \circ T\left(\mathbb{B}_{\mathbf{E}}\right)}$ también es un conjunto compacto, y por lo tanto, $S \circ T \in \mathscr{K}(\mathbf{E}, \mathbf{G})$.

□

21.2 Operadores de rango finito

Definición 21.2.1 Diremos que un operador $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$ es **de rango finito** si $\mathrm{im}(T)$ es un s.e.v. de dimensión finita de $\mathbf{F}$.

Todo operador $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$ de rango finito es también compacto.

■ **Ejemplo 21.2.1** Si $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert y $M \subseteq \mathbf{E}$ es un s.e.v. de dimensión finita, entonces $P_M \colon \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ es un operado de rango finito, donde P_M denota la proyección sobre M, es decir, el operador caracterizado por ser única solución de

$$\langle x - P_M(x), z - P_M(x)\rangle = 0, \qquad \forall x \in \mathbf{E},\ \forall z \in M.$$

■

Lema 21.1 Si $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert y $M \subseteq \mathbf{E}$ es un s.e.v. cerrado, entonces $P_M \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$.

Demostración. Dado que M es un conjunto cerrado, convexo y no vacío, P_M es Lipschitz continua. Además, la proyección sobre M está caracterizada por ser única solución de

$$\langle x - P_M(x), z - P_M(x)\rangle = 0, \qquad \forall z \in M. \tag{21.1}$$

Luego, P_M es lineal pues

- Dados $x \in \mathbf{E}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, multiplicando (21.1) por λ y reemplazando λz por z vemos que $\lambda P_M(x)$ es solución de
$$\langle \lambda x - \lambda P_M(x), z - \lambda P_M(x)\rangle = 0, \qquad \forall z \in M.$$
Esto implica que $\lambda P_M(x) = P_M(\lambda x)$ (por unicidad de la proyección).
- Dados $x_1, x_2 \in \mathbf{E}$, evaluando (21.1) en $x = x_1$ y en $z - P_M(x_2)$ en vez de z obtenemos
$$\langle x_1 - P_M(x_1), z - P_M(x_2) - P_M(x_1)\rangle = 0, \qquad \forall z \in M.$$
Similarmente, evaluando (21.1) en $x = x_2$ y en $z - P_M(x_1)$ en vez de z obtenemos
$$\langle x_2 - P_M(x_2), z - P_M(x_1) - P_M(x_2)\rangle = 0, \qquad \forall z \in M.$$
Sumando ambas igualdades llegamos a
$$\langle x_1 + x_2 - (P_M(x_1) + P_M(x_2)), z - (P_M(x_1) + P_M(x_2))\rangle = 0, \qquad \forall z \in M.$$
Esto implica que $P_M(x_1 + x_2) = P_M(x_1) + P_M(x_2)$ (nuevamente, gracias a la unicidad de la proyección).

□

Proposición 21.2.2 Supongamos que $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y que $(\mathbf{F},\|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ es un espacio de Banach. Si $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$ es una sucesión de operadores de rango finito tal que $T_k \to T$ en $(\mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F}),\|\cdot\|_{\mathscr{L}C})$ para algún $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$, entonces $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E},\mathbf{F})$.

Demostración. Basta recordar que todo operador de rango finito es también compacto y usar la Proposición 21.1.1. □

Como veremos a continuación, el converso de la proposición anterior es verdadero si $(\mathbf{F},\|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ es un espacio de Hilbert.

Proposición 21.2.3 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y que $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ es un espacio de Hilbert. Si $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, entonces existe una sucesión $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}C(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ de operadores de rango finito tal que $T_k \to T$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, como $\overline{T(\mathbb{B}_{\mathbf{E}})}$ es compacto en $\mathbf{F}$, existen $y_1, \ldots, y_m \in \mathbf{F}$ tales que

$$\overline{T(\mathbb{B}_{\mathbf{E}})} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(y_i, \tfrac{\varepsilon}{2}).$$

Definamos $M = \langle \{y_1, \ldots, y_m\} \rangle$. Notemos que M es un s.e.v. de dimensión finita de $\mathbf{F}$. Consideremos el operador $T_\varepsilon : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ dado por $T_\varepsilon = P_M \circ T$, donde $P_M : \mathbf{F} \to \mathbf{F}$ es la proyección sobre M. Dado que $P_M \in \mathscr{L}C(\mathbf{F})$, tenemos que $T_\varepsilon \in \mathscr{L}C(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Claramente T_ε es de rango finito, pues $\mathrm{im}(T_\varepsilon) \subseteq M$.

Fijemos $x \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$, luego existe $y_i \in \mathbf{E}$ tal que $T(x) \in \mathbb{B}_{\mathbf{F}}(y_i, \frac{\varepsilon}{2})$, y con esto tenemos

$$\|T_\varepsilon(x) - T(x)\|_{\mathbf{F}} = \|P_M(T(x)) - T(x)\|_{\mathbf{F}} \leq \|P_M(T(x)) - y_i\|_{\mathbf{F}} + \|y_i - T(x)\|_{\mathbf{F}}$$

En consecuencia, dado que P_M es Lipschitz continua de módulo $\kappa = 1$ e $y_i \in M$, tenemos

$$\|T_\varepsilon(x) - T(x)\|_{\mathbf{F}} \leq \|P_M(T(x)) - P_M(y_i)\|_{\mathbf{F}} + \|y_i - T(x)\|_{\mathbf{F}} \leq 2\|y_i - T(x)\|_{\mathbf{F}} < \varepsilon.$$

Dado que $x \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$ es arbitrario, obtenemos que $\|T_\varepsilon - T\|_{\mathscr{L}C} < \varepsilon$ □

21.3 Operadores de Hilbert-Schmidt

Definición 21.3.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert de dimensión infinita y separable. Diremos que un operador $T \in \mathscr{L}C(E)$ es un operador de **Hilbert-Schmidt** si la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|T(e_k)\|_{\mathbf{E}}^2$$

converge, donde $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal completa de $\mathbf{E}$.

La definición no depende de la base ortonormal completa de $\mathbf{E}$:
Si $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{\hat{e}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ son bases ortonormales completas de $\mathbf{E}$ entonces

$$\|T(e_j)\|_{\mathbf{E}}^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle T(e_j), \hat{e}_k\rangle|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle e_j, T^*(\hat{e}_k)\rangle|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle T^*(\hat{e}_k), e_j\rangle|^2, \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Luego, por el Teorema de Fubini tenemos que

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \|T(e_j)\|_{\mathbf{E}}^2 = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} |\langle T^*(\hat{e}_k), e_j\rangle|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} |\langle T^*(\hat{e}_k), e_j\rangle|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \|T^*(\hat{e}_k)\|_{\mathbf{E}}^2.$$

Dado que $\mathbf{E}$ es un espacio de Hilbert, $T^{**} = T$ y por lo tanto, usando lo anterior con T^* en vez de T, tenemos

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \|T^*(e_j)\|_{\mathbf{E}}^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \|T^{**}(\hat{e}_k)\|_{\mathbf{E}}^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \|T(\hat{e}_k)\|_{\mathbf{E}}^2.$$

Proposición 21.3.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert de dimensión infinita y separable. Si $T \in \mathscr{L}C(E)$ es un operador de Hilbert-Schmidt, entonces $T \in \mathscr{K}(E)$.

Demostración. Sea $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal completa de $\mathbf{E}$ y definamos $E_k = \langle\{e_0,\ldots,e_k\}\rangle$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Denotemos por $P_k : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ a la proyección sobre E_k. Luego, $P_k \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$ pues es de rango finito y además

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \langle x, e_j\rangle e_j, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Definamos $T_k = T \circ P_k$. Notemos que, gracias a la Proposición 21.1.2, tenemos que $T_k \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$ pues $P_k \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$. De hecho, T_k es de rango finito pues

$$T_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \langle x, e_j\rangle T(e_j) \in \langle\{T(e_0),\ldots,T(e_k)\}\rangle, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Para concluir basta ver que $T_k \to T$ en $\mathscr{L}C(\mathbf{E})$ y usar la Proposición 21.1.1. Notemos que, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, para cada $x \in \mathbf{E}$ y $k, m \in \mathbb{N}$ fijos con $m > k$ tenemos

$$\|T_m(x) - T_k(x)\|_{\mathbf{E}}^2 \le \left(\sum_{j=k+1}^{m} |\langle x, e_j\rangle| \|T(e_j)\|_{\mathbf{E}}\right)^2 \le \sum_{j=k+1}^{m} |\langle x, e_j\rangle|^2 \sum_{j=k+1}^{m} \|T(e_j)\|_{\mathbf{E}}^2 \le \|x\|_{\mathbf{E}}^2 \sum_{j=k+1}^{m} \|T(e_j)\|_{\mathbf{E}}^2.$$

Además, dado que $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$ y $P_m(x) \to x$ puntualmente en $\mathbf{E}$, también tenemos

$$T(x) = T\left(\lim_{m\to+\infty} P_m(x)\right) = \lim_{m\to+\infty} T(P_m(x)) = \lim_{m\to+\infty} T_m(x), \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

En consecuencia

$$\|T(x) - T_k(x)\|_{\mathbf{E}}^2 \le \|x\|_{\mathbf{E}}^2 \sum_{j=k+1}^{+\infty} \|T(e_j)\|_{\mathbf{E}}^2, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Esto implica que

$$\|T - T_k\|_{\mathscr{L}C}^2 \le \sum_{j=k+1}^{+\infty} \|T(e_j)\|_{\mathbf{E}}^2, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

A posteriori tenemos entonces que $T_k \to T$ en $\mathscr{L}C(\mathbf{E})$ pues T es un operador de Hilbert-Schmidt. $\square$

21.4 Teorema de Schauder

Teorema 21.4.1 — Schauder. Supongamos $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$, con $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ siendo e.v.n. dados. Si $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ entonces $T^* \in \mathscr{K}(\mathbf{F}^*,\mathbf{E}^*)$. Si además $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ es un espacio de Banach, entonces

$$T \in \mathscr{K}(\mathbf{E},\mathbf{F}) \quad \Longleftrightarrow \quad T^* \in \mathscr{K}(\mathbf{F}^*,\mathbf{E}^*)$$

Demostración. Dado que $T^* \in \mathscr{L}C(\mathbf{F}^*,\mathbf{E}^*)$ tenemos que probar que $\overline{T^*(\mathbb{B}_{\mathbf{F}^*})}$ es compacto (fuerte) en $\mathbf{E}^*$. Bastará probar que $\{T^*(\ell_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}^*$ tiene una subsucesión convergente, cualquiera sea $\{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{F}^*}}$. Además, dado que $\mathbf{E}^*$ es un espacio de Banach, basta ver que $\{T^*(\ell_{k_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy para alguna subsucesión. Primero notemos que

$$\|T^*(\ell_k) - T^*(\ell_m)\|_{\mathbf{E}^*} = \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}}\le 1} |\langle T^*(\ell_k - \ell_m), x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}| = \sup_{x\in\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}} |\langle \ell_k - \ell_m, T(x)\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}|, \qquad \forall k, m \in \mathbb{N}.$$

Sea $\mathbf{Y} = \overline{T(\overline{\mathbb{B}_\mathbf{E}})}$, luego sigue que

$$\|T^*(\ell_k) - T^*(\ell_m)\|_{\mathbf{E}^*} = \sup_{y \in T(\overline{\mathbb{B}_\mathbf{E}})} |\langle \ell_k - \ell_m, y\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}| = \sup_{y \in \mathbf{Y}} |\langle \ell_k - \ell_m, y\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}|, \qquad \forall k,m \in \mathbb{N}.$$

Consideremos para cada $k \in \mathbb{N}$ la función $\varphi_k : \mathbf{Y} \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi_k(y) = \langle \ell_k, y\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}$, para todo $y \in \mathbf{Y}$. Luego, podemos reescribir la igualdad anterior como

$$\|T^*(\ell_k) - T^*(\ell_m)\|_{\mathbf{E}^*} = \|\varphi_k - \varphi_m\|_\infty, \qquad \forall k,m \in \mathbb{N}.$$

Entonces, para concluir basta probar que $\{\varphi_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(\mathscr{C}(\mathbf{Y}), \|\cdot\|_\infty)$ para alguna subsucesión. Notemos que $\mathbf{Y} = \overline{T(\overline{\mathbb{B}_\mathbf{E}})}$ es un compacto de $\mathbf{F}$, pues $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E},\mathbf{F})$. Por lo tanto, $(\mathbf{Y}, d_\mathbf{F})$ es un e.m. compacto.

Para obtener el resultado buscado usaremos entonces el Teorema de Arzelá-Ascoli con la sucesión $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

- Notemos que $\varphi_k(y) = \langle \ell_k, y\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}$ es continua en $\mathbf{Y}$ (pues es continua en $\mathbf{F}$), luego $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}(\mathbf{Y})$.
- Dado $y \in \mathbf{Y}$ fijo, tenemos que $\{\varphi_k(y) \mid k \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado de $\mathbb{R}$ pues

$$|\varphi_k(y)| = |\langle \ell_k, y\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}}| \leq \|\ell_k\|_{\mathbf{F}^*}\|y\|_\mathbf{F} \leq \|y\|_\mathbf{F}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

- Además, $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión equi-continua, ya que tenemos

$$|\varphi_k(y_1) - \varphi_k(y_2)| \leq \|y_1 - y_2\|_\mathbf{F}, \qquad \forall y_1, y_2 \in \mathbf{Y}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Luego, por el Teorema de Arzelá-Ascoli, existe una subsucesión $\{\varphi_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente. En particular, $\{\varphi_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathscr{C}(\mathbf{Y})$, y en consecuencia $\{T^*(\ell_{k_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbf{E}^*$. Dado que $(\mathbf{E}^*, \|\cdot\|_{\mathbf{E}^*})$ es un espacio de Banach, $\{T^*(\ell_{k_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge y por lo tanto $T^* \in \mathscr{K}(\mathbf{F}^*, \mathbf{E}^*)$.

Supongamos ahora que $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_\mathbf{F})$ es un espacio de Banach y que$T^* \in \mathscr{K}(\mathbf{F}^*, \mathbf{E}^*)$, luego usando la implicancia ya demostrada tenemos

$$T^{**} = (T^*)^* \in \mathscr{K}(\mathbf{E}^{**}, \mathbf{F}^{**}).$$

Notemos que $J_\mathbf{F} \circ T = T^{**} \circ J_\mathbf{E}$, donde $J_\mathbf{E}$ y $J_\mathbf{F}$ denotan las inyecciones canónicas de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$, respectivamente. En efecto, dados $x \in \mathbf{E}$ y sea $\ell \in \mathbf{F}^*$ tenemos

$$\langle T^{**}(J_\mathbf{E}(x)), \ell\rangle_{\mathbf{F}^{**},\mathbf{F}^*} = \langle J_\mathbf{E}(x), T^*(\ell)\rangle_{\mathbf{E}^{**},\mathbf{E}^*} = \langle T^*(\ell), x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle \ell, T(x)\rangle_{\mathbf{F}^*,\mathbf{F}} = \langle J_\mathbf{F}(T(x)), \ell\rangle_{\mathbf{F}^{**},\mathbf{F}^*}.$$

En consecuencia, tenemos

$$J_\mathbf{F}(T(\overline{\mathbb{B}_\mathbf{E}})) = T^{**}(J_\mathbf{E}(\overline{\mathbb{B}_\mathbf{E}})) \subseteq T^{**}(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}}) \subseteq \overline{T^{**}(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}^{**}}})}.$$

Este último conjunto es compacto en $\mathbf{F}^{**}$, lo que implica que $\overline{J_\mathbf{F}(T(\overline{\mathbb{B}_\mathbf{E}}))}$ también es compacto en $\mathbf{F}^{**}$.

Veamos finalmente que $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E},\mathbf{F})$. Sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{B}_\mathbf{E}}$, luego $\{J_\mathbf{F}(T(x_k))\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{J_\mathbf{F}(T(\overline{\mathbb{B}_\mathbf{E}}))}$ tiene una subsucesión convergente.

Si $\{J_\mathbf{F}(T(x_{k_j}))\}_{j\in\mathbb{N}}$ denota la subsucesión convergente, notemos que

$$\|T(x_{k_j}) - T(x_{k_i})\|_\mathbf{F} = \|J_\mathbf{F}(T(x_{k_j})) - J_\mathbf{F}(T(x_{k_i}))\|_{\mathbf{F}^{**}}, \qquad \forall i.j \in \mathbb{N}.$$

Esto implica que $\{T(x_{k_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, y dado que $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_\mathbf{F})$ es un espacio de Banach, concluimos. $\square$

21.5 Alternativa de Fredholm

Proposición 21.5.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$. Luego, $\ker(I-T)$ es de dimensión finita.

Demostración. Sea $\mathbf{E}_0 = \ker(I-T) = \{x \in \mathbf{E} \mid x - T(x) = 0\}$, este es un s.e.v. cerrado de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$. Además, $x \in \mathbf{E}_0$ si y solo si $x \in \ker(I-T)$, lo cual equivale a que $x = T(x)$. Por lo tanto, tenemos

$$x \in T(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}_0}}) \subseteq T(\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}) \subseteq \overline{T(\mathbb{B}_{\mathbf{E}})}, \qquad \forall x \in \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}_0}}.$$

En otras palabras,

$$\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}_0}} \subseteq \overline{T(\mathbb{B}_{\mathbf{E}})}.$$

Dado que $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$, concluimos que $\overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}_0}}$ es compacta en $(\mathbf{E}_0, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$. Luego, por el Teorema de Riesz, concluimos que $\mathbf{E}_0$ es de dimensión finita. $\square$

Proposición 21.5.2 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$. Luego, $\mathrm{im}(I-T)$ es cerrado.

Demostración. Tomemos una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ y $f \in \mathbf{E}$ tal que $x_k - T(x_k) \to f$. Dado que $x_k - T(x_k) \in \mathrm{im}(I-T)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tenemos que probar que $f \in \mathrm{im}(I-T)$. Por la Proposición 21.5.1, sabemos que $\ker(I-T)$ es un s.e.v. de dimensión finita. Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotemos por y_k a la proyección de x_k sobre $\ker(I-T)$, es decir, $y_k \in \ker(I-T)$ tal que

$$\|x_k - y_k\|_{\mathbf{E}} = \mathrm{dist}(x_k, \ker(I-T)), \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Definamos $f_k := x_k - T(x_k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y notemos que

$$f_k = x_k - T(x_k) = x_k - T(x_k) - 0 = x_k - T(x_k) - (y_k - T(y_k)) = (x_k - y_k) - T(x_k - y_k), \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Notemos que si $\{T(x_{k_j} - y_{k_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergiese a algún $\ell \in \mathbf{E}$, para alguna subsucesión, tendríamos que

$$x_{k_j} - y_{k_j} = f_{k_j} + T(x_{k_j} - y_{k_j}) \to f + \ell.$$

Así, a posteriori tendríamos

$$f = f + \ell - T(f+\ell) = (I-T)(f+\ell) \in \mathrm{im}(I-T).$$

Para concluir que $\mathrm{im}(I-T)$ es un s.e.v. cerrado de $\mathbf{E}$, basta entonces ver que $\{x_k - y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada, pues, dado que $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$, esto implicaría que $\{T(x_k - y_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente. Por contradicción, supongamos que existe una subsucesión que no es acotada, es decir, tal que $\|x_{k_j} - y_{k_j}\|_{\mathbf{E}} \to +\infty$. Definamos

$$z_k = \frac{x_k - y_k}{\|x_k - y_k\|_{\mathbf{E}}}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Notemos que $z_{k_j} - T(z_{k_j}) \to 0$ pues

$$z_{k_j} - T(z_{k_j}) = \frac{(x_{k_j} - y_{k_j}) - T(x_{k_j} - y_{k_j})}{\|x_{k_j} - y_{k_j}\|_{\mathbf{E}}} = \frac{x_{k_j} - T(x_{k_j})}{\|x_{k_j} - y_{k_j}\|_{\mathbf{E}}}, \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Dado que $\|z_{k_j}\|_{\mathbf{E}} = 1$ y $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$, tenemos que $\{T(z_{k_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente. Sin pérdida de generalidad entonces podemos asumir que $\{T(z_{k_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a algún $z \in \mathbf{E}$. Dado que $z_{k_j} - T(z_{k_j}) \to 0$ y $T(z_{k_j}) \to z$ entonces también tenemos que $z_{k_j} \to z$. Luego, $z - T(z) = 0$, es decir, $z \in \ker(I-T)$ y en particular $\operatorname{dist}(z_{k_j}, \ker(I-T)) \to 0$.

Por otro lado,

$$\operatorname{dist}(z_k, \ker(I-T)) = \inf_{y\in\ker(I-T)} \left\| \frac{x_k - y_k}{\|x_k - y_k\|_{\mathbf{E}}} - y \right\|_{\mathbf{E}} = \inf_{y\in\ker(I-T)} \frac{\|x_k - (y_k + y\|x_k - y_k\|_{\mathbf{E}})\|_{\mathbf{E}}}{\|x_k - y_k\|_{\mathbf{E}}}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dado que $y_k + y\|x_k - y_k\|_{\mathbf{E}} \in \ker(I-T)$ si y sólo si $y \in \ker(I-T)$, obtenemos una contradicción pues

$$\operatorname{dist}(z_k, \ker(I-T)) = \frac{\operatorname{dist}(x_k, \ker(I-T))}{\|x_k - y_k\|_{\mathbf{E}}} = 1.$$

□

Corolario 21.5.3 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$. Luego,

$$\operatorname{im}(I-T) = \ker(I-T^*)^{\perp}.$$

Demostración. Recordemos que por la Proposición 3.2.4 tenemos que

$$\overline{\operatorname{im}(I-T)} = (\operatorname{im}(I-T)^{\perp})^{\perp}.$$

Además, por la Proposición 5.1.4 tenemos que

$$(\operatorname{im}(I-T)^{\perp})^{\perp} = \ker((I-T)^*)^{\perp}.$$

Por otra parte, no es difícil ver que $(I-T)^* = I - T^*$ pues

$$(I-T)^*(\ell) = \ell \circ (I-T) = \ell - \ell \circ T = \ell - T^*(\ell) = (I-T^*)(\ell), \qquad \forall \ell \in \mathbf{E}^*.$$

En consecuencia, gracias a la Proposición 21.5.2, tenemos

$$\operatorname{im}(I-T) = \overline{\operatorname{im}(I-T)} = (\operatorname{im}(I-T)^{\perp})^{\perp} = \ker((I-T)^*)^{\perp} = \ker(I-T^*)^{\perp}.$$

□

Proposición 21.5.4 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$. Luego,

$$\ker(I-T) = \{0\} \iff \operatorname{im}(I-T) = \mathbf{E}.$$

Demostración. ($\Longrightarrow$) Supongamos por contradicción que $\operatorname{im}(I-T) \subsetneq \mathbf{E}$.

Definamos $\mathbf{E}_0 = \operatorname{im}(I-T) \subsetneq \mathbf{E}$, por la Proposición 21.5.2, tenemos $\mathbf{E}_0$ es un s.e.v. cerrado en $\mathbf{E}$.

Luego, $T(\mathbf{E}_0) \subseteq \mathbf{E}_0$ pues $\mathbf{E}_0 \subsetneq \mathbf{E}$ y también $T|_{\mathbf{E}_0} \in \mathscr{K}(\mathbf{E}_0)$. Usando este razonamiento podemos construir una familia de s.e.v. de $\mathbf{E}$ via la fórmula

$$\mathbf{E}_{k+1} = (I-T)(\mathbf{E}_k), \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Por inducción para todo $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}_{k+1}$ es cerrado pues $(\mathbf{E}_k, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y $T|_{\mathbf{E}_k} \in \mathscr{K}(\mathbf{E}_k)$.

Usando el mismo argumento que antes tenemos que $T(\mathbf{E}_k) \subseteq \mathbf{E}_k$ y $\mathbf{E}_{k+1} = \mathbf{E}_k - T(\mathbf{E}_k) \subseteq \mathbf{E}_k$. Notemos que si $\mathbf{E}_{k+1} = \mathbf{E}_k$ para algún $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, entonces para todo $x \in \mathbf{E}$ existiría $y \in \mathbf{E}$ tal que

$$(I-T)^{k+1}(y) = (I-T)^k(x).$$

Dado que por hipótesis $I-T$ es inyectivo, entonces $(I-T)^k(y) = (I-T)^{k-1}(x)$. Usando este procedimiento $k-1$ veces tendríamos que $(I-T)(y) = x$, es decir, $x \in \operatorname{im}(I-T)$. Dado que esto es válido para todo $x \in \mathbf{E}$, tendríamos que $\operatorname{im}(I-T) = \mathbf{E}$. Por lo tanto

$$\mathbf{E}_{k+1} \subsetneq \mathbf{E}_k, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Usando el Lema de Riesz con $M = \mathbf{E}_{k+1}$ y $\mathbf{E} = \mathbf{E}_k$, que existe $x_k \in \mathbf{E}_k$ tal que

$$\|x_k\|_{\mathbf{E}} = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{dist}(x_k, \mathbf{E}_{k+1}) \geq \frac{1}{2}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Notemos que dados $k, m \in \mathbb{N}$, con $m \geq 1$ tenemos

$$T(x_k) - T(x_{k+m}) = -\underbrace{(x_k - T(x_k))}_{\in (I-T)(\mathbf{E}_k) = \mathbf{E}_{k+1}} + \underbrace{(x_{k+m} - T(x_{k+m}))}_{\in (I-T)(\mathbf{E}_{k+m}) = \mathbf{E}_{k+m+1} \subseteq \mathbf{E}_{k+1}} + x_k - \underbrace{x_{k+m}}_{\in \mathbf{E}_{k+m} \subseteq \mathbf{E}_{k+1}}.$$

Sigue que,

$$T(x_k) - T(x_{k+m}) \in \mathbf{E}_{k+1} + x_k.$$

En consecuencia, existe algún $y_{k+1} \in \mathbf{E}_{k+1}$ tal que

$$\|T(x_k) - T(x_{k+m})\|_{\mathbf{E}} = \|y_{k+1} + x_k\|_{\mathbf{E}} \geq \operatorname{dist}(x_k, \mathbf{E}_{k+1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto $\{T(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ no puede tener subsucesiones convergentes.

Ahora bien, dado que $\|x_k\|_{\mathbf{E}} = 1$ y $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$, obtenemos una contradicción. Luego, necesariamente $\operatorname{im}(I-T) = \mathbf{E}$.

($\Longleftarrow$) Supongamos ahora que $\operatorname{im}(I-T) = \mathbf{E}$, veamos que $\ker(I-T) = \{0\}$. Por la Corolario 21.5.3, sabemos que $\ker(I-T^*) \subseteq (\ker(I-T^*)^{\perp})^{\perp} = \operatorname{im}(I-T)^{\perp} = \{0\}$. También por el Teorema de Schauder sabemos que $T^* \in \mathscr{K}(\mathbf{E}^*)$. Usando la implicancia ya probada con T^* en vez de T, tenemos que $\operatorname{im}(I-T^*) = \mathbf{E}^*$. Luego, por la Proposición 5.1.4 tenemos que

$$\ker(I-T) = \operatorname{im}((I-T)^*)^{\perp} = \operatorname{im}(I-T^*)^{\perp} = (\mathbf{E}^*)^{\perp} = \{0\}.$$

Por lo tanto $\ker(I-T) = \{0\}$. □

Proposición 21.5.5 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach y $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$. Luego,

$$\dim(\ker(I-T)) = \dim(\ker(I-T^*)).$$

Demostración. Notemos primero que $\ker(I-T))$ es un s.e.v. de $\mathbf{E}$ de dimensión finita (Proposición 21.5.1). Por lo tanto, $\ker(I-T)$ admite un complemento topológico (Proposición 20.0.1). En particular, si $P_{\ker}$ denota la proyección sobre $\ker(I-T)$, tenemos que $P_{\ker} \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$ pues $\mathbf{E}$ es un espacio de Banach (Lema 20.1). Más aún, dado que $P_{\ker}$ es un operador de rango finito, también tenemos $P_{\ker} \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$.

Por otro lado, por el Teorema de Schauder, tenemos que $T^* \in \mathscr{K}(E)$. Entonces, gracias a la Proposición 21.5.1 también tenemos que $\ker(I-T^*)$ es s.e.v. de dimensión finita. Recordemos que, gracias al Corolario 21.5.3 tenemos $\mathrm{im}(I-T) = \ker(I-T^*)^{\perp}$. En consecuencia, por el Proposición 20.0.2, $\mathrm{im}(I-T)$ admite un complemento topológico de dimensión finita. Más aún, si F denota al complemento topológico de $\mathrm{im}(I-T)$, entonces $\dim(F) = \dim(\ker(I-T^*))$.

Veamos ahora que

$$\dim(\ker(I-T)) \geq \dim(\ker(I-T^*)).$$

Supongamos por contradicción que

$$\dim(\ker(I-T)) < \dim(\ker(I-T^*)) = \dim(F).$$

En particular, existe un operador lineal continuo $\Lambda : \ker(I-T) \to F$ inyectivo pero no sobreyectivo.

Notemos que el operador $S := T + \Lambda \circ P_{\ker}$ es compacto, pues:

- $\Lambda \circ P_{\ker} \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$ ya que $P_{\ker} \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$ (Proposición 2 - Clase 23).
- $\mathscr{K}(\mathbf{E})$ es un s.e.v. de $\mathscr{L}C(\mathbf{E})$ (Proposición 1 - Clase 23).

Afirmamos que el operador $I-S$ es inyectivo. En efecto, si $x \in \mathbf{E}$ es tal que $x - S(x) = 0$, necesariamente $x - T(x) = \Lambda(P_{\ker}(x))$. Sin embargo, dado que $\mathrm{im}(I-T) \cap F = \{0\}$, $x - T(x) \in \mathrm{im}(I-T)$ y $\Lambda(P_{\ker}(x)) \in F$, tenemos que

$$x - T(x) = \Lambda(P_{\ker}(x)) = 0.$$

En particular, $x \in \ker(I-T)$ y $P_{\ker}(x) = 0$, pues Λ es inyectiva. Sigue que $x = P_{\ker}(x) = 0$.

Por otro lado, dado que $\ker(I-S) = \{0\}$ y dado que $S \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$, por la Proposición 21.5.4, tenemos que $\mathrm{im}(I-S) = \mathbf{E}$. Esto implica en particular que para cualquier $f \in F \subseteq \mathbf{E}$, existe $x \in \mathbf{E}$ tal que

$$x - T(x) - \Lambda(P(x)) = x - S(x) = f.$$

Nuevamente, dado $\mathrm{im}(I-T) \cap F = \{0\}$, $x - T(x) \in \mathrm{im}(I-T)$ y $f + \Lambda(P_{\ker}(x)) \in F$, tenemos que

$$f + \Lambda(P_{\ker}(x)) = 0.$$

Esto a su vez implica que $f \in \mathrm{im}(\Lambda)$, y por lo tanto Λ sería sobreyectivo.

Para terminar basta notar que, usando el argumento anterior con T^* en vez de T, tenemos que

$$\dim(\ker(I-T)) \geq \dim(\ker(I-T^*)) \geq \dim(\ker(I-T^{**})).$$

Recordemos que para todo $A \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$ tenemos que $J_{\mathbf{E}} \circ A = A^{**} \circ J_{\mathbf{E}}$, es decir, el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "J_{\mathbf{E}}"'] & \mathbf{E} \arrow[d, "J_{\mathbf{E}}"] \\
\mathbf{E}^{**} \arrow[r, "A^{**}"'] & \mathbf{E}^{**}
\end{tikzcd}$$

En particular, si $A(x) = 0$, entonces $A^{**} \circ J_{\mathbf{E}}(x) = J_{\mathbf{E}}(A(x)) = 0$, y por lo tanto,

$$J_{\mathbf{E}}(\ker(A)) \subseteq \ker(A^{**}), \qquad \forall A \in \mathscr{L}C(\mathbf{E}).$$

Tomando $A = I - T$, tenemos entonces que

$$J_{\mathbf{E}}(\ker(I-T)) \subseteq \ker(I-T^{**}).$$

En consecuencia

$$\dim(\ker(I-T)) \leq \dim(\ker(I-T^{**})),$$

y por lo tanto

$$\dim(\ker(I-T)) = \dim(\ker(I-T^{*})).$$

□

Los resultados que hemos visto hasta ahora los podemos resumir en el siguiente teorema.

Teorema 21.5.6 — Alternativa de Fredholm. Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. dado. Si $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$ y $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces

1. $\ker(\lambda I - T)$ es de dimensión finita.
2. $\operatorname{im}(\lambda I - T)$ es cerrado con $\operatorname{im}(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T^*)^{\perp}$.
3. $\ker(\lambda I - T) = \{0\}$ si y sólo si $\operatorname{im}(\lambda I - T) = \mathbf{E}$.

Además, si $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach entonces también tenemos

4. $\dim(\ker(\lambda I - T)) = \dim(\ker(\lambda I - T^*))$.

Demostración. Notemos que

$$\ker\left(I - \frac{1}{\lambda}T\right) = \ker(\lambda I - T)$$

y que $\frac{1}{\lambda}T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$ para todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ donde

$$\left(\frac{1}{\lambda}T\right)^{*} = \frac{1}{\lambda}T^{*}.$$

Luego, (1), (2), (3) y (4) son consecuencia de Proposición 21.5.1, Proposición 21.5.2, Proposición 21.5.4 y Proposición 21.5.5, respectivamente. □

El Teorema de Alternativa de Fredholm dice que, dados $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $f \in \mathbf{E}$, la ecuación

$$\lambda x - T(x) = f$$

tiene solución si y solo si $f \in \ker(\lambda I - T^*)^{\perp}$.
Por otro lado, si $\lambda I - T$ es inyectiva, entonces la ecuación tiene solución y ésta será única. En caso contrario, $T(x) = \lambda x$ tiene $d = \dim(\ker(\lambda I - T))$ soluciones linealmente independientes.

22. Espectro y valores propios

Ahora presentaremos las nociones de espectro y valores propios de un operador acotado definido sobre un e.v.n. y también presentaremos algunas de sus principales características.

22.1 Definiciones básicas

Definición 22.1.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y $T \in \mathscr{L}C(E)$ es un operador dado. Definimos:

- el **conjunto resolvente** de T como $\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid (\lambda I - T) \text{ es biyectiva en } \mathbf{E}\}$.
- el **espectro** de T como $\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$.
- los **valores propios** de T como $\mathscr{V}P(T) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \ker(\lambda I - T) \neq \{0\}\}$.

Si $\lambda \in \mathscr{V}P(T)$, al conjunto $\mathbf{E}_\lambda := \ker(\lambda I - T)$ lo llamaremos el **espacio propio** asociado al valor propio λ. Si $x \in \mathbf{E}_\lambda \setminus \{0\}$, diremos que x es un **vector propio** de T asociado a λ.

$\mathscr{V}P(T) \subseteq \sigma(T)$ y la inclusión puede ser estricta en dimensión infinita.
Por ejemplo, en $\ell^p(\mathbb{R})$ consideremos el operador shift a la derecha

$$S_r(x) = (0, x_0, x_1, x_2, \ldots), \qquad \forall x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{R}).$$

Notemos que S_r no es biyectivo, luego $0I - S_r$ tampoco lo es. Entonces $0 \notin \rho(S_r)$, ie. $0 \in \sigma(S_r)$. Sin embargo, S_r es inyectivo, luego $\ker(0I - S_r) = \{0\}$, es decir $0 \notin \mathscr{V}P(T)$. Por lo tanto $0 \in \sigma(S_r) \setminus \mathscr{V}P(S_r)$.

Proposición 22.1.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach y $T \in \mathscr{L}C(E)$ es un operador. Luego $\sigma(T)$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ con

$$|\lambda| \leq \|T\|_{\mathscr{L}C}, \qquad \forall \lambda \in \sigma(T).$$

Demostración. Probaremos la contrarecíproca. Tomemos $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\|T\|_{\mathscr{L}C} < |\lambda|$. Debemos probar que $(T - \lambda I)$ es invertible (ie. $\lambda \in \rho(T)$). Dicho de otra forma, dado $f \in \mathbf{E}$ (arbitrario) tenemos que probar que existe un único $x \in \mathbf{E}$ solución de

$$T(x) - \lambda x = f \tag{22.1}$$

Notemos que (22.1) se puede re-escribir como

$$A(x) := \frac{T(x) - f}{\lambda} = x$$

Notemos también que, dado que $\|T\|_{\mathscr{L}C} < |\lambda|$, el operador $A : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ es contractante:

$$\|A(x) - A(y)\|_{\mathbf{E}} = \frac{1}{|\lambda|}\|T(x) - T(y)\|_{\mathbf{E}} \leq \frac{\|T\|_{\mathscr{L}C}}{|\lambda|}\|x - y\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall x, y \in \mathbf{E}.$$

Luego, gracias al Teorema de Punto Fijo de Banach, A tiene un único punto fijo. En consecuencia, (22.1) tiene una única solución cualquiera sea $f \in \mathbf{E}$, es decir, $\lambda \in \rho(T)$. Esto implica que si $\lambda \in \sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$, entonces necesariamente $|\lambda| \leq \|T\|_{\mathscr{L}C}$. □

■ **Ejemplo 22.1.2** Dado $p \in [1, +\infty)$, consideremos nuevamente en $\ell^p(\mathbb{R})$ el operador shift a la derecha

$$S_r(x) = (0, x_0, x_1, x_2, \ldots), \qquad \forall x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{R}).$$

Recordemos que $\|S_r\|_{\mathscr{L}C} = 1$, por ende $\sigma(S_r) \subseteq [-1, 1]$. De hecho se tiene que $\sigma(S_r) = [-1, 1]$ (en particular $\sigma(S_r)$ es compacto). En efecto, supongamos que existe $\lambda \in \rho(S_r) = \mathbb{R} \setminus \sigma(S_r)$ con $|\lambda| \leq 1$. Sabemos que $\lambda \neq 0$ pues $0 \in \sigma(S_r)$.

Sigue que

$$(\lambda I - S_r)(\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}) = \{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \qquad \text{donde } z_k = \begin{cases} \lambda x_0 & \text{si } k = 0 \\ \lambda x_k - x_{k-1} & \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

Por definición, si $\lambda \in \rho(S_r)$ entonces $(\lambda I - S_r)$ sería sobreyectivo. Luego para $z = (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \in \ell^p(\mathbb{R})$ existiría una sucesión $x \in \ell^p(\mathbb{R})$ tal que $(\lambda I - S_r)(x) = z$.

$$\begin{array}{c} \lambda x_0 = 1 \\ \lambda x_k - x_{k-1} = 0 \end{array} \iff \begin{array}{c} x_0 = \frac{1}{\lambda} \\ \\ x_k = \frac{x_{k-1}}{\lambda} \end{array} \iff x_k = \frac{1}{\lambda^{k+1}}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

- Si $|\lambda| = 1$ entonces $x = \lambda(1, \ldots, 1, \ldots) \notin \ell^p(\mathbb{R})$.
- Si $|\lambda| < 1$ entonces $|x_k| \to +\infty$ y esto implica que $x \notin \ell^p(\mathbb{R})$.

Por lo tanto $\lambda \notin \rho(T)$ y entonces $\lambda \in \sigma(T)$. Por tanto $\sigma(T) = [-1, 1]$. ■

Proposición 22.1.3 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach y $T \in \mathscr{L}C(E)$ es un operador dado. Luego $\sigma(T)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.

Demostración. Gracias a la Proposición 22.1.1, sabemos que $\sigma(T)$ es acotado en $\mathbb{R}$, luego basta ver que $\sigma(T)$ es cerrado. Veamos que $\rho(T) \setminus \mathbb{R} = \sigma(T)$ es abierto en $\mathbb{R}$.

Tomemos $\lambda_0 \in \rho(T)$ y $f \in \mathbf{E}$ fijos. Debemos demostrar existe $\varepsilon > 0$ tal que la ecuación

$$T(x) - \lambda x = f \tag{22.2}$$

tiene una única solución para todo $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$. Tomemos $\lambda \in \mathbb{R}$ y notemos que la ecuación (22.2) se puede re-escribir como

$$T(x) - \lambda_0 x = f + (\lambda - \lambda_0)x.$$

Dado que $T - \lambda_0 I$ es invertible (pues $\lambda_0 \in \rho(T)$), (22.2) es equivalente a la ecuación:

$$x = (T - \lambda_0 I)^{-1}(f + (\lambda - \lambda_0)x) =: A_\lambda(x).$$

Luego, para concluir bastará probar que el operador $A_\lambda : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ tiene un único punto fijo. Recordemos que por el Teorema de la Aplicación Abierta (Corolario 4.1.1), $(T - \lambda_0 I)^{-1} \in \mathscr{L}C(E)$. Observemos también que para todo $x, y \in \mathbf{E}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|A_\lambda(x) - A_\lambda(y)\|_{\mathbf{E}} &= \|(T - \lambda_0 I)^{-1}(f + (\lambda - \lambda_0)x) - (T - \lambda_0 I)^{-1}(f + (\lambda - \lambda_0)y)\|_{\mathbf{E}} \\
&= \|(T - \lambda_0 I)^{-1}(\lambda - \lambda_0)(x - y)\|_{\mathbf{E}} \\
&\leq \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\|_{\mathscr{L}C} |\lambda - \lambda_0| \|x - y\|_{\mathbf{E}}
\end{aligned}$$

Luego, si $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ con

$$\varepsilon = \frac{1}{2\|(T - \lambda_0 I)^{-1}\|_{\mathscr{L}C}}$$

obtenemos que $\|A_\lambda\|_{\mathscr{L}C} \leq \frac{1}{2}$ y por lo tanto A_λ es contractante. Gracias al Teorema de Punto Fijo de Banach, A_λ tiene un único punto fijo. En consecuencia, dado que $\varepsilon > 0$ es independiente de λ, tenemos que $\rho(T)$ es abierto en $\mathbb{R}$. Por lo tanto $\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$ es cerrado en $\mathbb{R}$, y a posteriori, $\sigma(T)$ es compacto en $\mathbb{R}$. □

22.2 Espectro de un operador compacto

Veamos ahora algunas propiedades del espectro de un operador compacto.

Proposición 22.2.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. de dimensión infinita. Si $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$, entonces $0 \in \sigma(T)$.

Demostración. Supongamos $0 \notin \sigma(T)$, luego $0 \in \rho(T)$ y por lo tanto $T - 0\lambda = T$ es invertible. Por otro lado $T \circ T^{-1} = I$ y entonces $I \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$ gracias a la Proposición 21.1.2. Esto implica que $\overline{I(\mathbb{B}_{\mathbf{E}})} = \overline{\mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$ es compacto en $\mathbf{E}$. Luego, gracias al Teorema de Riesz, $\mathbf{E}$ es necesariamente un e.v.n. de dimensión finita. Dado que estamos asumiendo que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ e.v.n. es de dimensión infinita, obtenemos una contradicción. Por lo tanto $0 \in \sigma(T)$. □

Proposición 22.2.2 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n.. Si $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$ entonces

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \mathscr{V}P(T) \setminus \{0\}.$$

Demostración. Recordemos que $\mathscr{V}P(T) \subseteq \sigma(T)$ (por definición). Para concluir, basta ver que $\sigma(T) \setminus \{0\} \subseteq \mathscr{V}P(T)$. Sea $\lambda \in \sigma(T)$ con $\lambda \neq 0$. Supongamos que $\lambda \notin \mathscr{V}P(T)$, es decir,

$$\ker(\lambda I - T) = \{0\}.$$

Por Teorema de la alternativa de Fredholm, tenemos que $\operatorname{im}(\lambda I - T) = \mathbf{E}$, y luego $T - \lambda I$ es sobreyectivo. Dado que $T - \lambda I$ es inyectivo (pues $\lambda \notin \mathscr{V}P(T)$), tenemos que $T - \lambda I$ es biyectiva y por lo tanto $\lambda \in \rho(T)$. Esto es absurdo, pues $\lambda \in \sigma(T)$.

Por lo tanto $\lambda \in \mathscr{V}P(T)$, y luego $\sigma(T) \setminus \{0\} \subseteq \mathscr{V}P(T)$. □

Proposición 22.2.3 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$ es un operador dado. Si $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$ y $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \sigma(T) \setminus \{0\}$ es una sucesión convergente tal que $\lambda_i \neq \lambda_j$ para todo $i \neq j$, entonces $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_k = 0$.

Demostración. Dado que $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$, por la Proposición 22.2.2 tenemos que $\sigma(T) \setminus \{0\} = \mathscr{V}P(T) \setminus \{0\}$. Sigue que $\lambda_k \in \mathscr{V}P(T)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y por lo tanto existen vectores propios $e_k \in \mathbf{E} \setminus \{0\}$ tales que

$$T(e_k) = \lambda_k e_k, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Notemos que para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $\{e_0, \ldots, e_k\}$ es linealmente independiente.

En efecto, razonemos por inducción. El caso base es directo pues $\{e_0\}$ es linealmente independiente. Asumamos ahora que $\{e_0, \ldots, e_k\}$ es linealmente independiente. Veamos que $\{e_0, \ldots, e_{k+1}\}$ también lo es. Supongamos por contradicción que no, es decir, existen $\alpha_0, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, tales que

$$e_{k+1} = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i e_i.$$

Sigue que

$$\sum_{i=0}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)\alpha_i e_i = \sum_{i=0}^{k} \lambda_{k+1}\alpha_i e_i - \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \lambda_i e_i = \lambda_{k+1} \sum_{i=0}^{k} \alpha_i e_i - \sum_{i=0}^{k} \alpha_i T(e_i) = \lambda_{k+1} e_{k+1} - T\left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i e_i\right)$$

y por lo tanto

$$\sum_{i=0}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)\alpha_i e_i = 0.$$

Esto implica que $(\lambda_{k+1} - \lambda_i)\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, k$ pues $\{e_1, \ldots, e_k\}$ es linealmente independiente. Dado que $\lambda_i \neq \lambda_j$ para todo $i \neq j$, necesariamente $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Esto a su vez implica que $e_{k+1} = 0$, lo que es una contradicción.

Definamos $\mathbf{E}_k = \langle \{e_0, \ldots, e_k\} \rangle$, entonces tenemos que

$$\mathbf{E}_k \subsetneq \mathbf{E}_{k+1}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Usando el Lema de Riesz podemos construir una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ tal que $x_0 = e_0$

$$x_k \in \mathbf{E}_k, \quad \text{tal que} \quad \|x_k\|_{\mathbf{E}} = 1 \text{ y } \operatorname{dist}(x_k, \mathbf{E}_{k-1}) \geq \frac{1}{2}, \qquad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Sea $\lambda = \lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_k$ y supongamos por contradicción que $\lambda \neq 0$. Veamos que la sucesión $\{T(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ no puede tener subsucesiones convergentes. Con esto obtendremos una contradicción con el hecho que $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$.

Notemos primero que dado $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tenemos que

$$(T-\lambda_n I)\left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i e_i\right) = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i T(e_i) - \sum_{i=0}^{n}\alpha_i\lambda_n e_i = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i(\lambda_i-\lambda_n)e_i = \sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i(\lambda_i-\lambda_k)e_i \in \mathbf{E}_{n-1}.$$

Por lo tanto $(T-\lambda_n I)(\mathbf{E}_n) \subseteq \mathbf{E}_{n-1}$, y en particular, dado $k,m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1$ tenemos

$$\frac{(T-\lambda_{k+m}I)(x_{k+m})}{\lambda_{k+m}} \in (T-\lambda_{k+m}I)(\mathbf{E}_{k+m}) \subseteq \mathbf{E}_{k+m-1}$$

y

$$\frac{(T-\lambda_k I)(x_k)}{\lambda_k} \in (T-\lambda_k I)(\mathbf{E}_k) \subseteq \mathbf{E}_{k-1} \subseteq \mathbf{E}_{k+m-1}.$$

Por otro lado, también tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{T(x_{k+m})}{\lambda_{k+m}} - \frac{T(x_k)}{\lambda_k} &= \frac{T(x_{k+m})-\lambda_{k+m}x_{k+m}}{\lambda_{k+m}} - \frac{T(x_k)-\lambda_k x_k}{\lambda_k} + x_{k+m} - x_k \\ &= \frac{(T-\lambda_{k+m}I)(x_{k+m})}{\lambda_{k+m}} - \frac{(T-\lambda_k I)(x_k)}{\lambda_k} + x_{k+m} - x_k\end{aligned}$$

Ahora bien, dado que $x_k \in \mathbf{E}_k \subseteq \mathbf{E}_{k+m-1}$, obtenemos que

$$\frac{T(x_{k+m})}{\lambda_{k+m}} - \frac{T(x_k)}{\lambda_k} \in x_{k+m} + \mathbf{E}_{k+m-1}.$$

En consecuencia

$$\left\|\frac{T(x_{k+m})}{\lambda_{k+m}} - \frac{T(x_k)}{\lambda_k}\right\|_{\mathbf{E}} \geq \operatorname{dist}(x_{k+m}, \mathbf{E}_{n+m-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto la sucesión $\left\{\frac{1}{\lambda_k}T(x_k)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ no puede tener subsucesiones convergentes. Dado que que $\lambda_k \to \lambda \neq 0$ entonces $\{T(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tampoco puede tener subsucesiones convergentes. Sin embargo, esto contradice el hecho que $\|x_k\|_{\mathbf{E}} = 1$ y $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$. Por lo tanto $\lambda = 0$. □

Teorema 22.2.4 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach y $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$ es un operador dado. Si $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$, entonces una de las siguientes afirmaciones es cierta:
1. $\sigma(T) = \{0\}$.
2. $\sigma(T)\setminus\{0\}$ es un conjunto finito y no vacío.
3. $\sigma(T)\setminus\{0\}$ es una sucesión que converge a $\lambda = 0$.

Demostración. Dado $m \in \mathbb{N}$, definamos $C_m = \sigma(T)\bigcap\left\{\lambda \in \mathbb{R} \mid |\lambda| \geq \frac{1}{m+1}\right\}$. Notemos que C_m es compacto, pues $\sigma(T)$ lo es ya que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach.

Afirmamos que C_m es finito o bien vacío. En efecto, si no fuese el caso, existiría una sucesión $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C_m$ tal que $\lambda_i \neq \lambda_j$ para todo $i \neq j$. Dado que C_m es compacto, podemos asumir que $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente. Luego, por la Proposición 22.2.2, tenemos que $\lambda_k \to 0$. Sin embargo, dado C_m es cerrado, obtenemos una contradicción.

Finalmente, notando que

$$\sigma(T)\setminus\{0\} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_m$$

tenemos que $\sigma(T)\setminus\{0\}$ es numerable. □

23. Operadores autoadjuntos

Ahora estudiaremos el espectro de una clase particular de operadores, llamados autoadjuntos, los cuales están definido en espacios de Hilbert. Como veremos más adelante, esta clase de operadores corresponde a la extension de la noción de matriz simétrica a operadores en espacios de Hilbert.

En adelante será importante recordar que si $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert, usando la identificación $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})^* \cong (\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$, hemos asumido que

$$T : \mathbf{E} \to \mathbf{E} \qquad \text{y} \quad T^* : \mathbf{E} \to \mathbf{E}.$$

Definición 23.0.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert. Diremos que $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$ es **autoadjunto** si $T = T^*$:

$$\langle T(y), x \rangle = \langle y, T(x) \rangle, \qquad \forall\, x, y \in \mathbf{E}.$$

Ejemplos 23.0.1

- Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}}) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Si $T \in \mathscr{L}C(\mathbb{R}^n)$ está dada por

  $$T(x) = Mx, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

  donde M es una matriz de $n \times n$, entonces T es autoadjunto si y sólo si M es una matriz simétrica, pues

  $$T^*(y) = M^T y, \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

- Consideremos el operador $T : L^2_{\mathrm{m}}([0,1]) \to L^2_{\mathrm{m}}([0,1])$ dado por

  $$T(f)(t) = tf(t) \qquad \forall f \in L^2_{\mathrm{m}}([0,1]),\ \text{c.t.p. } t \in [0,1].$$

  T es autoadjunto pues para todo $f, g \in L^2_{\mathrm{m}}([0,1])$ tenemos

  $$\langle g, T(f) \rangle = \int_0^1 g(t)T(f)(t)dt = \int_0^1 g(t)tf(t)dt = \int_0^1 tg(t)f(t)dt = \langle T(g), f \rangle..$$

■

En $\mathbb{R}^n$ sabemos que toda matriz simétrica tiene valores propios asociados. En dimensión infinita, este no es necesariamente el caso.

Tomemos el ejemplo anterior, es decir, consideremos el operador $T : L^2_{\mathrm{m}}([0,1]) \to L^2_{\mathrm{m}}([0,1])$ dado por

$$T(f)(t) = tf(t) \qquad \forall f \in L^2_{\mathrm{m}}([0,1]), \text{ c.t.p. } t \in [0,1].$$

En este caso, $\mathscr{V}P(T) = \emptyset$, pues de lo contrario si $\lambda \in \mathscr{V}P(T)$ entonces existiría $f \in L^2_{\mathrm{m}}([0,1]) \setminus \{0\}$ tal que

$$tf(t) = T(f)(t) = \lambda f(t), \qquad \text{c.t.p. } t \in [0,1].$$

Por otra parte, en este caso sí tenemos que $\sigma(T) \neq \emptyset$, pues si la ecuación

$$\lambda f(t) - tf(t) = 1, \qquad \text{c.t.p. } t \in [0,1]$$

tuviese solución, esta sería de la forma $f(t) = \frac{1}{\lambda - t}$, pero si $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$ tenemos que $f \notin L^2_{\mathrm{m}}([0,1])$.

Proposición 23.0.2 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert y que $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$ es autoadjunto, entonces:

1. para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos que $\overline{\mathrm{im}(\lambda I - T)} = \ker(\lambda I - T)^{\perp}$.
2. los espacios propios asociados a valores propios distintos son ortogonales.

Demostración.

1. Usando el hecho que $\ker(A^*) = \mathrm{im}(A)^{\perp}$ (Proposición 7) y $(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}$, (Lema 3), tenemos

$$\overline{\mathrm{im}(\lambda I - T)} = ((\mathrm{im}(\lambda I - T))^{\perp})^{\perp} = \ker((\lambda I - T)^*)^{\perp}$$

   Además, dado que $(\lambda I - T)^* = \lambda I - T^* = \lambda I - T$ pues T es autoadjunto, obtenemos lo buscado.
2. Fijemos $\lambda, \mu \in \mathscr{V}P(T)$ con $\mu \neq \lambda$. Notemos que para $x \in \mathbf{E}_\lambda := \ker(\lambda I - T)$ e $y \in \mathbf{E}_\mu := \ker(T - \mu I)$ tenemos

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle = \langle x, \mu y\rangle = \mu\langle x, y\rangle.$$

   En consecuencia $(\mu - \lambda)\langle x, y\rangle = 0$ para $\mu \neq \lambda$. Por lo tanto $\langle x, y\rangle = 0$ y entonces $\mathbf{E}_\lambda \perp \mathbf{E}_\mu$.

□

Proposición 23.0.3 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert y que $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$ es autoadjunto. Luego $\sigma(T) \subseteq [m, M]$, donde

$$m := \inf_{\|x\|_{\mathbf{E}}=1} \langle T(x), x\rangle \qquad \text{y} \qquad M := \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}}=1} \langle T(x), x\rangle.$$

Demostración. Consideremos $d(\lambda) = \inf\{|\lambda - t| \mid t \in [m, M]\}$ (distancia en $\mathbb{R}$ al intervalo $[m, M]$).

Probaremos primero que

$$\|\lambda x - T(x)\|_{\mathbf{E}} \geq d(\lambda)\|x\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall\, x \in \mathbf{E}. \tag{23.1}$$

En efecto, notemos que (23.1) es trivial si $x=0$. Por otro lado, para $x \in \mathbf{E} \setminus \{0\}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\langle \lambda x - T(x), x\rangle = \lambda \|x\|_{\mathbf{E}}^2 - \langle T(x), x\rangle = (\lambda - \langle T(\hat{x}), \hat{x}\rangle)\|x\|_{\mathbf{E}}^2, \quad \text{donde} \quad \hat{x} = \frac{x}{\|x\|_{\mathbf{E}}}.$$

Notando que $t_x := \langle T(\hat{x}), \hat{x}\rangle \in [m,M]$ obtenemos (23.1) pues

$$\|\lambda x - T(x)\|_{\mathbf{E}}\|x\|_{\mathbf{E}} \geq |\langle \lambda x - T(x), x\rangle| = |\lambda - t_x|\|x\|_{\mathbf{E}}^2 \geq d(\lambda)\|x\|_{\mathbf{E}}^2.$$

Ahora bien, observemos que si $\lambda \notin [m,M]$, entonces $d(\lambda) > 0$ y por lo tanto $\ker(\lambda I - T) = \{0\}$. Luego, tenemos que si $\lambda \notin [m,M]$, entonces $\lambda I - T$ es inyectivo.

Veamos el resultado probando la contrarecíproca, es decir, si $\lambda \notin [m,M]$ entonces $\lambda \notin \sigma(T)$. Esto último es equivalente a probar que $\lambda \in \rho(T)$, es decir, a que $\lambda I - T$ sea biyectivo.Luego, para concluir resta ver que $\lambda I - T$ es sobreyectivo.

Por la Proposición 23.0.2 tenemos que

$$\overline{\operatorname{im}(\lambda I - T)} = \ker(\lambda I - T)^{\perp}.$$

Dado que $\lambda \notin [m,M]$, tenemos $\ker(\lambda I - T) = \{0\}$, y por lo tanto $\overline{\operatorname{im}(\lambda I - T)} = \{0\}^{\perp} = \mathbf{E}$. Notemos que si probamos que $\operatorname{im}(\lambda I - T)$ es cerrado, entonces tendremos que $\lambda I - T$ es sobreyectivo.

Tomemos una sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{im}(\lambda I - T)$ tal que $y_k \to y$. Por definición, existe $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ tal que $y_k = \lambda x_k - T(x_k)$. Usando (23.1) tenemos que para todo $k, j \in \mathbb{N}$ lo siguiente es válido:

$$\|y_k - y_j\|_{\mathbf{E}} = \|(\lambda I - T)(x_k) - (\lambda I - T)(x_j)\|_{\mathbf{E}} = \|(\lambda I - T)(x_k - x_j)\|_{\mathbf{E}} \geq d(\lambda)\|x_k - x_j\|_{\mathbf{E}}.$$

Dado que $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge, ésta es de Cauchy, y por lo tanto $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ también es de Cauchy. Por lo tanto, como $\mathbf{E}$ es un espacio de Hilbert, existe $x \in \mathbf{E}$ tal que $x_k \to x$. Notemos que

$$y_k = (\lambda I - T)(x_k) \to (\lambda I - T)(x)$$

y dado que $y_k \to y$, concluimos que $y = (\lambda I - T)(x)$. En particular, tenemos que $y \in \operatorname{im}(\lambda I - T)$ y por lo tanto $\operatorname{im}(\lambda I - T)$ es cerrado.

En síntesis, $\lambda \notin [m,M]$, entonces $\lambda I - T$ es biyectivo, y por lo tanto $\lambda \in \rho(T)$, es decir, $\lambda \notin \sigma(T)$. □

■ **Ejemplo 23.0.4** Consideremos nuevamente el operador $T : L^2_{\mathrm{m}}([0,1]) \to L^2_{\mathrm{m}}([0,1])$ dado por

$$T(f)(t) = tf(t) \qquad \forall f \in L^2_{\mathrm{m}}([0,1]), \text{ c.t.p. } t \in [0,1].$$

Es fácil ver que

$$m = \inf_{\|f\|_{L^2}=1} \langle T(f), f\rangle = \int_0^1 tf^2(t)dt \geq 0$$

y que

$$M = \sup_{\|f\|_{L^2}=1} \langle T(f), f\rangle = \int_0^1 tf^2(t)dt \leq 1.$$

Además, $m = 0$ pues basta tomar $f_k(t) = \sqrt{(k+1)(1-t)^k}$ para $t \in [0,1]$ y $k \in \mathbb{N}$. Luego tenemos

$$\|f_k\|_{L^2} = 1 \quad \text{y} \quad \int_0^1 tf_k^2(t)dt = 1 - \frac{k+1}{k+2}.$$

De forma similar, vemos que $M = 1$ tomando $f_k(t) = \sqrt{(k+1)t^k}$ para $t \in [0,1]$ y $k \in \mathbb{N}$, pues tenemos

$$\|f_k\|_{L^2} = 1 \quad \text{y} \quad \int_0^1 tf_k^2(t)dt = \frac{k+1}{k+2}.$$

Por lo tanto $\sigma(T) \subseteq [0,1]$. ■

Proposición 23.0.5 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert y que $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$ es autoadjunto. Luego $m, M \in \sigma(T)$.

Demostración. Veamos que $m = \inf\limits_{\|x\|_{\mathbf{E}}=1} \langle T(x), x\rangle \in \sigma(T)$. La demostración para $M = \sup\limits_{\|x\|_{\mathbf{E}}=1} \langle T(x), x\rangle$ es análoga.

Consideremos el operador lineal $A = T - mI \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$ y el operador bilineal $B : \mathbf{E}\times\mathbf{E} \to \mathbb{R}$ dado por

$$B(x,y) = \langle A(x), y\rangle \qquad \forall\, x, y \in \mathbf{E}.$$

Observemos que A es autoadjunto pues $A^* = (T-mI)^* = T^* - mI^* = T - mI = A$. En particular, esto implica que $B(x,y) = \langle A(x), y\rangle = \langle x, A(y)\rangle = \langle A(y), x\rangle = B(y,x)$ para todo $x, y \in \mathbf{E}$. Además, $B(x,x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbf{E}$ pues $B(0,0) = 0$ y si $x \neq 0$ tenemos

$$B(x,x) = \langle T(x) - mx, x\rangle = \langle T(x), x\rangle - m\langle x, x\rangle = \left(\left\langle \frac{T(x)}{\|x\|_{\mathbf{E}}}, \frac{x}{\|x\|_{\mathbf{E}}}\right\rangle - m\right)\|x\|_{\mathbf{E}}^2 \geq 0.$$

En particular, B verifica la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$B(x,y)^2 \leq B(x,x)B(y,y) \qquad \forall\, x, y \in \mathbf{E}.$$

En efecto, dado que $B(x+ty, x+ty) \geq 0$ para todo $x, y \in \mathbf{E}$ y para todo $t \in \mathbb{R}$, tenemos que el polinomio

$$p(t) = B(x,x) - 2tB(x,y) + t^2 B(y,y) \geq 0.$$

La conclusión viene de notar que el discriminante del polinomio satisface

$$\Delta = 4B(x,y)^2 - 4B(x,x)B(y,y) \leq 0.$$

A partir de lo anterior podemos concluir el resultado. Notemos que por definición para todo $k \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $x_k \in \mathbf{E}$ tal que

$$\|x_k\|_{\mathbf{E}} = 1 \quad \text{y} \quad \langle T(x_k), x_k\rangle \leq m + \frac{1}{k+1}.$$

Dado que $A = T - mI$, lo anterior implica que

$$0 \leq B(x_k, x_k) = \langle A(x_k), x_k\rangle = \langle T(x_k) - mx_k, x_k\rangle = \langle T(x_k), x_k\rangle - m \leq \frac{1}{k+1}.$$

Además, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\|A(x_k)\|_{\mathbf{E}}^4 = \langle A(x_k), A(x_k)\rangle^2 = B(x_k, A(x_k))^2 \leq B(x_k, x_k)B(A(x_k), A(x_k)).$$

Luego, dado que $B(A(x_k), A(x_k)) = \langle A^2(x_k), A(x_k)\rangle$, sigue que

$$\|A(x_k)\|_{\mathbf{E}}^4 \leq \langle A(x_k), x_k\rangle \|A^2(x_k)\|_{\mathbf{E}} \|A(x_k)\|_{\mathbf{E}} \leq \langle A(x_k), x_k\rangle \|A\|_{\mathscr{L}C} \|A(x_k)\|_{\mathbf{E}}^2 \leq \frac{\|A\|_{\mathscr{L}C}}{k+1}\|A(x_k)\|_{\mathbf{E}}^2.$$

Por lo tanto $\|A(x_k)\|_{\mathbf{E}}^2 \to 0$ y a posteriori $A(x_k) \to 0$.

Si $m \notin \sigma(T)$, tendríamos que A sería invertible. Por el Teorema de la Aplicación Abierta (Corolario 4.1.1), tenemos que $A^{-1} \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$. Esto implica que $x_k = A^{-1} \circ A(x_k) \to 0$. Sin embargo, esto no es posible, pues $\|x_k\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, lo que es una contradicción. Luego, necesariamente $m \in \sigma(T)$. $\square$

Proposición 23.0.6 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert y que $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$ es autoadjunto. Luego
$$\|T\|_{\mathscr{L}C} = \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}}=1} |\langle T(x), x\rangle|.$$

Demostración. Sea $\lambda = \sup\limits_{\|x\|_{\mathbf{E}}=1} |\langle T(x), x\rangle|$. Claramente $\lambda \leq \|T\|_{\mathscr{L}C}$ pues $|\langle T(x), x\rangle| \leq \|T\|_{\mathscr{L}C}\|x\|_{\mathbf{E}}^2$ para todo $x \in \mathbf{E}$. Veamos ahora la otra desigualdad. Consideremos el operador bilineal $B : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ dado por
$$B(x,y) = \langle T(x), y\rangle \qquad \forall\, x, y \in \mathbf{E}.$$
Notemos que, dado que T es autoadjunto, tenemos que
$$|B(x,x) \pm 2tB(x,y) + t^2 B(y,y)| = |B(x \pm ty, x \pm ty)| \leq \lambda \|x \pm ty\|_{\mathbf{E}}^2, \qquad \forall x, y \in \mathbf{E},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$
Por lo tanto
$$4t|B(x,y)| \leq |B(x,x)+2tB(x,y)+t^2B(y,y)| + |B(x,x)-2tB(x,y)+t^2B(y,y)| \leq \lambda(\|x+ty\|_{\mathbf{E}}^2 + \|x-ty\|_{\mathbf{E}}^2).$$
Dado que
$$\|x+ty\|_{\mathbf{E}}^2 + \|x-ty\|_{\mathbf{E}}^2 = 2(\|x\|_{\mathbf{E}}^2 + t^2\|y\|_{\mathbf{E}}^2),$$
tenemos que
$$0 \leq t^2\lambda\|y\|_{\mathbf{E}}^2 - 2t|B(x,y)| + \lambda\|x\|_{\mathbf{E}}^2.$$
El discriminante del polinomio (en t) satisface
$$\Delta = 4|B(x,y)|^2 - 4\lambda^2\|y\|_{\mathbf{E}}^2\|x\|_{\mathbf{E}}^2 \leq 0.$$
Esto implica que $|B(x,y)| \leq \lambda\|x\|_{\mathbf{E}}\|y\|_{\mathbf{E}}$, para todo $x, y \in \mathbf{E}$. La conclusión viene de observar que
$$\|T(x)\|_{\mathbf{E}}^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = B(x, T(x)) = |B(x, T(x))| \leq \lambda\|x\|_{\mathbf{E}}\|T(x)\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$
□

La Proposición 23.0.6 implica que $\|T\|_{\mathscr{L}C} = \max\{|m|, |M|\}$.
En efecto, basta notar que
$$\sup_{\|x\|_{\mathbf{E}}=1} |\langle T(x), x\rangle| = \max\left\{\left|\inf_{\|x\|_{\mathbf{E}}=1} \langle T(x), x\rangle\right|, \left|\sup_{\|x\|_{\mathbf{E}}=1} \langle T(x), x\rangle\right|\right\} = \max\{|m|, |M|\}.$$
Para ver esto, definamos
$$S_{\mathbf{E}}^+ := \{x \in \mathbf{E} \mid \|x\|_{\mathbf{E}} = 1, \langle T(x), x\rangle \geq 0\} \quad \text{y} \quad S_{\mathbf{E}}^- := \{x \in \mathbf{E} \mid \|x\|_{\mathbf{E}} = 1, \langle T(x), x\rangle \leq 0\}.$$
Usando la convención que $\inf(\emptyset) = +\infty$ y $\sup(\emptyset) = -\infty$, tenemos que
$$\sup_{\|x\|_{\mathbf{E}}=1} |\langle T(x), x\rangle| = \max\left\{\sup_{x \in S_{\mathbf{E}}^-} -\langle T(x), x\rangle, \sup_{x \in S_{\mathbf{E}}^+} \langle T(x), x\rangle\right\} = \max\left\{-\inf_{x \in S_{\mathbf{E}}^+} \langle T(x), x\rangle, \sup_{x \in S_{\mathbf{E}}^-} \langle T(x), x\rangle\right\}.$$

Si $S_{\mathbf{E}}^{-} \neq \emptyset$ entonces

$$0 \geq \inf_{x \in S_{\mathbf{E}}^{-}} \langle T(x), x \rangle = \inf_{\|x\|_{\mathbf{E}}=1} \langle T(x), x \rangle = -\left| \inf_{\|x\|_{\mathbf{E}}=1} \langle T(x), x \rangle \right| = |m|.$$

Similarmente, si $S_{\mathbf{E}}^{+} \neq \emptyset$ entonces

$$0 \leq \sup_{x \in S_{\mathbf{E}}^{+}} \langle T(x), x \rangle = \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}}=1} \langle T(x), x \rangle = \left| \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}}=1} \langle T(x), x \rangle \right| = |M|.$$

Corolario 23.0.7 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert y que $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$ es autoadjunto. Si $\sigma(T) = \{0\}$, entonces $T \equiv 0$.

Demostración. Recordemos que por la Proposición 23.0.5 tenemos que $m, M \in \sigma(T)$, donde

$$m = \inf_{\|x\|_{\mathbf{E}}=1} \langle T(x), x \rangle \quad \text{y} \quad M = \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}}=1} \langle T(x), x \rangle.$$

Notemos también que, por la Proposición 23.0.6, tenemos

$$\|T\|_{\mathscr{L}C} = \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}}=1} |\langle T(x), x \rangle| = \max\{|m|, |M|\}.$$

Esto implica que si $\sigma(T) = \{0\}$, entonces necesariamente $T \equiv 0$. □

Proposición 23.0.8 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert y que $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$ es autoadjunto. Si $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$ entonces $\mathscr{V}P(T) \neq \emptyset$ y $\|T\|_{\mathscr{L}C} = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathscr{V}P(T)\}$.

Demostración. Notemos primero que si $T \equiv 0$ entonces $\|T\|_{\mathscr{L}C} = 0$ y $\mathscr{V}P(T) = \{0\}$, con lo que la igualdad se verifica. Recordemos que $\sigma(T) \subseteq [m, M]$ (Proposición 23.0.3). Además, $m, M \in \sigma(T)$ (Proposición 23.0.5). Luego, dado que

$$\max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \max\{|m|, |M|\}.$$

También, por la observación anterior y Proposición 23.0.6, tenemos que

$$\|T\|_{\mathscr{L}C} = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Ahora bien, como $T \neq 0$, necesariamente existe $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ y luego

$$\|T\|_{\mathscr{L}C} = \max_{\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}} |\lambda|.$$

Finalmente, dado que $T \in \mathscr{K}(E)$, tenemos que $\mathscr{V}P(T) \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$ y por lo tanto

$$\|T\|_{\mathscr{L}C} = \max_{\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}} |\lambda| = \max_{\lambda \in \mathscr{V}P(T) \setminus \{0\}} |\lambda| = \max_{\lambda \in \mathscr{V}P(T)} |\lambda|.$$

□

24. Descomposición espectral

En esta sección presentaremos el llamado teorema de descomposición espectral para operadores autoadjuntos y compactos en un espacio de Hilbert. Este resultado es una extensión a espacios de Hilbert del siguiente hecho.

Si A es una matriz simétrica, entonces A es diagonalizable con respecto a una cierta base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Esto es $A = PDP^T$, con D una matriz diagonal y $P = [e_1, \ldots, e_n]$ donde e_i son vectores propios de A. En particular, si todos los valores propios de A son distintos, tenemos que

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{n} \ker(\lambda_i I_n - A) \quad \text{y} \quad Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x^\top e_i) e_i, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Notemos también que $x \mapsto (x^\top e_i) e_i$ es la proyección sobre el espacio propio $\ker(\lambda_i I_n - A)$.

24.1 Caso operador de rango finito

Veamos primero un caso sencillo, donde el operado T es de rango finito.

Teorema 24.1.1 — Descomposición espectral (rango finito). Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert y $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$ es autoadjunto y de rango finito. Luego, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (distintos) tales que $\mathscr{V}P(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

Además, si $P_i : \mathbf{E} \to \mathbf{E}_i$ es la proyección sobre el espacio propio $\mathbf{E}_i = \ker(\lambda_i I - T)$, entonces

$$T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i.$$

Demostración. Supongamos que $T \neq 0$, si no el resultado es directo, pues $\mathscr{V}P(T) = \{0\}$. Dado que $\mathrm{im}(T)$ es de dimensión finita, es particular es cerrado, y por lo tanto $\mathbf{E} = \mathrm{im}(T) \oplus \mathrm{im}(T)^{\perp}$. Luego tenemos $T_I = T|_{\mathrm{im}(T)} \in \mathscr{L}C(\mathrm{im}(T))$, pues $T(\mathrm{im}(T)) \subseteq \mathrm{im}(T)$. Recordemos que $\ker(T^*) = \mathrm{im}(T)^{\perp}$, pero como T es autoadjunto, tenemos que $\ker(T) = \mathrm{im}(T)^{\perp}$. En particular, T_I es un operador lineal entre espacios de dimensión finita, autoadjunto y biyectivo. Luego, puede ser representado por una matriz simétrica e invertible, cuyos valores propios son no nulos. En particular, $\mathscr{V}P(T)$ es un conjuntos finito y tenemos:

$$\mathrm{im}(T) = \bigoplus_{\lambda \in \mathscr{V}P(T) \setminus \{0\}} \ker(\lambda I - T).$$

□

Notemos que este resultado dice en particular tenemos que

$$\mathbf{E} = \mathrm{im}(T) \oplus \mathrm{im}(T)^{\perp} = \mathrm{im}(T) \oplus \ker(T) = \bigoplus_{\lambda \in \mathscr{V}P(T)} \ker(\lambda I - T).$$

24.2 Caso operador de rango infinito

Antes de ver el teorema de descomposición espectral donde la dimensión infinita juega un rol preponderante, debemos estudiar primero algunas propiedades de los valores propios de operadores compactos y autoadjuntos, cuyo rango no es finito.

Proposición 24.2.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert y que $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$ es compacto (de rango infinito) y autoadjunto. Luego:

1. Los espacios propios $\mathbf{E}_{\lambda} = \ker(\lambda I - T)$ asociados a valores propios no nulos son espacios vectoriales de dimensión finita.
2. $\mathscr{V}P(T)$ es un conjunto infinito numerable y acotado, cuyo único punto de acumulación es $\lambda = 0$.

Demostración.

1. Consecuencia directa del Teorema de Alternativa de Fredholm.
2. Dado que T es de rango infinito (es decir, no es de rango finito), $T \neq 0$. En consecuencia, como T es autoadjunto, $\sigma(T) \neq \{0\}$ (Corolario 23.0.7). Además, dado que $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$, $\mathscr{V}P(T) \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$ (Proposición 22.2.2). Luego, por el Teorema 22.2.4, $\mathscr{V}P(T) \setminus \{0\}$ es un conjunto:
   - no vacío finito, o bien,
   - una sucesión que converge a cero (de términos diferentes).

Supongamos por contradicción que $\mathscr{V}P(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ para todo $i \neq j$. Definamos

$$G = \mathbf{E}_{\lambda_1} \bigoplus \mathbf{E}_{\lambda_2} \bigoplus \ldots \bigoplus \mathbf{E}_{\lambda_n} \quad \text{y} \quad F = G^{\perp}.$$

Luego G es de dimensión finita, y por lo tanto $\mathbf{E} = F \bigoplus G$.

Notemos que, $x \in \mathbf{E}_{\lambda_i}$ si y sólo si $T(x) = \lambda_i x$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y por lo tanto $T(G) \subseteq G$. Además,

$$F = G^{\perp} = \left(\mathbf{E}_{\lambda_1} \bigoplus \mathbf{E}_{\lambda_2} \bigoplus \ldots \bigoplus \mathbf{E}_{\lambda_k}\right)^{\perp} = \bigcap_{i=1}^{k} \mathbf{E}_{\lambda_i}^{\perp}.$$

Dado que T es autoadjunto, tenemos que $\mathbf{E}_{\lambda_i}^{\perp} = \ker(\lambda_i I - T)^{\perp} = \overline{\operatorname{im}(\lambda_i I - T)}$ (Proposición 23.0.2). A partir de esto podemos deducir que $T(F) \subseteq F$. En efecto, fijemos $i = 1, \dots, n$ y notemos que para todo $x \in \mathbf{E}$ tenemos que $\lambda_i x - T(x) \in \operatorname{im}(\lambda_i I - T) \subseteq \mathbf{E}_{\lambda_i}^{\perp}$. Luego, si $x \in F$ entonces

$$T(x) \in \lambda_i x + \mathbf{E}_{\lambda_i}^{\perp} \subseteq F + \mathbf{E}_{\lambda_i}^{\perp} \subseteq \mathbf{E}_{\lambda_i}^{\perp}.$$

Dado que F es cerrado, tenemos que $(F, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert. Luego el operador $T_F := T|_F \in \mathscr{L}C(F)$ es autoadjunto y además compacto (pues F es un s.e.v. cerrado en $\mathbf{E}$). Además $T_F \not\equiv 0$, pues de otra forma T sería de rango finito ya que tendríamos que $\operatorname{im}(T) \subseteq G$ y G es de dimensión finita. Luego $\mathscr{V}P(T_F) \setminus \{0\} \neq \emptyset$, pues gracias a la Proposición 23.0.8 tenemos que

$$\|T_F\|_{\mathscr{L}C} = \text{máx}\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathscr{V}P(T_F)\}.$$

Tomemos $\lambda \in \mathscr{V}P(T_F) \setminus \{0\}$, luego existe $u \in F$ con $u \neq 0$ tal que $T_F u = \lambda u$. En particular, $Tu = \lambda u$, y por lo tanto $\lambda \in \mathscr{V}P(T) \setminus \{0\}$. Esto implica que existe algún $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\lambda = \lambda_k$ y por ende $u \in \mathbf{E}_{\lambda_k} \subseteq G$. En consecuencia, $u \in F \cap G$ y $u \neq 0$, lo que no puede ser pues $F \cap G = \{0\}$. □

Teorema 24.2.2 — Descomposición espectral. Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert y que $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$ es compacto (de rango infinito) y autoadjunto. Si $P_\lambda : \mathbf{E} \to \mathbf{E}_\lambda$ denota a la proyección ortogonal sobre $\mathbf{E}_\lambda$, entonces

$$T = \sum_{\lambda \in \mathscr{V}P(T) \setminus \{0\}} \lambda P_\lambda,$$

donde la igualdad se entiende de la siguiente forma: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\Lambda \subseteq \mathscr{V}P(T) \setminus \{0\}$ finito tal que

$$\left\| T - \sum_{\lambda \in K} \lambda P_\lambda \right\|_{\mathscr{L}C} \leq \varepsilon, \qquad \forall K \subseteq \mathscr{V}P(T) \text{ finito tal que } \Lambda \subseteq K.$$

Demostración. Para probar el resultado es suficiente demostrar que si $K \subseteq \mathscr{V}P(T) \setminus \{0\}$ es finito, entonces

$$\left\| \left(T - \sum_{\lambda \in K} \lambda P_\lambda \right) \right\|_{\mathscr{L}C} \leq \max_{\lambda \in \mathscr{V}P(T) \setminus K} |\lambda|.$$

En efecto, por la Proposición 24.2.1 tenemos que $\lambda = 0$ es el único punto de acumulación de $\mathscr{V}P(T)$. Luego, dado $\varepsilon > 0$, el conjunto Λ de valores propios de T que verifican $|\lambda| \geq \varepsilon$ es finito. Sigue que para cualquiera $K \subseteq \mathscr{V}P(T) \setminus \{0\}$ finito que contenga a Λ tenemos

$$\left\| T - \sum_{\lambda \in K} \lambda P_\lambda \right\|_{\mathscr{L}C} \leq \max_{\lambda \in \mathscr{V}P(T) \setminus K} |\lambda| \leq \max_{\lambda \in \mathscr{V}P(T) \setminus \Lambda} |\lambda| \leq \varepsilon.$$

Tomemos $K \subseteq \mathscr{V}P(T) \setminus \{0\}$ finito y definamos,

$$G_K = \bigoplus_{\lambda \in K} \mathbf{E}_\lambda \quad \text{y} \quad F_K = G_K^{\perp} = \bigcap_{\lambda \in K} \mathbf{E}_\lambda^{\perp}.$$

Repitiendo el argumento de la Proposición 24.2.1, tenemos que $T_K := T|_{F_K} \in \mathscr{K}(F_K)$ es autoadjunto y no nulo. Además, por la Proposición 23.0.8, T_K tiene algún valor propio no nulo pues

$$\|T_K\|_{\mathscr{L}C} = \max_{\lambda \in \mathscr{V}P(T_K)} |\lambda|.$$

Notemos también que $\mathscr{V}P(T_K) \subseteq \mathscr{V}P(T) \setminus K$ pues $\mathbf{E} = F_K \bigoplus G_K$. Más aún, tenemos que $\mathscr{V}P(T_K) = \mathscr{V}P(T) \setminus K$ pues si $\lambda \in \mathscr{V}P(T) \setminus K$ dado que los espacios propios asociados a valores propios distintos son ortogonales entre sí (Proposición 23.0.2), tenemos que

$$\mathbf{E}_\lambda \subseteq G_K^\perp = F_K.$$

Por lo tanto $\lambda \in \mathscr{V}P(T_K)$. Luego, tenemos que

$$\|T_K\|_{\mathscr{L}C} = \max_{\lambda \in \mathscr{V}P(T)\setminus K} |\lambda|.$$

Si P_{G_K} denota la proyección sobre G_K, tenemos que $x - P_{G_K}(x) \in G_K^\perp = F_K$ para todo $x \in \mathbf{E}$, y por lo tanto

$$\|T\,(x - P_{G_K}(x))\|_{\mathbf{E}} = \|T_K\,(x - P_{G_K}(x))\|_{\mathbf{E}} \leq \|T_K\|_{\mathscr{L}C}\,\|x - P_{G_K}(x)\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

En consecuencia

$$\|T\,(x - P_{G_K}(x))\|_{\mathbf{E}} \leq \max_{\lambda \in \mathscr{V}P(T)\setminus K} |\lambda|\,\|x - P_{G_K}(x)\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Notemos también que $x \mapsto x - P_{G_K}(x)$ corresponde a la proyección ortogonal sobre F_K. Luego tenemos

$$\|x\|_{\mathbf{E}}^2 = \|x - P_{G_K}(x)\|_{\mathbf{E}}^2 + \|P_{G_K}(x)\|_{\mathbf{E}}^2 \geq \|x - P_{G_K}(x)\|_{\mathbf{E}}^2, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Esto implica que

$$\|T\,(x - P_{G_K}(x))\|_{\mathbf{E}} = \|(T - T \circ P_{G_K})\,(x)\|_{\mathbf{E}} \leq \max_{\lambda \in \mathscr{V}P(T)\setminus K} |\lambda|\|x\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Luego, tenemos que

$$\|T - T \circ P_{G_K}\|_{\mathscr{L}C} \leq \max_{\lambda \in \mathscr{V}P(T)\setminus K} |\lambda|.$$

Por otro lado, si P_λ denota la proyección sobre $\mathbf{E}_\lambda$, entonces

$$P_{G_K} = \sum_{\lambda \in K} P_\lambda \quad \text{ y } T \circ P_{G_K} = \sum_{\lambda \in K} T \circ P_\lambda.$$

Ahora bien, por definición de P_λ, tenemos que $T \circ P_\lambda(x) = \lambda P_\lambda(x)$ para todo $x \in \mathbf{E}$. A partir de esto obtenemos que

$$\left\| \left(T - \sum_{\lambda \in K} \lambda P_\lambda \right) \right\|_{\mathscr{L}C} = \left\| \left(T - \sum_{\lambda \in K} T \circ P_\lambda \right) \right\|_{\mathscr{L}C} = \|(T - T \circ P_{G_K})\|_{\mathscr{L}C} \leq \max_{\lambda \in \mathscr{V}P(T)\setminus K} |\lambda|.$$

□

Corolario 24.2.3 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert y que $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$ es compacto (de rango infinito) y autoadjunto. Luego,

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k P_{\lambda_k}$$

donde $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \mathscr{V}P(T) \setminus \{0\}$ es una sucesión estrictamente decreciente a cero y $P_{\lambda_k} : \mathbf{E} \to \mathbf{E}_{\lambda_k}$

denota a la proyección ortogonal sobre $\mathbf{E}_{\lambda_k} = \ker(\lambda_k I - T)$. Además, tenemos que

$$\overline{\operatorname{im}(T)} = \overline{\left\langle \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{E}_{\lambda_k} \right\rangle}.$$

Demostración. Gracias al Teorema de descomposición espectral es fácil ver que para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| T - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_{\lambda_k} \right\|_{\mathscr{L}C} \leq \varepsilon, \qquad \forall n \geq k_0.$$

Notemos que si $x \in \mathbf{E}_{\lambda_k}$, entonces $\lambda_k x = T(x) \in \operatorname{im}(T)$. Luego la inclusión $\supseteq$ es directa. Finalmente, la conclusión viene de notar que

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k P_{\lambda_k}(x) \in \overline{\left\langle \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{E}_{\lambda_k} \right\rangle}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

$\square$

- El Teorema de descomposición espectral implica que $\overline{\operatorname{im}(T)}$ admite una base ortonormal completa (base de Hilbert) tal que

  $$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k, \qquad \forall x \in \mathbf{E},$$

  donde $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una familia vectores propios asociados a los valores propios no nulos de T (contando multiplicidad $d_k = \dim(\lambda_k I - T)$)
- Si T es autoadjunto, entonces tenemos que

  $$\mathbf{E} = \ker(T) \oplus \overline{\operatorname{im}(T)} = \overline{\bigoplus_{\lambda \in \mathscr{V}P(T)} \ker(\lambda I - T)}.$$

25. Caso espacios vectoriales complejos

Para terminar este capítulo haremos un discusión sobre cómo adaptar las definiciones y resultados que hemos estudiado de teoría espectral al caso de espacios vectoriales complejos.

En general, la mayor parte de los resultados que hemos probado se pueden extender al caso complejo directamente y con obvias modificaciones.

25.1 Operadores compactos

Lo primero que debemos discutir es sobre algunas propiedades del operador adjunto.

Si $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert complejo, usando la identificación $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})^* \cong (\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$, asumiremos que $T^* : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$. En particular,

$$\langle T^*(y), x\rangle = \langle y, T(x)\rangle, \qquad \forall\, x, y \in \mathbf{E}.$$

Notemos que $(\lambda S + T)^* = \bar{\lambda} S^* + T^*$ para todo $T, S \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\langle (\lambda S + T)^*(y), x\rangle = \langle y, (\lambda S + T)(x)\rangle = \langle y, \lambda S(x)\rangle + \langle y, T(x)\rangle = \bar{\lambda}\langle y, S(x)\rangle + \langle T^*(y), x\rangle, \quad \forall\, x, y \in \mathbf{E}.$$

Por lo tanto

$$\langle (\lambda S + T)^*(y), x\rangle = \bar{\lambda}\langle S^*(y), x\rangle + \langle T^*(y), x\rangle = \langle \bar{\lambda} S^*(y) + T^*(y), x\rangle = \langle (\bar{\lambda} S^* + T^*)(y), x\rangle, \quad \forall\, x, y \in \mathbf{E}.$$

Por otra parte, la definición de operador compacto sigue siendo la misma, y todos los resultados vistos en este caso siguen siendo válidos. La principal modificación está en el enunciado del Teorema de la alternativa de Fredholm.

Teorema 25.1.1 — Alternativa de Fredholm. Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. complejo dado. Si $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$ y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces

1. $\ker(\lambda I - T)$ es de dimensión finita.
2. $\mathrm{im}(\lambda I - T)$ es cerrado con $\mathrm{im}(\lambda I - T) = \ker(\bar{\lambda} I - T^*)^{\perp}$.
3. $\ker(\lambda I - T) = \{0\}$ si y sólo si $\mathrm{im}(\lambda I - T) = \mathbf{E}$.

Además, si $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach complejo entonces también tenemos

4. $\dim(\ker(\lambda I - T)) = \dim(\ker(\bar{\lambda} I - T^*))$.

Demostración. Mismos argumentos que para el caso real, pero notando que

$$(\lambda I - T)^* = \bar{\lambda} I - T^*, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

□

25.2 Espectro y valores propios

Las definiciones del Espectro y de los valores propios de un operador deben ser adaptadas de la siguiente forma.

Definición 25.2.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. complejo y $T \in \mathscr{L}C(E)$ es un operador dado. Definimos:

- el **conjunto resolvente** de T como $\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - T) \text{ es biyectiva en } \mathbf{E}\}$.
- el **espectro** de T como $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.
- los **valores propios** de T como $\mathscr{V}P(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker(\lambda I - T) \neq \{0\}\}$.

Si $\lambda \in \mathscr{V}P(T)$, al conjunto $\mathbf{E}_\lambda := \ker(\lambda I - T)$ lo llamaremos el espacio propio asociado al valor propio λ.

Proposición 25.2.1 Si $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert complejo y $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$ es un operador dado, entonces

$$\rho(T^*) = \rho(T)^* := \left\{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \rho(T)\right\} \quad \text{y} \quad \sigma(T^*) = \sigma(T)^* := \left\{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\right\}.$$

Demostración. Notemos que si $\lambda \in \rho(T)$, entonces $[(\lambda I - T)^{-1}]^*(\bar{\lambda} I - T^*) = I$ pues para todo $x, y \in \mathbf{E}$ tenemos

$$\langle [(\lambda I - T)^{-1}]^*(\bar{\lambda} I - T^*)(y), x\rangle = \langle (\lambda I - T)^*(y), (\lambda I - T)^{-1}(x)\rangle = \langle y, (\lambda I - T)(\lambda I - T)^{-1}(x)\rangle = \langle y, x\rangle.$$

De forma similar, $(\bar{\lambda} I - T^*)[(\lambda I - T)^{-1}]^* = I$ pues para todo $x, y \in \mathbf{E}$ tenemos

$$\langle (\bar{\lambda} I - T^*)[(\lambda I - T)^{-1}]^*(y), x\rangle = \langle [(\lambda I - T)^{-1}]^*(y), (\lambda I - T)(x)\rangle = \langle y, (\lambda I - T)^{-1}(\lambda I - T)(x)\rangle \langle y, x\rangle.$$

En particular, tenemos que $\rho(T)^* \subseteq \rho(T^*)$. Por otro lado, lo anterior aplicado a T^* en vez de T implica que $\rho(T^*)^* \subseteq \rho(T^{**})$ y en consecuencia $\rho(T^*) \subseteq \rho(T^{**})^*$

Ahora bien, como $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert complejo, tenemos que $T^{**} = T$ pues

$$\langle T^{**}(y), x\rangle = \langle y, T^*(x)\rangle = \overline{\langle T^*(x), y\rangle} = \overline{\langle x, T(y)\rangle} = \langle T(y), x\rangle, \qquad \forall x, y \in \mathbf{E}.$$

Sigue que $\rho(T^{**})^* = \rho(T)^*$, y por lo tanto, $\rho(T)^* = \rho(T^*)$. Dado que $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$, obtenemos finalmente que $\sigma(T^*) = \sigma(T)^*$. □

En general $\mathscr{V}P(T)$ y $\mathscr{V}P(T^*)$ no están relacionado.

- Dado que $\overline{\text{im}(\lambda I - T)} = \ker((\lambda I - T)^*)^\perp = \ker(\bar{\lambda} - T^*)^\perp$ sólo podemos afirmar que:

$$\bar{\lambda} \in \mathscr{V}P(T^*) \quad \iff \quad \overline{\text{im}(\lambda I - T)} \neq \mathbf{E}.$$

- Podríamos tener que $\mathscr{V}P(T) = \emptyset$ y $\mathscr{V}P(T^*) \neq \emptyset$.
Por ejemplo, en $\ell^p(\mathbb{R})$, con $p \in (1, +\infty)$, consideremos el operador shift a la derecha

$$S_r(x) = (0, x_0, x_1, x_2, \ldots), \qquad \forall x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{C}).$$

En este caso tenemos que $\mathscr{V}P(S_r) = \emptyset$ pues $(\lambda I - S_r)$ es inyectivo para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.
En efecto, el caso $\lambda = 0$ es directo pues S_r es inyectivo. Por otro lado, si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces la ecuación

$$(\lambda I - S_r)(\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}) = (\lambda I - S_r)(\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}),$$

es equivalente a

$$\left.\begin{array}{rcl} \lambda x_0 & = & \lambda y_0 \\ \lambda x_{k+1} - x_k & = & \lambda y_{k+1} - y_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \implies x_k = y_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, S_r^* es el operador shift a la izquierda en $\ell^q(\mathbb{R})$, con $q \in (1, +\infty)$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$S_l(x) = (x_1, x_2, \ldots), \qquad \forall x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^q(\mathbb{C}).$$

Claramente, S_l no es inyectivo, y por lo tanto $0 \in \mathscr{V}P(S_l)$.

25.3 Operador Autoadjunto

Al igual que con operadores compactos, la definición de operador autoadjuntos no cambia, y todos los resultados visto para este caso siguen siendo válidos, pues los valores propios de un operador autoadjunto son reales. La única salvedad que hay que tener en consideración es una extensión de la Proposición 23.0.2 al caso complejo.

Proposición 25.3.1 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert y que $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$ es autoadjunto, entonces:

1. $\mathscr{V}P(T) \subseteq \mathbb{R}$.
2. para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos que $\overline{\text{im}(\lambda I - T)} = \ker\left(\bar{\lambda} I - T\right)^\perp$.
3. los espacios propios asociados a valores propios distintos son ortogonales.

Demostración. Sólo necesitamos probar el primer punto, las demostraciones de los otros puntos son idénticas al caso real.

Sea $\lambda \in \mathscr{V}P(T)$, luego existe $x \in \mathbf{E} \setminus \{0\}$ tal que $T(x) = \lambda x$. Dado que T es autoadjunto tenemos

$$\langle x, T(x)\rangle = \langle T(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \langle x, x\rangle = \lambda \|x\|_{\mathbf{E}}^2$$

Por otro lado $\langle x, T(x)\rangle = \overline{\langle T(x), x\rangle} = \overline{\lambda \|x\|_{\mathbf{E}}^2} = \bar{\lambda} \|x\|_{\mathbf{E}}^2$. Ahora bien, como $x \neq 0$ concluimos que $\lambda = \bar{\lambda}$ y por lo tanto $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

26. Problemas de certámenes

26.1 Enunciados

26.1.1 Problema 1 - Certamen 3 - 2019

Sea $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ un espacio de Hilbert complejo de dimensión infinita cuyo producto interno es $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Suponga que $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ es una familia ortonormal en $\mathbf{E}$ y que $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ es una sucesión acotada. Considere el operador $S : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ definido via la fórmula:

$$S(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \langle x, e_k\rangle e_k, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

1. Pruebe que está bien definido y que $S \in \mathscr{LC}(\mathbf{E})$.
2. Pruebe que S es operador compacto si y sólo si $\mu_k \to 0$.
3. Pruebe que S es operador autoadjunto si y sólo si $\mu_k \in \mathbb{R}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

26.1.2 Problema 2 - Certamen 3 - 2019

Sea $\mathbf{E} = C([0,1])$ dotado de la norma usual ($\|\cdot\|_{\mathbf{E}} = \|\cdot\|_\infty$) y sea $T \in \mathscr{LC}(\mathbf{E})$ el operador dado por

$$T(u)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x u(y)dy, & \text{si } x \in (0,1], \\ \\ u(0) & \text{si } x = 0, \end{cases} \qquad \forall u \in \mathbf{E}$$

1. Pruebe que T está bien definido y que $\|T\|_{\mathscr{LC}(\mathbf{E})} = 1$.
2. Pruebe que $\mathscr{VP}(T) = (0,1]$ y que $\mathbf{E}_\lambda = \left\{u \in \mathbf{E} \mid \exists c \in \mathbb{R} \text{ tal que } u(x) = cx^{1/\lambda - 1},\ \forall x \in [0,1]\right\}$.
Indicación: Estudie las soluciones de la EDO

$$\lambda x u'(x) + (\lambda - 1)u(x) = 0, \quad x \in (0,1].$$

3. Pruebe que $\sigma(T) = [0,1]$, determine si T es un operador compacto y de una fórmula explícita para $(T-\lambda I)^{-1}$ para $\lambda \in \rho(T)$.
Indicación: Verifique que si $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, entonces dado $f \in \mathbf{E}$, las soluciones de la EDO

$$\psi(x) - \lambda x\psi'(x) = xf(x), \quad x \in (0,1]$$

son de la forma

$$\psi(x) := x^{1/\lambda}\left(c + \int_x^1 \frac{1}{\lambda y^{1/\lambda}} f(y)dy\right), \qquad \forall x \in (0,1].$$

26.1.3 Problema 3 - Certamen 3 - 2019

Sea $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ un espacio de Banach sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) y sea $T \in \mathscr{L}\mathscr{C}(\mathbf{E})$ un operador dado. El radio espectral de T, denotado por $r(T)$, viene dado por la fórmula:

$$r(T) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[k]{\|T^k\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}}, \quad \text{donde } T^{n+1} = T^k \circ T, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{con } T^1 = T.$$

Parte I

1. Muestre que $r(T)$ está bien definido (el límite existe) y que

$$r(T) := \inf_{k\in\mathbb{N}} \sqrt[k]{\|T^k\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}} \leq \|T\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}.$$

Indicación: Dado $\varepsilon > 0$ justifique la existencia de $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sqrt[k_0]{\|T^{k_0}\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}} \leq \inf_{k\in\mathbb{N}} \sqrt[k]{\|T^k\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}} + \varepsilon.$$

Use el hecho que para todo $k \in \mathbb{N}$, existen $p(k), q(k) \in \mathbb{N}$ tales que $k = p(k)k_0 + q(k)$ con $q(k) < k_0$. Le puede ser útil estudiar los límites de $\frac{p(k)}{k}$ y $\frac{q(k)}{k}$ cuando $k \to +\infty$.
2. Pruebe que $|\lambda| \leq r(T)$ para todo $\lambda \in \sigma(T)$.
Indicación: Dado $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $r(T) < |\lambda|$, estudie en el espacio de Banach $\left(\mathscr{L}C(\mathbf{E}), \|\cdot\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}\right)$, la convergencia de la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda I - T)}{\lambda^{k+1}} T^k, \quad \text{donde } T^0 = I$$

Parte II

En adelante supondremos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ un espacio de Hilbert complejo y que T es un operador *normal*, es decir, $T \circ T^* = T^* \circ T$. Note que todo operador autoadjunto es normal.

3. Muestre que $\ker(\lambda I - t) = \ker\left(\bar{\lambda} I - T^*\right)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, y que si $\lambda, \mu \in \mathscr{V}P(T)$ son distintos, entonces $\mathbf{E}_\lambda \perp \mathbf{E}_\mu$, ie. los espacios propios asociados a valores propios distintos son ortogonales.
Indicación: Pruebe que $\|A(x)\|_{\mathbf{E}} = \|A^*(x)\|_{\mathbf{E}}$ para todo $x \in \mathbf{E}$ y $A \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$ un operador normal.
4. Pruebe que $r(T) = \|T\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}$.
Indicación: Pruebe que $\|T^* \circ T\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} = \|T\|^2_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}$ (no se necesita que T sea normal). Luego estudie primero el caso en que T es autoadjunto y luego el caso general en que T es solo normal. Le puede ser útil usar lo probado en indicación de la parte anterior.

26.1.4 Problema 2 - Certamen 3 - 2020

Sean $\mathbf{E} = L^2_{\mathrm{m}}([0,1])$ dotado de la norma usual y $T \in \mathscr{LC}(\mathbf{E})$ el operador dado por

$$T(u)(x) = \int_0^1 e^{-|x-y|}u(y)dy, \qquad \forall x \in [0,1],\ u \in \mathbf{E}.$$

1. Pruebe que T está bien definido y que es un operador compacto autoadjunto y $\|T\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} \leq 1$.
2. Sean $u \in C([0,1])$ y $f = T(u)$. Demuestre que $f \in C^2([0,1])$ y que

$$f''(x) - f(x) = -2u(x), \quad \forall x \in [0,1] \quad \text{con } f(0) = f'(0) \text{ y } f(1) = -f'(1).$$

3. Inversamente, sea $f \in C^2([0,1])$ que verifica $f(0) = f'(0)$ y $f(1) = -f'(1)$. Sea

$$u = -\frac{1}{2}(f'' - f).$$

   Pruebe que $f = T(u)$.
   Indicación: Sea $h = f - T(u)$, pruebe que $h \in C^2([0,1])$ y que $h'' = h$ en $[0,1]$.
4. Demuestre que $\mathrm{im}(T)$ es denso en $\mathbf{E}$ y deducir que $0 \notin \mathscr{V}P(T)$. ¿Se tiene que $0 \in \sigma(T)$?
5. Demuestre que si $u \in C([0,1])$ y si $f = T(u)$, entonces

$$\langle T(u), u\rangle_{L^2[0,1]} = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \left[|f(x)|^2 + |f'(x)|^2\right]dx + |f(1)|^2 + |f(0)|^2\right).$$

   Deducir que para todo $u \in \mathbf{E}$ se tiene que

$$\langle T(u), u\rangle_{L^2[0,1]} \geq \frac{1}{2}\|T(u)\|^2_{\mathbf{E}}.$$

6. Muestre que $\sigma(T) \subseteq [0,1]$.
7. Sea $\lambda \in (0,1]$ y definamos $a_\lambda = \sqrt{\frac{2-\lambda}{\lambda}}$. Demuestre que

$$\lambda \in \sigma(T) \quad \Longleftrightarrow \quad (1-a_\lambda^2)\sin(a_\lambda) + 2a_\lambda\cos(a_\lambda) = 0$$

   Deducir que $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, donde λ_k satisface para cada $k \in \mathbb{N}$ la condición

$$\frac{2}{1+\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2} < \lambda_k < \frac{2}{1+(n\pi)^2}$$

   Indicación: Verifique que la ecuación $\tan(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ tiene exactamente una solución en $\left(n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

26.1.5 Problema 3 - Certamen 3 - 2020

Supongamos que $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{Y} \subseteq \mathbb{R}^d$ son dos conjuntos compactos.

1. Sea $\mu : \mathbf{Y} \to M(\mathbf{X})$ un operador tal que a cada elemento $y \in \mathbf{Y}$, le asigna una medida de Radon μ_y en $M(\mathbf{X})$. Supongamos que μ satisface la propiedad

$$\forall f \in C(\mathbf{X}),\ \text{la función } y \in \mathbf{Y} \mapsto \int f\,d\mu_y \in \mathbb{R} \text{ es continua.} \tag{P}$$

   a) Si $|\mu| := \sup\limits_{y\in\mathbf{Y}} \|\mu_y\|_{M(\mathbf{X})}$, pruebe que $|\mu| < +\infty$.

b) Demuestre que la ecuación

$$T_\mu f(y) := \int_{\mathbf{X}} f\, d\mu_y, \qquad \forall f \in C(\mathbf{X}), \forall y \in \mathbf{Y} \tag{26.1}$$

define un operador $T_\mu \in \mathscr{L}C\,(C(\mathbf{X}), C(\mathbf{Y}))$. Además, pruebe que $\|T_\mu\|_{\mathscr{L}C} = |\mu|$.

2. Pruebe que para todo operador $T \in \mathscr{L}C(C(\mathbf{X}), C(\mathbf{Y}))$, existe un operador $\mu : \mathbf{Y} \to M(\mathbf{X})$ que satisface la Propiedad (P) y que además $T = T_\mu$.
3. Sea $\mu : \mathbf{Y} \to M(\mathbf{X})$ un operador que satisface (P). Demuestre, utilizando el **el Teorema de Arzelá-Ascoli**, que el operador T_μ definido en (26.1) es compacto sí y solo si μ es un operador continuo visto como una función de $\mathbf{Y}$ en $M(\mathbf{X}) = C(\mathbf{X})^*$.

4. Supongamos ahora que $T \in \mathscr{K}\,(C(\mathbf{X}), C(\mathbf{Y}))$ es dado.
   a) Pruebe, usando el **Teorema de Radon-Nikodým**, que existe una función $\kappa : \mathbf{Y} \times \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ y una medida de Radon positiva m en $\mathbf{X}$, tal que

   $$Tf(y) = \int_{\mathbf{X}} \kappa_y f\, dm \qquad \forall f \in C(\mathbf{X}), \forall y \in \mathbf{Y},$$

   tal que $\kappa_y := \kappa(y, \cdot) \in L^1_m(\mathbf{X})$ para todo $y \in \mathbf{Y}$ fijo y la función $y \mapsto \kappa_y$ es continua.
   Indicación: Puede utilizar el siguiente resultado: Si H es un subconjunto de medidas de Radon finitas y además es relativamente compacto, entonces existe una medida de Radon positiva y finita λ que es absolutamente continua con respecto a toda medida $\mu \in H$, i.e.,

   $$\forall \mu \in H, \forall A \in \mathscr{B}(\mathbf{X}) \quad \lambda(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(A) = 0.$$

   b) Demuestre que si κ es la función dada por el apartado anterior, entonces

   $$\|T\|_{\mathscr{L}C} = \sup_{y \in \mathbf{Y}} \int_{\mathbf{X}} |\kappa_y|\, dm,$$

   Indicación: Pruebe que para λ, una medida de Radon positiva sobre un espacio métrico compacto X, y $\psi \in L^1(\lambda)$, la ecuación

   $$\nu(f) = \int_{\mathbf{X}} f \psi\, d\lambda \quad \forall f \in C(X)$$

   define una medida de Radon acotada en X, y que $\|\nu\|_{M(X)} = \int |\psi|\, d\lambda$. Para ello, demuestre que para $\varepsilon > 0$, existe una función $g \in C(X)$ tal que

   $$\int_{\mathbf{X}} |\psi||g - signo\,(\psi)| \leq \varepsilon$$

   y que g puede ser elegido tal que $\|g\| \leq 1$. Finalmente, estime $\int |\psi|\, d\lambda - \nu(g)$.
5. Considere un escalar $\alpha \in (0,1)$. Muestre que el operador T de $C([0,1])$ a $C([0,1])$ definido por

   $$Tf(x) = \int_0^1 |x - y|^{-\alpha} f(y)\, dy$$

   es compacto y calcule la norma de este operador.

26.1.6 Problema 2 - Certamen 3 - 2021

Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ un espacio de Hilbert y que $T \in \mathscr{L}C(E)$ es un operador *normal*, es decir, $T \circ T^* = T^* \circ T$.

1. Pruebe que $\|T(x)\|_{\mathbf{E}} = \|T^*(x)\|_{\mathbf{E}}$ para todo $x \in \mathbf{E}$.
2. Muestre que $\mathscr{V}P(T) = VP(T^*)$, y que $\mathbf{E}_\lambda \perp \mathbf{E}_\mu$ para todo $\lambda, \mu \in \mathscr{V}P(T)$ distintos ($\lambda \neq \mu$).
3. Pruebe que si $\lambda \in \sigma(T)$, entonces existe una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ con $\|x_k\|_{\mathbf{E}} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda x_k - T(x_k) \to 0$.
   Indicación: Pruebe si la conclusión no es cierta, entonces existe $\alpha > 0$ tal que
   $$\|\lambda x - T(x)\|_{\mathbf{E}} \geq \alpha \|x\|_{\mathbf{E}} \quad \text{y} \quad \|\lambda x - T^*(x)\|_{\mathbf{E}} \geq \alpha \|x\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$
4. Pruebe que $\sigma(T) \subseteq [0, +\infty)$ bajo la condición que T sea *semi-definido positivo*, es decir, si satisface
   $$\langle T(x), x\rangle \geq 0, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

26.1.7 Problema 3 - Certamen 3 - 2021

Supongamos que $p \in [1, +\infty)$ y $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión acotada. Consideremos el operador $T : \ell^p(\mathbb{R}) \to \ell^p(\mathbb{R})$ dado por la fórmula

$$T(\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}) = \{\lambda_k x_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \qquad \forall \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{R}).$$

1. Demuestre que T está bien definido y que es un operador acotado.
2. Demuestre que T es compacto si y sólo si $\lambda_k \to 0$.
3. Si $p = 2$, demuestre que T es un operador de Hilbert-Schmidt si y sólo si $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R})$.
4. Supongamos que $\lambda_k \to 0$. Si S_r es el operador *Shift a la derecha* en $\ell^p(\mathbb{R})$, encuentre $\mathscr{V}P(T \circ S_r)$.

26.1.8 Problema 4 - Certamen 3 - 2021

Supongamos que $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto y no vacío. Dada $\kappa \in \mathscr{C}(\mathbf{X} \times \mathbf{X})$, pruebe que para todo $p, q \in (1, +\infty)$, el operador $T : L^p_{\mathrm{m}}(\mathbf{X}) \to L^q_{\mathrm{m}}(\mathbf{X})$ dado por

$$T(f)(x) = \int_{\mathbf{X}} \kappa(x,y) f(y)\, dy, \qquad \forall f \in L^p_{\mathrm{m}}(\mathbf{X}),\ \forall x \in \mathbf{X}$$

está bien definido y es un operador compacto.

Indicación: Puede considerar primero el caso κ es Lipschitz continua, y luego extender el resultado al caso general usando el Teorema de Stone-Weierstrass.

26.1.9 Problema 5 - Certamen 3 - 2021

Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach reflexivo y $T \in \mathscr{L}C(E)$ es un operador dado. Pruebe que $\rho(T^*) = \rho(T)$ y $\sigma(T^*) = \sigma(T)$.

26.1.10 Problema 6 - Certamen 3 - 2021

Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach y $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$ es un operador dado. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos el operador *resolvente* $R_\lambda : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ como el único operador que verifica

$$R_\lambda \circ (\lambda I - T)(x) = (\lambda I - T) \circ R_\lambda(x) = x, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

1. Demuestre que si $|\lambda| > \|T\|_{\mathscr{L}C}$, entonces R_λ está bien definido, y que $R_\lambda \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$ con
$$\|R_\lambda\|_{\mathscr{L}C} \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|_{\mathscr{L}C}}.$$
2. Supongamos que $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \rho(T)$ es una sucesión convergente a $\lambda \in \mathbb{R}$. Pruebe que si $\{R_{\lambda_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ acotada en $\mathscr{L}C(\mathbf{E})$, entonces $\lambda \in \rho(T)$ y $R_{\lambda_k} \to R_\lambda$.
Indicación: Pruebe que para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus [-\|T\|_{\mathscr{L}C}, \|T\|_{\mathscr{L}C}]$ se tiene que
$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda \circ R_\mu.$$

26.1.11 Problema 7 - Examen - 2021

I) Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ un espacio de Hilbert y que $T \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$ un operador dado.
 1. Pruebe que $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$ si y sólo si para toda sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ que converge débilmente a 0 tenemos que $\{T(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergen fuertemente a 0.
 2. Pruebe que para todo $F \neq \{0\}$ s.e.v. cerrado de $\mathbf{E}$ existe $\bar{x} \in F$ con $\|\bar{x}\|_{\mathbf{E}} = 1$ tal que
$$\langle T(\bar{x}), \bar{x} \rangle = \sup_{x\in F,\ \|x\|_{\mathbf{E}}=1} \langle T(x), x \rangle$$

II) Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita y que $T \in \mathscr{L}C(E)$ es un operador auto-adjunto, compacto y *semi-definido positivo*, es decir, satisface
$$\langle T(x), x \rangle \geq 0, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$
Sabemos que en este caso $\mathscr{V}P(T) \setminus \{0\}$ es una sucesión $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (0, \|T\|_{LC}]$ decreciente a cero, donde cada valor propio aparece una cantidad de veces igual a la dimensión del espacio propio correspondiente. Sabemos también que existe una base ortonormal completa $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ de $\overline{\mathrm{im}(T)}$ tal que
$$T(e_k) = \lambda_k e_k, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$
El objetivo de este problema es demostrar la siguiente fórmula:
$$\lambda_k = \min_{W\in\mathscr{V}_k} \max_{x\in W^\perp\setminus\{0\}} \frac{\langle T(x), x \rangle}{\|x\|_{\mathbf{E}}^2}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{$\bigstar$}$$
donde $\mathscr{V}_k$ denota la colección de s.e.v. de $\mathbf{E}$ de dimensión $k \in \mathbb{N}$.
 1. Sea $W_0 = \{0\}$ y para cada $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ denotemos por $W_k = \langle \{e_0, \ldots, e_{k-1}\} \rangle$. Pruebe que
$$\max_{x\in W_k^\perp\setminus\{0\}} \frac{\langle T(x), x \rangle}{\|x\|_{\mathbf{E}}^2} = \lambda_k, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$
 2. Dado $k \in \mathbb{N}$, muestre que si $W \in \mathscr{V}_k$ entonces $W^\perp \cap W_{k+1} \neq \{0\}$ y que
$$\frac{\langle T(x), x \rangle}{\|x\|_{\mathbf{E}}^2} \geq \lambda_k, \qquad \forall x \in W_{k+1} \setminus \{0\}.$$
 Deducir a partir de esto la fórmula en ($\bigstar$) y que el mínimo se alcanza en $W = W_k$.

26.2 Soluciones

26.2.1 Problema 1 - Certamen 3 - 2019

1. Sea $\mathbf{E}_0 = \overline{\langle\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}\rangle}$, luego $(\mathbf{E}_0, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert separable con $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una base de $\mathbf{E}_0$. Notemos que $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \bigoplus \mathbf{E}_0^{\perp}$ y que

$$\sum_{k=0}^{N} \mu_k \langle x, e_k\rangle e_k = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbf{E}_0^{\perp}$$

y esto último implica que $S(x) = 0$ (la serie converge) para todo $x \in \mathbf{E}_0^{\perp}$. Por otro lado, si $x \in \mathbf{E}_0$, entonces

$$\|x\|_{\mathbf{E}}^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle x, e_k\rangle^2.$$

Luego, sigue que

$$\left\| \sum_{k=0}^{N} \mu_k \langle x, e_k\rangle e_k \right\|_{\mathbf{E}}^2 = \sum_{k=0}^{N} |\mu_k|^2 \langle x, e_k\rangle^2 \le \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} |\mu_k|^2\right) \sum_{k=0}^{N} \langle x, e_k\rangle^2.$$

Haciendo $N \to \infty$, tenemos que $\|S(x)\|_{\mathbf{E}}^2 \le \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} |\mu_k|^2\right) \|x\|_{\mathbf{E}}^2$ y por lo tanto $S \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$.

2. Notemos que $S(e_k) = \mu_k e_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y por lo tanto μ_k es un valor propio de S. Luego si S es compacto, por la Proposición 22.2.3, necesariamente $\mu_k \to 0$. Recíprocamente, supongamos que $\mu_k \to 0$. Definamos $S_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \mu_k \langle x, e_k\rangle e_k$. Notemos que S_N es de rango finito y que para todo $x \in \mathbf{E}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|S_N(x) - S_{N+n}(x)\|_{\mathbf{E}}^2 &\le \sum_{k=N+1}^{N+n} |\mu_k|^2 \langle x, e_k\rangle^2 \\
&\le \left(\sup_{k\ge N+1} |\mu_k|^2\right) \sum_{k=N+1}^{N+n} \langle x, e_k\rangle^2 \\
&\le \left(\sup_{k\ge N+1} |\mu_k|^2\right) \|x\|_{\mathbf{E}}^2
\end{aligned}$$

y esto implica que $\|S_N - S_{N+n}\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} \le \left(\sup_{k\ge N+1} |\mu_k|^2\right) \to 0$ cuando $N \to +\infty$, si $\mu_k \to 0$. Por lo tanto $S_k \to S$ en $\mathscr{L}C(\mathbf{E})$. Ahora bien, como S_k es de rango finito, es compacto, y en consecuencia S es compacto (Proposición 21.1.1).

3. Sabemos que si S es autoadjunto, entonces $\mathscr{V}P(S) \subseteq \mathbb{R}$ (Proposición 23.0.2) y por lo visto antes, cada $\mu_k \in \mathscr{V}P(S)$, de ahi que $\mu_k \in \mathbb{R}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por otra parte, supongamos que cada $\mu_k \in \mathbb{R}$. Por definición tenemos que S^* satisface,

$$\langle S(x), y\rangle = \langle x, S^*(y)\rangle \qquad \forall\, x, y \in \mathbf{E}.$$

Fijemos $N \in \mathbb{N}$, luego sigue que

$$\begin{aligned}
\langle S_N(x), y\rangle &= \sum_{k=0}^{N} \mu_k \langle x, e_k\rangle \langle y, e_k\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{N} \mu_k \langle y, e_k\rangle \langle x, e_k\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{N} \langle x, \overline{\mu_k \langle y, e_k\rangle} e_k\rangle \\
&= \langle x, \sum_{k=0}^{N} \bar{\mu}_k \langle y, e_k\rangle e_k\rangle \quad \text{pues } \langle y, e_k\rangle \in \mathbb{R} \\
&= \langle x, S_k(y)\rangle \quad \text{pues } \mu_k \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Por lo tanto S_N es autoadjunto para todo $N \in \mathbb{N}$. Luego, haciendo $N \to +\infty$ se concluye.

26.2.2 Problema 2 - Certamen 3 - 2019

1. Veamos primero que $x \mapsto T(u)(x)$ es una función continua en $[0,1]$. Es fácil ver que por álgebra de funciones continuas y continuidad de la integral, esto es cierto para $x \in [0,1]$. Luego, basta ver la continuidad en $x = 0$. Sea $u \in \mathbf{E}$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|u(y) - u(0)| \leq \varepsilon \qquad \text{si } y \in [0, \delta].$$

Esto último implica que

$$\begin{aligned}
|T(u)(x) - T(u)(0)| &= \left| \frac{1}{x} \int_0^x (u(y) - u(0))\, dy \right| \\
&\leq \frac{1}{x} \int_0^x |u(y) - u(0)|\, dy \\
&\leq \frac{1}{x} \varepsilon x \\
&= \varepsilon \qquad \text{si } x \in [0, \delta]
\end{aligned}$$

Por lo tanto $x \mapsto T(u)(x)$ es continua y en particular $T : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ (está bien definido). Notemos que T es claramente lineal, luego basta ver que el operador es continuo con $\|T\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} = 1$. Primero $|T(u)(x)| \leq \|u\|_\infty$ para todo $x \in [0,1]$ y por lo tanto $\|T\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} \leq 1$. Además, tomando $u = 1$ tenemos

$$|T(u)(x)| = 1 \qquad \forall\, x \in E$$

y por lo tanto $\|T\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} = 1$

2. Supongamos $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de T y que $u \in \mathbf{E}$ es un vector propio asociado. Luego, necesariamente u es continuamente diferenciable en $[0,1]$ con

$$\frac{1}{x} \int_0^x u(y)\, dy = \lambda u(x) \qquad \forall\, x \in [0,1]$$

con $u(0) = \lambda u(0)$ o equivalentemente, u es solución de

$$u(y) = \lambda u(x) + x\lambda u'(x) \qquad \forall\, x \in [0,1]$$

y esto último, pasa si y sólo si

$$\lambda x u'(x) + (\lambda - 1)u(x) = 0 \qquad \forall\, x \in [0,1] \tag{26.2}$$

Si $\lambda = 0$, entonces necesariamente $u(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$. Por lo tanto, si $\lambda = 0$ entonces $u = 0$ en $\mathbf{E}$ y por ende $\lambda \notin \mathscr{V}P(T)$ pues T es inyectiva en $\mathbf{E}$. Notemos que las soluciones de la EDO (26.2) tienen la forma

$$v_\lambda(x) = c x^{\frac{1}{\lambda}-1} \qquad \forall\, x \in [0,1],\ c \in \mathbb{R}$$

(basta derivar y verificar). Luego v_λ es continua en $x = 0$ si y sólo si $0 \le \frac{1}{\lambda} - 1$ y esto último equivale a que $0 \le \frac{1-\lambda}{\lambda}$ y se deduce que $\lambda \in [0,1]$. Por lo tanto $v_\lambda \in \mathbf{E}$ si y sólo si $\lambda \in [0,1]$ y $v_\lambda \neq 0$. Tenemos que $\mathscr{V}P(T) = (0,1]$ y $\mathbf{E}_\lambda$ es como en el enunciado.

3. Recordemos que $(0,1] = \mathscr{V}P(T) \subseteq \sigma(T) \subseteq [-1,1]$, pues $\|T\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} = 1$. Notemos que T no puede ser sobreyectiva en $\mathbf{E}$ pues $x \mapsto T(u)(x)$ es necesariamente una función continuamente diferenciable. Luego $0 \in \sigma(T)$, y por lo tanto

$$[0,1] \subseteq \sigma(T) \subseteq [-1,1].$$

Veamos que $\lambda I - T$ es sobreyectivo para $\lambda < 0$ o $\lambda > 1$. En particular, como $\mathscr{V}P(T) = (0,1]$, esto implicará que $\rho(T) = (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$ y $\sigma(T) = [0,1]$. Dado $f \in \mathbf{E}$, estudiemos la ecuación para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$.

$$T(u) - \lambda u = f \qquad \text{en } [0,1]$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^y u(y)\,dy - \lambda x u(x) & = & x f(x) \quad \text{si } x \in [0,1] \\ (1-\lambda)u(0) & = & f(0) \end{array} \right. \tag{26.3}$$

Notemos que $\psi(x) = \displaystyle\int_0^x u(y)\,dy$ es solución de la EDO

$$\psi(x) - \lambda x \psi'(x) = x f(x) \qquad x \in (0,1].$$

Luego usando la indicación tenemos que

$$\psi(x) = x^{1/\lambda}\left(c + \int_x^1 \frac{1}{\lambda y^{1/\lambda}} f(y)\,dy \right) \qquad \forall\, x \in (0,1]$$

y por lo tanto

$$u(x) = \frac{x^{\frac{1}{\lambda}-1}}{\lambda}\left(c + \int_x^1 \frac{1}{\lambda y^{1/\lambda}} f(y)\,dy \right) - \frac{f(x)}{\lambda} \qquad \forall\, x \in (0,1]$$

Notemos que $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{y^{1/\lambda}} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}(1 - x^{1-\frac{1}{\lambda}})$ es continua en $x = 0$ si $\lambda < 0$ o $\lambda > 1$. Esto implica que la integral en la definición de u converge cuando $x \to 0$. Dado que $x^{1/\lambda - 1} \to +\infty$ si $x \to 0$ para el caso $\lambda < 0$ o $\lambda > 1$, entonces para que u sea continua en $x = 0$, necesariamente

$$c = -\int_0^1 \frac{1}{\lambda y^{1/\lambda}} f(y)\,dy$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} u(y) &= -\frac{x^{\frac{1}{\lambda}-1}}{\lambda^2}\int_0^x \frac{1}{y^{1/\lambda}} f(y)\, dy - \frac{f(x)}{\lambda} \\ \text{con } u(0) &= \frac{1}{1-\lambda} f(0) \end{aligned} \tag{26.4}$$

es solución de (26.3), lo que implica que $\sigma(T) = [0,1]$, y que $(T-\lambda I)^{-1}(f)$ viene dado por $u(x)$ encontrado en (26.4). De aquí concluimos que T no puede ser compacto, pues de lo contrario $\sigma(T)$ sería a lo más un conjunto numerable. $\square$

26.2.3 Problema 3 - Certamen 3 - 2019

Parte I

1. Sea $i(T) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sqrt[k]{\|T^k\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}}$, luego como

$$\|T^k\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} \leq \|T\|^k_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

tenemos que

$$0 \leq i(T) \leq \liminf_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\|T^k\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}} \leq \limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\|T^k\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}} \leq \|T\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}$$

Luego para concluir, basta ver que

$$\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\|T^k\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}} \leq i(T).$$

Sea $k \in \mathbb{N}$ y usemos la indicación, es decir, existen $p(k), q(k) \in \mathbb{N}$ tal que $k = p(k)k_0 + q(k)$ con $q(k) < k_0$. Notemos que

$$\frac{p(k)}{k} \longrightarrow \frac{1}{k_0} \quad \text{y} \quad \frac{q(k)}{k} \longrightarrow 0.$$

Además,

$$\begin{aligned} \|T^k\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} &= \|T^{p(k)k_0+q(k)}\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} \\ &= \|T^{p(k)k_0} \circ T^{q(k)}\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} \\ &\leq \|T^{p(k)k_0}\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} \|T\|^{q(k)}_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} \\ &\leq \|T^{k_0}\|^{p(k)}_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} \|T\|^{q(k)}_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} \end{aligned}$$

y por lo tanto $\|T^k\|^{1/k}_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} \leq \|T^{k_0}\|^{\frac{p(k)}{k}}_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} \|T\|^{\frac{q(k)}{k}}_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}$. Por lo tanto,

$$\limsup_{k\to+\infty} \|T^k\|^{1/k}_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} \leq \|T^{k_0}\|^{\frac{1}{k_0}}_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} \leq i(T) + \varepsilon,$$

como $\varepsilon > 0$ es arbitrario se concluye.

2. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $r(T) < |\lambda|$ y consideramos la suma parcial

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{(\lambda I - T)}{\lambda^{k+1}} T^k = \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{\lambda^k} T^k - \frac{1}{\lambda^{k+1}} T^{k+1} \right) = I - \frac{1}{\lambda^{N+1}} T^{N+1}$$

Notemos que

$$\left\| \frac{1}{\lambda^{N+1}} T^{N+1} \right\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} = \frac{1}{|\lambda|^{N+1}} \|T^{N+1}\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}$$

y entonces

$$\left\| \frac{1}{\lambda^{N+1}} T^{N+1} \right\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}^{\frac{1}{N+1}} = \frac{\|T^{N+1}\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}^{\frac{1}{N+1}}}{|\lambda|} \longrightarrow \frac{r(T)}{|\lambda|} < 1$$

Por lo tanto $\frac{1}{\lambda^{N+1}} T^{N+1} \to 0$ en $\mathscr{L}C(\mathbf{E})$ y por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{(\lambda I - T)}{\lambda^{k+1}} T^k \to I$$

en otras palabras, si definimos $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}}$ entonces tenemos que

$$(\lambda I - T) \circ S = S \circ (\lambda I - T) = I,$$

por lo tanto $\lambda \in \rho(T)$, y así $|\lambda| \leq r(T)$ para todo $\lambda \in \sigma(T)$.

Parte II

1. Probemos la indicación:

$$\|A(x)\|_{\mathbf{E}}^2 = \langle A(x), A(x) \rangle_{\mathbf{E}} = \langle A^* A(x), x \rangle_{\mathbf{E}} = \langle AA^*(x), x \rangle_{\mathbf{E}} = \overline{\langle x, A^* A(x) \rangle_{\mathbf{E}}}$$

y como $\|A^*(x)\|_{\mathbf{E}}^2 = \overline{\langle A^*(x), A^*(x) \rangle_{\mathbf{E}}}$ entonces $\|A(x)\|_{\mathbf{E}} = \|A^*(x)\|_{\mathbf{E}}$. Luego si $A = \lambda I - T$, entonces $A^* = \bar{\lambda} I - T^*$ y por lo tanto $A(x) = 0$ si y sólo si $A^*(x) = 0$, es decir,

$$\ker(\lambda I - T) = \ker(\bar{\lambda} I - T^*).$$

Ahora bien, sean $\lambda, \mu \in \mathscr{V}P(T)$ con $\lambda \neq \mu$. Sean $x \in \ker(\lambda I - T)$ e $y \in \ker(\bar{\lambda} I - T^*)$ no nulos. Sigue que

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle T(x), y \rangle = \overline{\langle y, T(x) \rangle}$$

Además,

$$\overline{\langle y, T(x) \rangle} = \overline{\langle T^*(y), x \rangle} = \langle x, T^*(y) \rangle = \langle x, \bar{\mu} y \rangle = \mu \langle x, y \rangle,$$

donde la última igualdad se tiene porque $\ker(\lambda I - T) = \ker(\bar{\lambda} I - T^*)$ y por lo tanto $\langle x, y \rangle = 0$ si $\lambda \neq \mu$.

2. Sabemos que $\|T\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} = \|T^*\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}$ pues

$$\begin{aligned} \|T(x)\|_{\mathbf{E}} &= \sup_{\|y\|_{\mathbf{E}} \leq 1} |\langle y, T(x) \rangle| = \sup_{\|y\|_{\mathbf{E}} \leq 1} |\langle T^*(y), x \rangle| \leq \|T^*\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} \|x\|_{\mathbf{E}} \\ \|T^*(y)\|_{\mathbf{E}} &= \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}} \leq 1} |\langle T^*(y), x \rangle| = \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}} \leq 1} |\langle y, T(x) \rangle| \leq \|T\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} \|y\|_{\mathbf{E}} \end{aligned} \tag{26.5}$$

y por lo tanto

$$\|T^* \circ T\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} \leq \|T^*\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} \|T\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} = \|T\|^2_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}$$

Notemos que (26.5) implica que

$$\|A\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} = \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}} \leq 1} \sup_{\|y\|_{\mathbf{E}} \leq 1} |\langle A(x), y \rangle|.$$

Luego tenemos que

$$\|T^* \circ T\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} \geq \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}} \leq 1} |\langle T^* \circ T(x), x \rangle| = \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}} \leq 1} \|T(x)\|^2_{\mathbf{E}} = \|T\|^2_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}$$

y así,

$$\|T^* \circ T\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} = \|T\|^2_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}.$$

Ahora si suponemos que T es autoadjunto, es decir $T = T^*$, entonces $\|T^2\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} = \|T\|^2_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}$ y por lo tanto $\|T^{2k}\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} = \|T\|^{2k}_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}$ y como ya se vio que el límite existe entonces es posible afirmar,

$$r(T) = \lim_{k \to +\infty} \|T^{2k}\|^{\frac{1}{2k}}_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} = \|T\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}.$$

Ahora si suponemos que T es normal, es decir, $S = T^* \circ T$ es autoadjunto, entonces

$$\|S^2\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} = \|S\|^2_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} = \|T\|^4_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}.$$

Notemos que $S^2 = T^* \circ T \circ T^* \circ T = T^* \circ T^* \circ T^2$,

$$\|S^2(x)\|_{\mathbf{E}} = \|T^* \circ T^* \circ T^2(x)\|_{\mathbf{E}} = \|T^* \circ T^3(x)\|_{\mathbf{E}} = \|T^4(x)\|_{\mathbf{E}}.$$

Por lo tanto,

$$r(T) = \lim_{k \to +\infty} \|T^{4k}\|^{\frac{1}{4k}}_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} = \|T\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})}$$

□

26.2.4 Problema 2 - Certamen 3 - 2020

1. Veamos que T está bien definido, es decir, si $u \in L^2_{\mathrm{m}}([0,1])$, entonces $T(u) \in L^2_{\mathrm{m}}([0,1])$. Notemos primero que $(x,y) \mapsto e^{-|x-y|}u(y)$ es medible en $[0,1] \times [0,1]$ si $u \in L^2_{\mathrm{m}}([0,1])$. Luego por Teorema de Fubini, la función

$$x \longmapsto \int_0^1 e^{-|x-y|} u(y)\, dy$$

es medible en $[0,1]$. Por otra parte, dado que para todo $x \in [0,1]$,

$$\left| \int_0^1 e^{-|x-y|} u(y)\, dy \right| \leq \|u\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^2}$$

y por lo tanto $\|T(u)\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2}$ para todo $u \in L^2_{\mathrm{m}}([0,1])$, entonces $T(u) \in L^2_{\mathrm{m}}([0,1])$ para todo $u \in L^2_{\mathrm{m}}([0,1])$ y además $\|T\|_{\mathscr{L}C(\mathbf{E})} \leq 1$. Ahora bien, T es autoadjunto, pues por el Teorema de

Fubini, tenemos que para todo $u, v \in L^2_{\mathrm{m}}([0,1])$;

$$\begin{aligned}
\langle T(u), v\rangle &= \int_0^1 T(u)(x)v(x)\, dx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 e^{-|x-y|}u(y)v(x)\, dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 e^{-|x-y|}v(x)u(y)\, dxdy \\
&= \int_0^1 T(v)(y)u(y)\, dy \\
&= \langle T(v), u\rangle \\
&= \langle u, T(v)\rangle.
\end{aligned}$$

Veamos que T es compacto. Primero notemos que dado $u \in L^2_{\mathrm{m}}([0,1])$ tenemos que $T(u)$ es una función uniformemente continua en $[0,1]$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$, luego existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| e^{-|x_1-y|} - e^{-|x_2-y|} \right| \leq \varepsilon \qquad \forall\, x_1, x_2 \in [0,1] \text{ con } |x_1 - x_2| \leq \delta.$$

pues la función $(x,y) \mapsto e^{-|x-y|}$ es continua en $[0,1]\times[0,1]$ y por tanto, uniformemente continua en $[0,1]\times[0,1]$. Sigue que

$$|T(u)(x_1) - T(u)(x_2)| \leq \varepsilon \|u\|_{L^1} \leq \varepsilon \|u\|_{L^2} \qquad \forall\, u \in L^2_{\mathrm{m}}([0,1]). \tag{26.6}$$

Además, como $|T(u)(x)| \leq \|u\|_{L^2_{\mathrm{m}}([0,1])}$ tenemos que si $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, entonces $\{T(u_k)(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada para todo $x \in [0,1]$. Más aún, por (26.6) tenemos que $\{T(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es equicontinua. Luego por Arzelá-Ascoli, existe una subsucesión $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\{T(u_{k_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a alguna función continua φ. Dado que $\mathscr{C}([0,1]) \subseteq L^2_{\mathrm{m}}([0,1])$ y tenemos que

$$\|T(u_{k_j}) - \varphi\|_{L^2} \leq \|T(u_{k_j}) - \varphi\|_\infty$$

entonces $\{T(u_{k_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge en $L^2_{\mathrm{m}}([0,1])$ a φ y por lo tanto T es compacto.

2. Sea $u \in \mathscr{C}([0,1])$ y $f(x) = T(u)(x)$ para todo $x \in [0,1]$ notemos que

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x e^{-(x-y)}u(y)\, dy + \int_x^1 e^{(x-y)}u(y)\, dy \\
&= e^{-x}\int_0^x e^y u(y)\, dy + e^x \int_x^1 e^{-y}u(y)\, dy,
\end{aligned}$$

luego por el Teorema Fundamental del Cálculo, y álgebra de funciones diferenciables tenemos que $f \in \mathscr{C}^1([0,1])$ con

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -e^{-x}\int_0^x e^y u(y)\, dy + u(x) + e^x \int_x^1 e^{-y}u(y)\, dy - u(x) \\
&= -e^{-x}\int_0^x e^y u(y)\, dy + e^x \int_x^1 e^{-y}u(y)\, dy \\
&= f(x) - 2e^{-x}\int_0^x e^y u(y)\, dy
\end{aligned}$$

Repitiendo el argumento anterior vemos que $f \in \mathscr{C}^2([0,1])$ con

$$f''(x) = f'(x) + 2e^{-x}\int_0^x e^y u(y)\, dy - 2u(x) = f(x) - 2u(x)$$

por otro lado, es fácil ver que $f(0) = f'(0)$ y que

$$f(1) = e^{-1}\int_0^1 e^y u(y)\, dy = -f(1).$$

3. Sea $u = -\frac{1}{2}(f'' - f')$, dado que $f \in \mathscr{C}^2([0,1])$, tenemos que $u \in \mathscr{C}([0,1])$, y por la parte 2) tenemos que $T(u) \in \mathscr{C}^2([0,1])$. Sigue que $h = f - T(u) \in \mathscr{C}^2([0,1])$. Por la parte 2) tenemos que

$$(T(u))'' - T(u) = -2u = 2\left(\frac{1}{2}(f'' - f)\right) = f'' - f'$$

y esto implica que,

$$h'' = f'' - (T(u))'' = f - T(u) = h$$

Además,

$$\begin{aligned} h(0) &= f(0) - T(u)(0) = f'(0) - T(u)'(0) = h'(0) \\ h(1) &= f(1) - T(u)(1) = -f'(1) - (-T(u)'(1)) = -h'(1) \end{aligned}$$

la ecuación $h'' = h$ tiene una solución de la forma $h(x) = ae^x + be^{-x}$ y por lo tanto

$$\begin{matrix} h(0) = h'(0) \\ h(1) = -h'(1) \end{matrix} \implies \begin{matrix} a + b = a - b \\ ae + be^{-1} = -ae + be^{-1} \end{matrix} \iff \begin{matrix} a = 0 \\ b = 0 \end{matrix} \iff h \equiv 0$$

y por lo tanto $T(u) = f$.

4. Vimos que para cada $u \in L^2_{\mathrm{m}}([0,1])$, tenemos que $T(u) \in \mathscr{C}^2([0,1])$, por la parte 2), además por la parte 3) tenemos que $\mathscr{C}^2_0([0,1]) \subseteq \mathrm{im}(T)$ (funciones $\mathscr{C}^2([0,1])$ a soporte compacto). Dado que $\mathscr{C}^2_0[0,1]$ es denso en $\mathscr{C}([0,1])$ y $\mathscr{C}([0,1])$ es denso en $L^2_{\mathrm{m}}([0,1])$, se concluye la primera afirmación. Por otro lado, tenemos que dado que $\overline{\mathrm{im}(T)} = \mathbf{E}$,

$$\ker(T) = \mathrm{im}(T^*)^\perp = \mathrm{im}(T)^\perp = \{0\}$$

y por lo tanto T es inyectivo y así $0 \notin \mathscr{V}P(T)$. Dado que T es compacto y $\mathbf{E}$ es de dimensión infinita, tenemos que $0 \notin \sigma(T)$.

5. Sabemos que si $f = T(u)$, entonces $f'' - f = -2u$. Sigue que

$$\langle T(u), u\rangle = \langle f, -\tfrac{1}{2}(f'' - f)\rangle = -\frac{1}{2}\langle f, f''\rangle + -\frac{1}{2}\int_0^1 |f(x)|^2\, dx$$

pero

$$\begin{aligned} \langle f, f''\rangle &= \int_0^1 f(x) f''(x)\, dx \\ &= f(x)f'(x)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 |f'(x)|^2\, dx \quad \text{(integrando por partes)} \\ &= f(1)f'(1) - f(0)f'(0) - \int_0^1 |f'(x)|^2\, dx \\ &= -\left(|f(1)|^2 + |f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(x)|^2\, dx\right) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\langle T(u),u\rangle = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 |f(x)|^2\,dx + \int_0^1 |f'(x)|^2\,dx + |f(1)|^2 + |f(0)|^2\right)$$

entonces

$$\langle T(u),u\rangle \geq \frac{1}{2}\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}\|T(u)\|_{L^2}, \qquad \forall\, u \in \mathscr{C}([0,1]).$$

Luego por densidad ($\overline{\mathscr{C}([0,1])}^{L^2} = L^2_{\mathrm{m}}([0,1])$) se concluye el resultado pedido.

6. Dado que T es compacto y $0 \notin \mathscr{V}P(T)$, tenemos que $\sigma(T) = \{0\} \cup \mathscr{V}P(T)$. Por otro lado, si $\lambda \in \mathscr{V}P(T)$, entonces $\lambda \in \mathbb{R}$ pues T es autoadjunto. Además, si $\lambda \in \mathscr{V}P(T)$ existe $u \in \mathbf{E}\setminus\{0\}$ tal que $T(u) = \lambda u$, pero $\langle T(u),u\rangle \geq \frac{1}{2}\|u\|_{L^2}^2 \geq 0$ y se sigue que

$$\langle T(u),u\rangle = \langle \lambda u,u\rangle = \lambda\|u\|_{L^2}^2.$$

Por lo tanto $\lambda \geq 0$. Además, como $\sigma(T) \subseteq [-\|T\|_{L^2}, +\|T\|_{L^2}] = [-1,1]$ concluimos que $\sigma(T) \subseteq [0,1]$.

g) Dado que $\sigma(T) = \{0\} \cup \mathscr{V}P(T)$, tenemos que si $\lambda \in \sigma(T)\setminus\{0\}$, entonces $\lambda \in \mathscr{V}P(T)$. Esto implica que existe $u \in L^2_{\mathrm{m}}([0,1])\setminus\{0\}$ tal que $T(u) = \lambda u$. Dado que $T(u) \in \mathscr{C}([0,1])$, necesariamente $u \in \mathscr{C}([0,1])$ y por lo tanto $T(u) \in \mathscr{C}^2([0,1])$ y es solución de la ecuación $f'' - f = -2u$ con $f(0) = f'(0)$ y $f(1) = -f'(1)$, de ahí que

$$T(u)'' - T(u) = -2u = -\frac{2}{\lambda}T(u).$$

Luego $T(u)$ es solución de

$$\begin{cases} f'' + \left(\frac{2-\lambda}{\lambda}\right) f = 0 \\ f(0) = f'(0),\ f(1) = -f'(1). \end{cases} \tag{26.7}$$

Esta EDO tiene una única solución de la forma $f(x) = A\,\mathrm{sen}\,(a_\lambda x) + 2a_\lambda \cos(a_\lambda x)$. Imponiendo las condiciones de borde se tiene

$$B = f(0) = f'(0) = Aa_\lambda$$
$$A[\mathrm{sen}(a_\lambda) + a_\lambda\cos(a_\lambda)] = f(1) = -f'(1) = -Aa_\lambda\cos(a_\lambda) + Aa_\lambda^2\,\mathrm{sen}(a_\lambda)$$

si $A = 0$ entonces $T(u) = f = 0$ y por lo tanto $u = 0$ lo que es una contradicción y por ende $A \neq 0$, entonces

$$(1-a_\lambda^2)\,\mathrm{sen}(a_\lambda) + 2a_\lambda\cos(a_\lambda) = 0.$$

Para la otra implica, basta definir $u(x) = \mathrm{sen}(a_\lambda x) + a_\lambda\cos(a_\lambda x)$ y ver que u es un vector propio asociado a λ (pues por construcción es solución de (26.9)). Finalmente, dado que T es compacto, sabemos que $\mathscr{V}P(T)$ es un conjunto numerable (podría ser vacío o finito). Por la primera parte, sabemos que $\lambda \in \mathscr{V}P(T)$ si y sólo si

$$(1-a_\lambda^2)\,\mathrm{sen}(a_\lambda) + 2a_\lambda\cos(a_\lambda) = 0$$

Notemos que si $a_\lambda = 1$ entonces $\cos(a_\lambda) = 0$ y así $a_\lambda = \frac{\pi}{2} + k\pi$ para algún $k \in \mathbb{N}$ lo que es una contradicción y si $\cos(a_\lambda) = 0$ entonces $a_\lambda = 1$, contradicción. Por lo tanto

$$\tan(a_\lambda) = \frac{2a_\lambda}{a_\lambda^2 - 1} \tag{26.8}$$

Es decir, $\lambda \in \mathscr{V}P(T)$ si y sólo si $\tan(a_\lambda) = \frac{2a_\lambda}{a_\lambda^2-1}$. Usando la indicación, vemos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un único a_{λ_k} que verifica la ecuación (26.8) y es tal que $n\pi < a_{\lambda_k} < n\pi + \pi/2$,

$$\begin{aligned}
n\pi < a_{\lambda_k} < n\pi + \frac{\pi}{2} &\iff n\pi < \sqrt{\frac{2-\lambda_k}{\lambda_k}} < n\pi + \frac{\pi}{2} \\
&\iff n^2\pi^2 < \frac{2-\lambda_k}{\lambda_k} < \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2 \\
&\iff n^2\pi^2 + 1 < \frac{2}{\lambda_k} < \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2 + 1 \\
&\iff \frac{2}{\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2 + 1} < \lambda_k < \frac{2}{n^2\pi^2 + 1}
\end{aligned}$$

□

26.2.5 Problema 3 - Certamen 3 - 2020

1. *a*) Sea $|\mu| = \sup\limits_{y\in\mathbf{Y}} \|\mu_y\|_{M(\mathbf{X})} = \sup\limits_{y\in\mathbf{Y}} \sup\limits_{\substack{f\in\mathscr{C}(\mathbf{X})\\ \|f\|=1}} \left|\int f\, d\mu_y\right|$. Sea $f \in \mathscr{C}(\mathbf{X})$ sabemos que u satisface la Propiedad (P) y por lo tanto la función $y \mapsto \int f\, d\mu_y$ es continua. Como $\mathbf{Y}$ es un espacio métrico compacto entonces el conjunto $\{\int f\, d\mu_y \ : \ y \in \mathbf{Y},\ \|f\|_{\mathscr{C}(\mathbf{X})} = 1\}$ es acotado. Como $\mathscr{C}(\mathbf{X})$ es un espacio métrico completo, entonces por el Teorema de Banach-Steinhaus,

$$|\mu| = \sup_{y\in\mathbf{Y}} \sup_{\substack{f\in\mathscr{C}(\mathbf{X})\\ \|f\|=1}} \left|\int f\, d\mu_y\right| < +\infty$$

   b) Definamos

$$\begin{aligned}
T_\mu \ : \ \mathscr{C}(\mathbf{X}) &\longrightarrow \mathscr{C}(\mathbf{Y}) \\
f &\longmapsto T_\mu f : \quad \begin{aligned} \mathbf{Y} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ y &\longmapsto T_\mu f(y) = \int f(x)\, d\mu_y(x) \end{aligned}
\end{aligned} \tag{26.9}$$

   Veamos que T_μ es lineal continuo y más aún, $\|T_\mu\| = |\mu|$. Primero notemos que T_μ está bien definido. Esto se debe a que para cada $f \in \mathscr{C}(\mathbf{X})$ y cada $y \in \mathbf{Y}$, $\mu_y \in M(\mathbf{X}) = \mathscr{C}(\mathbf{X})^*$, luego

$$T_\mu f(y) = \langle \mu_y, f\rangle_{\mathscr{C}(\mathbf{X})^*, \mathscr{C}(\mathbf{X})}$$

   está bien definido. Más aún, $T_\mu f \in \mathscr{C}(\mathbf{Y})$ ya que μ satisface la Propiedad (P). Además, T_μ es lineal, esto es directo de la definición de T_μ y de la linealidad de la integral. Ahora veamos que T_μ es continua, para esto, notemos que

$$\|T_\mu f\|_{\mathscr{C}(\mathbf{Y})} = \sup_{y\in\mathbf{Y}} |T_\mu f(y)|$$

con lo cual se tiene que,

$$\begin{aligned}
\|T_\mu\|_{\mathscr{L}C(\mathscr{C}(\mathbf{X}),\mathscr{C}(\mathbf{Y}))} &= \sup_{\|f\|_{\mathscr{C}(\mathbf{X})}=1} \|T_\mu f\|_{\mathscr{C}(\mathbf{Y})} \\
&= \sup_{\|f\|_{\mathscr{C}(\mathbf{X})}=1} \sup_{y\in\mathbf{Y}} |T_\mu f(y)|_{\mathscr{C}(\mathbf{Y})} \\
&= \sup_{y\in\mathbf{Y}} \sup_{\|f\|_{\mathscr{C}(\mathbf{X})}=1} |\mu_y f| \\
&= \sup_{y\in\mathbf{Y}} \|\mu_y\|_{M(\mathbf{X})} \quad \text{(pues } \mu_y \text{ es una medida de Radon)} \\
&= |\mu|.
\end{aligned}$$

2. Sea $T:\ \mathscr{C}(\mathbf{X}) \to \mathscr{C}(\mathbf{Y})$ y sea $f \in \mathscr{C}(\mathbf{X})$ e $y \in \mathbf{Y}$. Queremos probar que existe $\mu_y \in (\mathscr{C}(\mathbf{X}))^* = M(\mathbf{X})$ tal que satisface la Propiedad (P). Para ello definamos

$$\mu_y(f) = (Tf)(y),$$

luego $\mu_y :\ \mathscr{C}(\mathbf{X}) \to \mathbb{K}$. Veamos que μ_y es lineal continua. Primero notemos que la linealidad de μ_y viene directo de la linealidad de T. Para la continuidad, notemos que

$$\begin{aligned}
|\mu_y f| &= |Tf(y)| \\
&\leq \|Tf\|_{\mathscr{C}(\mathbf{Y})} \\
&\leq \|T\|_{\mathscr{L}C} \|f\|_{\mathscr{C}(\mathbf{X})} \quad \text{pues } T \text{ es lineal continuo}
\end{aligned}$$

con esto, $\mu_y \in (\mathscr{C}(\mathbf{X}))^*$, es decir, μ_y es una medida de Radon. Veamos ahora que μ_y satisface la Propiedad (P). Sea $f \in \mathscr{C}(\mathbf{X})$, por definición $\mu_y f = Tf(y)$, pero $Tf \in \mathscr{C}(\mathbf{Y})$ y por lo tanto $y \mapsto \mu_y f$ es continua.

3. Para demostrar el resultado, usaremos la indicación. El Teorema de Arzelá-Ascoli, dice que una familia $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{C}(X)$ es relativamente compacto si y sólo si $\mathscr{F}$ es equicontinua. Luego,

$$\begin{aligned}
T_\mu \text{ es compacto } &\iff T_\mu(\overline{\mathbb{B}_{C(\mathbf{X})}}) \subseteq \mathscr{C}(\mathbf{Y}) \text{ es relativamente compacto} \\
&\iff T_\mu(\overline{\mathbb{B}_{C(\mathbf{X})}}) \subseteq \mathscr{C}(\mathbf{Y}) \text{ es equicontinua} \\
&\iff (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall f \in \overline{\mathbb{B}_{\mathscr{C}(\mathbf{X})}})\ d(y,y') < \delta \implies |T_\mu f(y) - T_\mu f(y')| < \varepsilon \\
&\iff (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall f \in \overline{\mathbb{B}_{\mathscr{C}(\mathbf{X})}})\ d(y,y') < \delta \implies |\mu_y f - \mu_{y'} f| < \varepsilon \\
&\iff (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)\ d(y,y') < \delta \implies \|\mu_y - \mu_{y'}\|_{M(\mathbf{X})} < \varepsilon \\
&\iff \mu \text{ es uniformemente continua en } \mathbf{Y}
\end{aligned}$$

donde la última equivalencia se tiene por le hecho de que $\mathbf{Y}$ es un espacio métrico compacto e $y \mapsto \mu_y$ continua.

4. *a*) Supongamos que T es compacto y veamos que existe K que satisface las hipótesis del enunciado. Como T es compacto entonces de la parte 2) tenemos que existe $\mu : \mathbf{Y} \to M(\mathbf{X})$ tal que μ satisface la Propiedad (P) y $T = T_\mu$, además, de la parte 3) tenemos que $y \mapsto \mu_y$ es continua. Como $y \mapsto \mu_y$ es continua y $\mathbf{Y}$ es compacto entonces $\mu(\mathbf{Y}) \subseteq M(\mathbf{X})$ es compacto. Además, como $\mathbf{X}$ es compacto, toda medida de Radon sobre $\mathbf{X}$ es finita. Con esto, para todo $y \in \mathbf{Y}$, μ_y es medida de Radon finita. Luego, utilizando la indicación obtenemos que,

$$\exists\, m \in M(\mathbf{X}),\ \forall\, y \in \mathbf{Y},\ \forall\, A \in \mathscr{B}(\mathbf{X}) \ \text{ tal que si } m(A) = 0 \text{ entonces } \mu_y(A) = 0$$

donde $\mathscr{B}(\mathbf{X})$ denota los Borealianos en $\mathbf{X}$. En otras palabras, m es media de Radon positiva y finita que es absolutamente continua con respecto a μ_y, para todo $y \in \mathbf{Y}$. Luego, por Radon-Nikodým, para todo $y \in \mathbf{Y}$, existe $K_y \in L^1_m(\mathbf{X})$ tal que

$$\forall\, A \in \mathscr{B}(\mathbf{X}),\ \mu_y(A) = \int_A K_y\, dm$$

y extendiendo por densidad de funciones simples,

$$\forall\, y \in \mathbf{Y},\ \exists\, K_y \in L^1_m(\mathbf{X}),\ \forall\, f \in \mathscr{C}(\mathbf{X}) \quad \mu_y(f) = \int f K_y\, dm.$$

Definamos $K(y,x) = K_y(x)$. Así, para todo $f \in \mathscr{C}(\mathbf{X})$ y para todo $y \in \mathbf{Y}$,

$$(Tf)(y) = \int f(x) K(y,x)\, dm(x).$$

Debemos ver que para todo $y \in \mathbf{Y}$, la función $K_y : x \mapsto K(y,x)$ está en $L^1_m(\mathbf{X})$ pero esto viene directo de la definición de K_y como derivada de Radon-Nikodým. Veamos ahora que la función $y \mapsto K_y$ esta en $\mathscr{C}(\mathbf{Y}, L^1_m(\mathbf{X}))$. Sean $y, y' \in \mathbf{Y}$

$$\begin{aligned}\|K_y - K_{y'}\|_{L^1} &= \int |K_y - K_{y'}|\, dm \\ &= \|\mu_y - \mu_{y'}\|_{M(\mathbf{X})}\end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene por la indicación de la parte 2 (que se probará más adelante). La continuidad se concluye de la continuidad de $y \mapsto \mu_y$ (parte 3)).
Para la otra implicancia, supongamos que K es una función que satisface las propiedades del enunciado, $T \in \mathscr{L}C(\mathscr{C}(\mathbf{X}), \mathscr{C}(\mathbf{Y}))$, $(Tf)(y) = \int f(x)K(y,x)\, dm(x)$. Veamos que T es compacto, para ello utilizaremos el Teorema de Arzelá-Ascoli. Sea $f \in \overline{\mathbb{B}_{\mathscr{C}(\mathbf{X})}}$

$$\begin{aligned}|(Tf)(y') - (Tf)(y)| &\le \int_{\mathbf{X}} |K(y',x) - K(y,x)||f|\, dm(x) \\ &\le \|f\|_\infty \|K_{y'} - K_y\|_{L^1}\end{aligned}$$

luego K_y es continua sobre un compacto $\mathbf{Y}$, K_y es equicontinua y por lo tanto $T(\overline{\mathbb{B}_{\mathscr{C}(\mathbf{X})}})$ es equicontinuo y por el Teorema de Arzelá-Ascoli, T es compacto.

b) Demostremos la indicación. Sea λ una medida de Radon positiva sobre X, donde X es un espacio métrico compacto. Sea $\psi \in L^1_\lambda(X)$,

$$\nu(f) = \int f\psi\, d\lambda \quad \forall\, f \in \mathscr{C}(X)$$

Notemos que $\psi\, d\lambda$ es la derivada de Randon-Nikodým y por lo tanto ν está bien definida, es decir, es una medida de Radon. Además,

$$|\nu(f)| \le \int |f||\psi|\, d\lambda \le \|f\|_{\mathscr{C}(X)} \int |\psi|\, d\lambda = \|f\|_{\mathscr{C}(X)} \|\psi\|_{L^1_\lambda(X)}$$

y por lo tanto $\|\nu\|_{M(X)} \le \|\psi\|_{L^1_\lambda(X)}$. Además X es compacto y por lo tanto ν es acotada. Basta demostrar que $\|\nu\|_{M(X)} \ge \|\psi\|_{L^1_\lambda(X)}$. Sea $\varepsilon > 0$, notemos que para todo $f \in \mathscr{C}(X)$,

$$|\nu|(f) = \int f|\psi|\, d\lambda$$

y por ende para $f = \text{signo}(\psi)$ tenemos que

$$\int f\, d|\nu| = \int f|\psi|\, d\lambda.$$

Ahora, veamos que $f \in L^1_{|\nu|}(X)$

$$\int |\text{signo}(\psi)|\, d\nu = \int |\text{signo}(\psi)||\psi|\, d\lambda = \int \psi\, d\lambda < +\infty$$

y por lo tanto $f \in L^1_{|\nu|}(X)$. Por densidad de $\mathscr{C}(X)$ en $L^1_{|\nu|}(X)$, existe $g \in \mathscr{C}(X)$ tal que

$$\|\text{signo}(\psi) - g\|_{L^1_{|\nu|}(X)} < \varepsilon$$

y sin perdida de generalidad, podemos suponer que $\|g\|_{\mathscr{C}(X)} \leq 1$. Esto equivale a que $\int |\text{signo}(\psi) - g|\, d\lambda < \varepsilon$. Luego,

$$\begin{aligned}\left|\nu(g) - \int |\psi|\, d\lambda\right| &= \left|\int g\psi\, d\lambda - \int \text{signo}(\psi)\psi\, d\lambda\right| \\ &\leq \int |g - \text{signo}(\psi)||\psi|\, d\lambda \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

y por lo tanto $|\nu(g) - \int |\psi|\, d\lambda| < \varepsilon$ con $\|g\| \leq 1$ y así,

$$\nu(g) > \int |\psi|\, d\lambda - \varepsilon \quad \text{con } \|g\| \leq 1$$

y entonces

$$\|\nu(g)\|_{M(X)} \geq \int |\psi|\, d\lambda - \varepsilon$$

y se concluye que $\|\nu(g)\|_{M(X)} = \int |\psi|\, d\lambda$. Finalmente el resultado sigue del hecho que como T es compacto entonces para todo $y \in \mathbf{Y}$, $Tf(y) = \mu_y(f)$. Utilizando la indicación con μ_y como ν y $\psi = K_y$,

$$\begin{aligned}\|T\|_{\mathscr{L}C(C(\mathbf{X}),C(\mathbf{Y}))} &= \sup_{y\in\mathbf{Y}} \|\mu_y\|_{M(\mathbf{X})} \\ &= \sup_{y\in\mathbf{Y}} \int |K(y,x)|\, dm\end{aligned}$$

c) Consideremos $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = [0,1]$ (e.m. compacto) y el operador $T : C(\mathbf{X}) \to C(\mathbf{Y})$ definido por

$$Tf(y) = \int_0^1 K(y,x) f(x)\, dy$$

con $K(y,x) = |x-y|^{-\alpha}$ y m la medida de Lebesgue.
Veamos que K satisface la Propiedad (P) en 4a) En efecto,

$$\int_0^1 |K(y,x)|\, dx = \int_0^1 |x-y|^{-\alpha}\, dx < +\infty$$

ya que $0<\alpha<1$, y por lo tanto $K_y = K(y,\cdot) \in L^1_{\mathrm{m}}([0,1])$. Veamos que la función $y \mapsto K(y,x)$ para todo $y \in [0,1]$ es continua. Sean $y_1, y_2 \in [0,1]$ con $y_1 < y_2$

$$\begin{aligned}\|K_{y_1} - K_{y_2}\|_{L^1} &= \int_0^1 \left| |x-y_1|^{-\alpha} - |x-y_2|^{-\alpha} \right| \, dx \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left(y_1{}^{1-\alpha} - y_2^{1-\alpha} + (1-y_2)^{1-\alpha} - (1-y_1)^{1-\alpha} + 2^{1+\alpha}(y_2-y_1)^{1-\alpha}\right)\end{aligned}$$

con esto $\lim_{y_1\to y_2} \|K_{y_1} - K_{y_2}\|_{L^1} = 0$ y por lo tanto $y \mapsto K_y$ es continua y por 4a) T es compacto. Finalmente,

$$\begin{aligned}\|T\|_{\mathscr{L}C} &= \sup_{y\in[0,1]} \int_0^1 |K(y,x)| \, dx \\ &= \sup_{y\in[0,1]} \int_0^1 |x-y|^{-\alpha} \, dx \\ &= \sup_{y\in[0,1]} \left(\frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}(1-y)^{1-\alpha} \right) \\ &= \frac{2^\alpha}{1-\alpha} \qquad (y = 1/2)\end{aligned}$$

□

26.2.6 Problema 2 - Certamen 3 - 2021

1. Dado $x \in \mathbf{E}$ tenemos

$$\|T(x)\|^2_{\mathbf{E}} = \langle T(x), T(x)\rangle_{\mathbf{E}} = \langle T^* \circ T(x), x\rangle_{\mathbf{E}} = \langle T \circ T^*(x), x\rangle_{\mathbf{E}} = \langle T^*(x), T^*(x)\rangle_{\mathbf{E}} = \|T^*(x)\|^2_{\mathbf{E}}.$$

2. Basta notar que si T es normal, entonces $\lambda I - T$ es normal también pues tenemos que

$$(\lambda I - T)\circ(\lambda I - T)^* = (\lambda I - T)\circ(\lambda I - T^*) = (\lambda^2 I - \lambda T^*) - (\lambda T - T \circ T^*) = (\lambda^2 I - \lambda T^*) - (\lambda T - T^* \circ T)$$

y luego

$$(\lambda I - T)\circ(\lambda I - T)^* = (\lambda^2 I - \lambda T) - (\lambda T^* - T^* \circ T) = \lambda I \circ (\lambda I - T) - T^* \circ (\lambda I - \lambda T) = (\lambda I - T^*)\circ(\lambda I - \lambda T)$$

y por otro lado

$$(\lambda I - T)\circ(\lambda I - T)^* = (\lambda I - T^*)\circ(\lambda I - \lambda T) = (\lambda I - T)^* \circ (\lambda I - T).$$

Luego, por la parte (a) tenemos que

$$\|\lambda x - T(x)\|_{\mathbf{E}} = \|\lambda x - T^*(x)\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Esto implica que $\ker(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T^*)$, y por lo tanto $\mathscr{V}P(T) = \mathscr{V}P(T^*)$.
Ahora bien, sean $\lambda, \mu \in \mathscr{V}P(T)$ con $\lambda \neq \mu$. Sean $x \in \ker(\lambda I - T)$ e $y \in \ker(\mu I - T)$ no nulos. Sigue que

$$\lambda\langle x,y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle T(x), y\rangle = \langle y, T(x)\rangle = \langle T^*(y), x\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle = \langle x, \mu y\rangle = \mu\langle x,y\rangle,$$

donde la última igualdad se tiene porque $\ker(\mu I - T) = \ker(\mu I - T^*)$ y por lo tanto $\langle x,y\rangle = 0$.

3. Supongamos que para toda sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ con $\|x_k\|_{\mathbf{E}} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ no se tiene que $\lambda x_k - T(x_k) \to 0$. Esto implica que existe $\alpha > 0$ tal que $\|\lambda x - T(x)\|_{\mathbf{E}} \geq \alpha$ para todo $x \in \mathbf{E}$ con $\|x\|_{\mathbf{E}} = 1$. Por la parte (a), tenemos que $\|\lambda x - T^*(x)\|_{\mathbf{E}} \geq \alpha$, para todo $x \in \mathbf{E}$ con $\|x\|_{\mathbf{E}} = 1$. Luego, reemplazando x por $\frac{1}{\|x\|_{\mathbf{E}}}x$, obtenemos la indicación.
En particular, tenemos que $\lambda I - T$ y $\lambda I - T^*$ son inyectivos. Esto también implica que
$$\overline{\operatorname{im}(\lambda I - T)} = \ker(\lambda I - T^*)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = \mathbf{E}.$$
Pero $\operatorname{im}(\lambda I - T)$ es cerrado, pues para cada $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{im}(\lambda I - T)$ existe $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ tal que $y_k = \lambda x_k - T(x_k)$. Luego, usando la indicación tenemos que si $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge, entonces $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbf{E}$ pues
$$\|y_k - y_j\|_{\mathbf{E}} = \|(\lambda x_k - T(x_k)) - (\lambda x_j - T(x_j))\|_{\mathbf{E}} = \|(\lambda(x_k - x_j) - T(x_k - x_j))\|_{\mathbf{E}} \geq \alpha\|x_k - x_j\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall k, j \in \mathbb{N}.$$
Dado que $\mathbf{E}$ es un espacio de Hilbert, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge, y por lo tanto existe $x \in \mathbf{E}$ tal que $y_k = \lambda x_k - T(x_k) \to \lambda x - T(x) \in \operatorname{im}(\lambda I - T)$.
Esto implica que $\lambda I - T$ es biyectivo, es decir, $\lambda \in \rho(T)$, lo que no puede ser.
4. Sea $\lambda \in \sigma(T)$ y $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ con $\|x_k\|_{\mathbf{E}} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ una sucesión tal que $\lambda x_k - T(x_k) \to 0$; la que existe gracias a la parte (c). Notemos que para
$$t_k = \langle \lambda x_k - T(x_k), x_k\rangle = \lambda - \langle T(x_k), x_k\rangle$$
tenemos que $t_k \to 0$. Luego, dado que T es positivo tenemos
$$t_k \leq t_k + \langle T(x_k), x_k\rangle = \lambda$$
Luego, dado que $t_k \to 0$, tenemos que $\lambda \geq 0$.

26.2.7 Problema 3 - Certamen 3 - 2021

1. Notemos que T es un operador lineal, además está bien definido y es acotado pues:
$$\|\{\lambda_k x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p} \leq \|\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^\infty}\|\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p}.$$
2. Veamos primero que T es compacto. Supongamos que $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a cero. Para $m \in \mathbb{N}$ fijo consideremos el operador $T_m : \ell^p(\mathbb{R}) \to \ell^p(\mathbb{R})$ dado por la fórmula
$$T_m(\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}) = \{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \quad \text{donde } z_k = \begin{cases} \lambda_k x_k & \text{si } k \leq m, \\ 0 & \text{si } k > m, \end{cases} \qquad \forall \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{R}).$$
Claramente T_m es un operador de rango finito, y por lo tanto, es compacto. Por otro lado, $T_m \to T$ en $(\mathscr{L}C(\ell^p(\mathbb{R})), \|\cdot\|_{\mathscr{L}C})$ pues para todo $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{R})$ tenemos
$$\|T(\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}) - T_m(\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}})\|_{\ell^p}^p = \sum_{k=m+1}^{+\infty} |\lambda_k|^p |x_k|^p \leq \sup_{k\geq m+1} |\lambda_k|^p \|\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p}^p.$$
Esto implica que
$$\|T - T_m\|_{\mathscr{L}C} \leq \sup_{k\geq m+1} |\lambda_k|.$$

Dado que $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a cero, tenemos que $\sup_{k\geq m+1} |\lambda_k| \to 0$, y por lo tanto $T_m \to T$. Finalmente, dado que $(\ell^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\ell^p})$ es un espacio de Banach, concluimos que $T \in \mathscr{K}(\ell^p(\mathbb{R}))$.
Supongamos ahora que T es compacto. Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotemos por $e^m = \{e^m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión dada por

$$e^m_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = m, \\ 0 & \text{si } k \neq m. \end{cases} \tag{26.10}$$

Es claro que para todo $m \in \mathbb{N}$ tenemos que $e^m \in \ell^p(\mathbb{R})$ y también $\lambda_m e^m = T(e^m)$. Dado $e^m \neq 0$, tenemos que cada $\lambda_m \in \mathscr{V}P(T)$ con $e^m \in \mathbf{E}_{\lambda_m} = \ker(\lambda_m I - T)$. Ahora bien, como $T \in \mathscr{K}(\ell^p(\mathbb{R}))$ tenemos que $\mathscr{V}P(T) \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$, y por Teorema visto en clases, tenemos que $\mathscr{V}P(T) \setminus \{0\}$ es un conjunto finito o bien es una sucesión que converge a cero.
Si $\lambda_k \neq 0$, por el Teorema de la Alternativa de Fredholm, tenemos que $\mathbf{E}_{\lambda_k}$ es de dimensión finita, luego cada $\mathbf{E}_{\lambda_k}$ puede contener a los más una cantidad finita de sucesiones $\{e^{m_1}, \ldots, e^{m_k}\}$. Esto implica que si $\mathscr{V}P(T)\setminus$ es conjunto finito, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $e^m \in \mathbf{E}_0 = \ker(T)$ para todo $m \geq n$, y por lo tanto $\lambda_m = 0$ para todo $m \geq n$.

3. Basta notar que $\{e^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal completa de $\ell^2(\mathbb{R})$, donde e^m está dado por (26.10), y que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|T(e^k)\|^2_{\ell^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \|\lambda_k e^k\|^2_{\ell^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda_k|^2.$$
4. Dado que $\lambda_k \to 0$ tenemos que $T \circ S_r \in \mathscr{K}(\ell^p(\mathbb{R}))$.
Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y consideremos la ecuación la ecuación
$$T \circ S_r \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \lambda \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}.$$
Esto es equivalente a
$$0 = \lambda_0 0 = \lambda x_0 \quad \text{y} \quad \lambda_{k+1} x_k = \lambda x_{k+1}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$
Si $\lambda \neq 0$, entonces que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} = 0$, luego $\mathscr{V}P(T \circ S_r) \setminus \{0\} = \emptyset$.
Consideremos ahora el caso $\lambda = 0$.
   - Si $\lambda_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, entonces $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} = 0$, luego $\mathscr{V}P(T \circ S_r) = \emptyset$.
   - Si $\lambda_m = 0$ para algún $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, entonces basta tomar $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} = e^{m-1}$ y obtenemos que $0 \in \mathscr{V}P(T \circ S_r)$. En conclusión, $\mathscr{V}P(T \circ S_r) = \{0\}$.

26.2.8 Problema 4 - Certamen 3 - 2021

Notemos que $x \mapsto T(f)(x)$ es una función medible; podemos verla como límite puntual de funciones medibles. Además, claramente T es lineal, por linealidad de la integral.

Dado que $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto, tenemos que $\mathfrak{m}(\mathbf{X}) < +\infty$.

Fijemos $p \in (1, +\infty)$ y denotemos por p' al exponente conjugado de p, es decir, $p' \in (1, +\infty)$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Consideremos primero el caso $q \leq p'$. Notemos que en este caso tenemos que

$$\|g\|_{L^q} \leq \mathfrak{m}(\mathbf{X})^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p'}} \|g\|_{L^{p'}}, \qquad \forall g \in L^{p'}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}). \tag{26.11}$$

Notemos que, por la desigualdad de Hölder, tenemos

$$|T(f)(x)|^{p'} = \left(\int_{\mathbf{X}} |\kappa(x,y)||f(y)|\, dy \right)^{p'} \leq \left(\int_{\mathbf{X}} |\kappa(x,y)|^{p'}\, dy \right) \|f\|^{p'}_{L^p}, \qquad \forall f \in L^p_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}),\ \forall x \in \mathbf{X}.$$

Luego, por (26.11) tenemos que

$$\|T(f)\|_{L^q} \leq \mathfrak{m}(\mathbf{X})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p'}} \|T(f)\|_{L^{p'}} \leq \mathfrak{m}(\mathbf{X})^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p'}} \|\kappa\|_\infty \|f\|_{L^p}, \qquad \forall f \in L^p_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}).$$

Luego, $T \in \mathscr{L}C(L^p_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}), L^q_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}))$ para $q \leq p'$.

Veamos ahora que T es un operador compacto. Consideremos primero el caso que $\kappa : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ es Lipschitz continua. Notemos que por la desigualdad de Hölder tenemos que $T(f) \in \mathscr{C}(\mathbf{X})$ para todo $f \in L^p_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X})$ (formalmente, admite un representante continuo), de hecho es Lipschitz continua pues para todo $x_1, x_2 \in \mathbf{X}$ tenemos

$$|T(f)(x_1) - T(f)(x_2)| \leq \int_{\mathbf{X}} |\kappa(x_1,y) - \kappa(x_2,y)||f(y)|\,dy \leq L_\kappa |x_1 - x_2| \|f\|_{L^1} \leq L_\kappa \|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^n} \mu(\mathbf{X})^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{L^p}.$$

Luego, repitiendo los argumentos vistos en clases, tenemos que $T(\overline{\mathbb{B}_{L^p_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X})}})$ es relativamente compacto en $(\mathscr{C}(\mathbf{X}), \|\cdot\|_\infty)$ gracias al Teorema de Arzelá-Ascoli:

- $T(\overline{\mathbb{B}_{L^p_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X})}})$ es equi-continuo pues

$$|T(f)(x_1) - T(f)(x_2)| \leq L_\kappa \mu(\mathbf{X})^{\frac{1}{p'}} \|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^n}, \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{X},\ \forall f \in \overline{\mathbb{B}_{L^p_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X})}}.$$

- Para todo $x \in \mathbf{X}$ el conjunto $\left\{T(f)(x) \mid f \in \overline{\mathbb{B}_{L^p_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X})}}\right\}$ es acotado en $\mathbb{R}$ pues

$$|T(f)(x)| \leq \|\kappa\|_\infty \|f\|_{L^1} \leq \|\kappa\|_\infty \mu(\mathbf{X})^{\frac{1}{p'}}, \quad \forall f \in \overline{\mathbb{B}_{L^p_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X})}}.$$

Ahora bien, si $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{B}_{L^p_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X})}}$, entonces existe una subsucesión tal que $\{T(f_{k_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge en $(\mathscr{C}(\mathbf{X}), \|\cdot\|_\infty)$, y en particular es de Cauchy para la norma $\|\cdot\|_\infty$. Por otro lado, dado que

$$\|g\|_{L^q} \leq \|g\|_\infty \mathfrak{m}(\mathbf{X})^{\frac{1}{q}}, \qquad \forall g \in \mathscr{C}(\mathbf{X}),$$

tenemos que $\{T(f_{k_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ también es de Cauchy en $(L^q_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}), \|\cdot\|_{L^q})$. Por lo tanto $T(\overline{\mathbb{B}_{L^p_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X})}})$ es secuencialmente compacto en $(L^q_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}), \|\cdot\|_{L^q})$, y por lo tanto, compacto.

Consideremos ahora el caso general $\kappa \in \mathscr{C}(\mathbf{X} \times \mathbf{X})$. Por el Teorema de Stone-Weierstrass, existe una sucesión $\{\kappa_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}(\mathbf{X} \times \mathbf{X})$ que converge uniformemente a κ.

> También se puede argumentar usando el hecho $\kappa \in \mathscr{C}(\mathbf{X} \times \mathbf{X})$ es también uniformemente continua, en vez de pasar lo Stone-Weierstrass.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, denotemos por $T_j : L^p_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}) \to L^q_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X})$ al operador dado por

$$T_j(f)(x) = \int_{\mathbf{X}} \kappa_j(x,y) f(y)\,dy, \qquad \forall f \in L^p_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}),\ \forall x \in \mathbf{X}.$$

Notemos que

$$|T_j(f)(x) - T(f)(x)| \leq \int_{\mathbf{X}} |\kappa_j(x,y) - \kappa(x,y)| f(y)\,dy \leq \|\kappa_j - \kappa\|_\infty \|f\|_{L^1} \leq \|\kappa_j - \kappa\|_\infty \mu(\mathbf{X})^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{L^p}, \qquad \forall f \in L^p_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}),\ \forall x \in$$

Esto implica que

$$\|T_j(f) - T(f)\|_{L^q} \leq \|\kappa_j - \kappa\|_\infty \mu(\mathbf{X})^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p'}} \|f\|_{L^p}, \qquad \forall f \in L^p_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}).$$

En consecuencia, $T_j \to T$ en $\mathscr{L}C(L^p_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}), L^q_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}))$. Dado que $T \in \mathscr{K}(L^p_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}), L^q_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}))$ para todo $j \in \mathbb{N}$, concluimos que $T \in \mathscr{K}(L^p_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}), L^q_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}))$ para todo $p \in (1,+\infty)$ y $q \in (1,p']$.

Finalmente, notemos que $q > p'$ si y sólo si $q' < p$, donde q' denota al exponente conjugado de q, es decir, $q' \in (1,+\infty)$ tal que $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Sea $S : L^{q'}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}) \to L^q_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X})$ el operador dado por

$$S(f)(x) = \int_{\mathbf{X}} \kappa(x,y) f(y)\, dy, \qquad \forall f \in L^{q'}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}),\ \forall x \in \mathbf{X}.$$

Luego, por lo argumentos de la primera parte, tenemos que $S \in \mathscr{K}(L^{q'}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}), L^q_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}))$.

Notemos que $T = \Upsilon \circ S$, donde $\Upsilon : L^p_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}) \to L^{q'}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X})$ es la inyección dada por

$$\Upsilon(f) = f, \qquad \forall f \in L^p_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}).$$

Por (26.11) con p y q' en lugar de p' y q, tenemos que $\Upsilon \in \mathscr{L}C(L^p_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}), L^{q'}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}))$, lo que implica que $T \in \mathscr{K}(L^p_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}), L^q_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X}))$ para todo $p \in (1,+\infty)$ y $q \in (p',+\infty)$.

26.2.9 Problema 5 - Certamen 3 - 2021

Notemos que si $\lambda \in \rho(T)$, entonces $[(\lambda I - T)^{-1}]^*(\lambda I - T^*) = I$ pues $(\lambda I - T)^* = (\lambda I - T^*)$ y para todo $x \in \mathbf{E}$ y $\ell \in \mathbf{E}^*$ tenemos

$$\langle [(\lambda I - T)^{-1}]^*(\lambda I - T^*)(\ell), x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle (\lambda I - T)^*(\ell), (\lambda I - T)^{-1}(x)\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle \ell, (\lambda I - T)(\lambda I - T)^{-1}(x)\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}.$$

Por lo tanto

$$\langle [(\lambda I - T)^{-1}]^*(\lambda I - T^*)(\ell), x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}.$$

De forma similar, $(\lambda I - T^*)[(\lambda I - T)^{-1}]^* = I$ pues

$$\langle (\lambda I - T^*)[(\lambda I - T)^{-1}]^*(\ell), x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle [(\lambda I - T)^{-1}]^*(\ell), (\lambda I - T)(x)\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle \ell, (\lambda I - T)^{-1}(\lambda I - T)(x)\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}},$$

y en consecuencia

$$\langle (\lambda I - T^*)[(\lambda I - T)^{-1}]^*(\ell), x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}} = \langle \ell, x\rangle_{\mathbf{E}^*,\mathbf{E}}.$$

En particular, tenemos que $\rho(T) \subseteq \rho(T^*)$, y por lo tanto $\sigma(T^*) \subseteq \sigma(T)$.

Por otro lado, esto también implica que $\rho(T) \subseteq \rho(T^*) \subseteq \rho(T^{**})$ y $\sigma(T^{**}) \subseteq \sigma(T^*) \subseteq \sigma(T)$.

Recordemos que para todo $A \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$ tenemos que $J_{\mathbf{E}} \circ A = A^{**} \circ J_{\mathbf{E}}$. En particular, como $\mathbf{E}$ es reflexivo, tenemos que $J_{\mathbf{E}}$ es biyectiva y por tanto, A es invertible si y sólo si A^{**} lo es.

Sigue que $\rho(T^{**}) = \rho(T)$ y $\sigma(T^{**}) = \sigma(T)$, lo que completa la demostración.

26.2.10 Problema 6 - Certamen 3 - 2021

1. Dado que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach y $|\lambda| > \|T\|_{\mathscr{L}C}$, tenemos que $\lambda \in \rho(T)$ y por lo tanto R_λ coincide con $\lambda I - T$, que gracias al Teorema de la aplicación abierta, es un operador en $\mathscr{L}C(\mathbf{E})$. Por otro lado, dado $x \in \mathbf{E}$ tenemos que $(\lambda I - T) \circ R_\lambda(x) = x$, y por lo tanto $\lambda R_\lambda(x) = x + t \circ R_\lambda(x)$. Sigue que

$$|\lambda| \|R_\lambda(x)\|_{\mathbf{E}} \leq \|x\|_{\mathbf{E}} + \|T\|_{\mathscr{L}C} \|R_\lambda(x)\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Por lo tanto

$$\|R_\lambda(x)\|_{\mathbf{E}} \leq \frac{\|x\|_{\mathbf{E}}}{|\lambda| - \|T\|_{\mathscr{L}C}}, \qquad \forall x \in \mathbf{E},$$

de donde se obtiene la estimación para $\|R_\lambda\|_{LC}$.

2. Veamos la indicación: tomemos $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus [-\|T\|_{\mathscr{L}C}, \|T\|_{\mathscr{L}C}]$, luego sigue que

$$R_\lambda - R_\mu = R_\lambda \circ (\mu I - T) \circ R_\mu - R_\lambda \circ (\lambda I - T) \circ R_\mu = R_\lambda \circ [(\mu I - T) - (\lambda I - T)] \circ R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda \circ R_\mu.$$

Sea $c > 0$ tal que $\sup\limits_{k \in \mathbb{N}} \|R_{\lambda_k}\|_{LC} \leq c$, luego sigue que

$$\|R_{\lambda_k} - R_{\lambda_j}\|_{\mathscr{L}C} \leq c^2 |\lambda_k - \lambda_j|, \qquad \forall k, j \in \mathbb{N}.$$

Dado que $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge, tenemos que es de Cauchy, y por lo tanto la sucesión $\{R_{\lambda_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathscr{L}C(\mathbf{E})$. Por lo tanto, como $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach, $(\mathscr{L}C(\mathbf{E}), \|\cdot\|_{\mathscr{L}C}$ también es un espacio de Banach, lo que implica que $\{R_{\lambda_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente. Supongamos que $S \in \mathscr{L}C(\mathbf{E})$ es el límite de la sucesión $\{R_{\lambda_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Notemos que

$$R_{\lambda_k} \circ (\lambda_k I - T)(x) = (\lambda_k I - T) \circ R_{\lambda_k}(x) = x, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

En consecuencia

$$S \circ (\lambda I - T)(x) = (\lambda I - T) \circ S(x) = x, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Esto implica que $\lambda \in \rho(T)$ y por lo tanto $S = R_\lambda$.

26.2.11 Problema 7 - Examen - 2021

1. ($\Longrightarrow$) Supongamos que $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$ y que $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ converge débilmente a 0. En particular, $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada y por lo tanto $\{T(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente (fuertemente).
Para ver que $T(x_k) \to 0$, basta ver que toda subsucesión convergente de $\{T(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a cero. Supongamos que $\{T(x_{k_j})\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión convergente. Luego, sigue que

$$\|T(x_{k_j})\|^2 = \langle T(x_{k_j}), T(x_{k_j}) \rangle = \langle T^*(T(x_{k_j})), x_{k_j} \rangle, \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Dado que $T^*(T(x_{k_j}))$ converge fuertemente, pues $T^* \in \mathscr{L}C(E)$, y $\{x_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a cero, tenemos que $\langle T^*(T(x_{k_j})), x_{k_j} \rangle \to 0$ y en consecuencia $T(x_{k_j}) \to 0$.
($\Longleftarrow$) Veamos ahora que $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$. Supongamos que $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ es una sucesión acotada, luego debemos probar que $\{T(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente.
Dado que $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada, ésta tiene una subsucesión débilmente convergente. Luego, existen $\{x_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ y $\bar{x} \in \mathbf{E}$ tal que $x_{k_j} \rightharpoonup \bar{x}$, y en particular, $x_{k_j} - \bar{x} \rightharpoonup 0$. Esto implica entonces que $T(x_{k_j}) - T(\bar{x}) = T(x_{k_j} - \bar{x}) \to 0$, y por lo tanto $\{T(x_{k_j})\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión convergente.
2. Notemos primero que

$$s := \sup_{x \in F,\ \|x\|_{\mathbf{E}} = 1} \langle T(x), x \rangle \in [-\|T\|_{\mathscr{L}C}, \|T\|_{\mathscr{L}C}],$$

pues $F \neq \{0\}$. Luego, podemos tomar una sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq F$ con $\|x_k\|_{\mathbf{E}} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $\langle T(x_k), x_k \rangle \to s$. Dado que $\mathbf{E}$ es reflexivo, $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que converge débilmente. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a $\bar{x}$. Dado que $T \in \mathscr{K}(\mathbf{E})$, gracias a la parte (a), tenemos que $\{T(x_k - \bar{x})\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ convergen fuertemente a cero, pues $\{x_k - \bar{x}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a cero. Esto implica que $T(x_k) \to T(\bar{x})$ fuertemente. A partir de esto, y gracias al Teorema de Banach-Steinhaus, podemos concluir que

$$\langle T(x_k), x_k \rangle \to \langle T(\bar{x}), \bar{x} \rangle.$$

Finalmente, como F es un s.e.v. cerrado (fuerte) de $\mathbf{E}$ también es un subconjunto cerrado débil de $\mathbf{E}$ y por lo tanto $\bar{x} \in F$, lo que implica que $s = \langle T(\bar{x}), \bar{x} \rangle$.

3. Notemos primero que $W_k^\perp \neq \{0\}$ pues $\mathbf{E}$ es de dimensión infinita y además es un s.e.v. cerrado de $\mathbf{E}$. Luego gracias a la parte (b) tenemos que existe $\bar{x} \in W_k^\perp$ tal que

$$\frac{\langle T(\bar{x}),\bar{x}\rangle}{\|\bar{x}\|_{\mathbf{E}}^2} = \max_{x\in W_k^\perp\setminus\{0\}} \frac{\langle T(x),x\rangle}{\|x\|_{\mathbf{E}}^2}.$$

Por otro lado, gracias al Teorema de Descomposición espectral tenemos que

$$T(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \langle x, e_j\rangle e_j, \qquad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Luego, por un lado, dado que $\bar{x} \in W_k^\perp$, tenemos que $T(\bar{x}) = \sum_{j=k}^{\infty} \lambda_j \langle \bar{x}, e_j\rangle e_j$, y en consecuencia

$$\max_{x\in W_k^\perp\setminus\{0\}} \frac{\langle T(x),x\rangle}{\|x\|_{\mathbf{E}}^2} = \frac{\langle T(\bar{x}),\bar{x}\rangle}{\|\bar{x}\|_{\mathbf{E}}^2} = \frac{1}{\|x\|_{\mathbf{E}}^2}\sum_{j=k}^{\infty} \lambda_j \langle \bar{x}, e_j\rangle^2 \leq \frac{\lambda_k}{\|x\|_{\mathbf{E}}^2}\sum_{j=k}^{\infty} \langle \bar{x}, e_j\rangle^2 \leq \lambda_k,$$

pues $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal completa y $\lambda_k \geq \lambda_j$ para todo $j \geq k$.
Por otro lado, notemos que $e_k \in W_k^\perp \neq \{0\}$ pues $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal y por lo tanto

$$\lambda_k = \frac{\langle \lambda_k e_k, e_k\rangle}{\|e_k\|_{\mathbf{E}}^2} = \frac{\langle T(e_k), e_k\rangle}{\|e_k\|_{\mathbf{E}}^2} \leq \max_{x\in W_k^\perp\setminus\{0\}} \frac{\langle T(x),x\rangle}{\|x\|_{\mathbf{E}}^2}.$$

4. Dado $W \in \mathscr{V}_k$, tenemos que $\dim(W) = k$ y por lo tanto W es un s.e.v. cerrado de $\mathbf{E}$. Luego, sigue que $W \oplus W^\perp = \mathbf{E}$, y por lo tanto, si $W^\perp \cap W_{k+1} = \{0\}$, tendríamos que $W_{k+1} \subseteq W$. Sin embargo, esto es absurdo pues $\dim(W_{k+1}) = k+1$ y $\dim(W) = k$.
Por otro lado, dado $x \in W_{k+1}\setminus\{0\}$ existen $\alpha_0,\ldots,\alpha_k \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que $x = \sum_{j=0}^k \alpha_j e_j$ con $\|x\|_{\mathbf{E}}^2 = \sum_{j=0}^k \alpha_j^j$. Esto implica que

$$\langle T(x),x\rangle = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \langle T(x), e_j\rangle = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \langle \sum_{i=0}^{k} \alpha_i T(e_i), e_j\rangle = \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{k} \alpha_j\alpha_i\lambda_i\langle e_i, e_j\rangle = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j^2\lambda_j \geq \lambda_i\|x\|_{\mathbf{E}}^2,$$

donde $i \in \{0,\ldots,k\}$ es el índice menor tal que $\alpha_i \neq 0$. Dado que $\lambda_k \leq \lambda_i$, obtenemos lo pedido.
Para probar ($\bigstar$), notemos por un lado que, como $W_k \in \mathscr{V}_k$, tenemos que

$$\inf_{W\in\mathscr{V}_k} \max_{x\in W^\perp\setminus\{0\}} \frac{\langle T(x),x\rangle}{\|x\|_{\mathbf{E}}^2} \leq \max_{x\in W_k^\perp\setminus\{0\}} \frac{\langle T(x),x\rangle}{\|x\|_{\mathbf{E}}^2} = \lambda_k$$

Por otro lado, dado $W \in \mathscr{V}_k$, tenemos que existe $\hat{x} \in W^\perp \cap W_{k+1}\setminus\{0\}$ y por lo tanto

$$\lambda_k \leq \frac{\langle T(\hat{x}),\hat{x}\rangle}{\|\hat{x}\|_{\mathbf{E}}^2} \leq \max_{x\in W^\perp\cap W_{k+1}\setminus\{0\}} \frac{\langle T(x),x\rangle}{\|x\|_{\mathbf{E}}^2} \leq \max_{x\in W^\perp\setminus\{0\}} \frac{\langle T(x),x\rangle}{\|x\|_{\mathbf{E}}^2}.$$

Como esta desigualdad es válida para todo $W \in \mathscr{V}_k$, obtenemos ($\bigstar$) y vemos que el ínfimo se alcanza en $W = W_k$.

IV

Apéndice: Elementos básicos de cursos previos y notación

Haremos un pequeño resumen de elementos básicos con los que el lector debería estar familiarizado, que también nos servirán para fijar la notación que usaremos a los largo de estas notas. En esta parte de las notas sólo enunciaremos resultados, sin demostrarlos.

Primero comenzaremos con algunos elementos de análisis real, luego con algunos recuerdos de espacios topológicos para finalmente revisar nociones básicas de teoría de la medida.

A. Análisis real

El detalle de las demostraciones de los resultados que presentaremos en esta sección y la siguiente se encuentran en las notas del curso Mat 225 del profesor Pedro Gajardo [**GajNote2021**].

A.1 Espacios Métricos

Definición A.1.1 Supongamos que $\mathbf{X}$ es un conjunto no vacío. Una **métrica** sobre $\mathbf{X}$ es una función $d : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to [0, +\infty)$ que satisface:

- $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$, para cada $x, y \in \mathbf{X}$;
- $d(x,y) = d(y,x)$ para cada $x, y \in \mathbf{X}$;
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para cada $x, y, z \in \mathbf{X}$.

En tal caso, el par $(\mathbf{X}, d)$ lo llamaremos **espacio métrico** (abreviado e.m. en adelante).

Notación A.1.

- *La bola abierta de centro $x \in \mathbf{X}$ y radio $\varepsilon > 0$ la denotaremos por*

$$\mathbb{B}_{\mathbf{X}}(x, \varepsilon) := \{y \in \mathbf{X} \mid \ d(x,y) < \varepsilon\}.$$

- $\operatorname{int}(A)$ *denotará el* ***interior*** *de un subconjunto $A \subseteq \mathbf{X}$, es decir el conjunto*

$$\operatorname{int}(A) := \{x \in \mathbf{X} \mid \exists \varepsilon > 0, \ \textit{tal que } \mathbb{B}_{\mathbf{X}}(x, \varepsilon) \subseteq A\}.$$

- $\overline{B}$ *denotará la* ***adherencia*** *de un subconjunto $B \subseteq \mathbf{X}$, es decir el conjunto*

$$\overline{B} := \{x \in \mathbf{X} \mid \forall \varepsilon > 0, \ \textit{se tiene que } \mathbb{B}_{\mathbf{X}}(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Definición A.1.2 Diremos que un conjunto $A \subseteq \mathbf{X}$ es **abierto** si $A = \mathrm{int}(A)$ y que un conjunto $B \subseteq \mathbf{X}$ es **cerrado** si $B = \overline{B}$.

A.1.1 Sucesiones y completitud

En adelante $\mathbb{N}$ denotará el conjunto de número naturales ($0 \in \mathbb{N}$).

Notación A.2. *Escribiremos $x_k \to x$ para denotar que la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{X}$ converge a $x \in \mathbf{X}$, es decir,*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k_0 \in \mathbb{N}, \quad \textit{tal que } x_k \in \mathbb{B}_{\mathbf{X}}(x,\varepsilon), \quad \forall k \geq k_0.$$

Un conjunto $B \subseteq \mathbf{X}$ es cerrado si $B = \overline{B}$, o equivalentemente,

$$\forall \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq B \text{ tal que } x_k \to x, \quad \text{se tiene que } x \in B.$$

Definición A.1.3 Diremos que $(\mathbf{X}, d)$ es un e.m. es **completo** si toda sucesión de Cauchy converge. Es decir, si una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{X}$ satisface

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k_0 \in \mathbb{N}, \quad \text{tal que } d(x_k, x_j) < \varepsilon, \quad \forall k, j \geq k_0,$$

entonces necesariamente existe $x \in \mathbf{X}$ tal que $x_k \to x$.

A.1.2 Consecuencias importantes de la completitud

Los siguientes son dos resultados fundamentales en análisis asociados a e.m. completos.

Lema — Baire. Supongamos que $(\mathbf{X}, d)$ es un **e.m. completo** y que $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una familia de subconjuntos cerrados de $\mathbf{X}$. Si

$$\mathrm{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) \neq \emptyset$$

entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{int}(E_{k_0}) \neq \emptyset$.

La condición en el Lema de Baire también se escribe en forma contrapositiva:

$$\mathrm{int}(E_k) = \emptyset, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \emptyset.$$

Teorema A.1.1 — Punto Fijo de Banach. Supongamos que $(\mathbf{X}, d)$ es un **e.m. completo** y que $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ es una función **contractante**:

$$\exists \kappa \in (0,1), \quad \text{tal que} \quad d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \kappa d(x,y), \qquad \forall x, y \in \mathbf{X}.$$

Luego, φ tiene un **único punto fijo**, es decir, existe un único $\bar{x} \in \mathbf{X}$ tal que $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$.

A.2 Espacio de métricos compactos

Definición A.2.1 Diremos que un e.m. $(\mathbf{X},d)$ es **totalmente acotado** si para todo $\varepsilon>0$ existen $x_1,\dots,x_m\in\mathbf{X}$ tales que

$$\mathbf{X}\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}\mathbb{B}_{\mathbf{X}}(x_i,\varepsilon).$$

Proposición A.2.1 Supongamos que $(\mathbf{X},d)$ es un e.m. Luego, las siguientes afirmaciones son equivalente:
1. $(\mathbf{X},d)$ es compacto.
2. $(\mathbf{X},d)$ es secuencialmente compacto.
3. $(\mathbf{X},d)$ es completo y totalmente acotado.

Notación A.3. *Supongamos que* $(\mathbf{X},d_{\mathbf{X}})$ *e* $(\mathbf{Y},d_{\mathbf{Y}})$ *son dos e.m.. Denotaremos por* $\mathscr{C}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ *al conjunto de funciones continuas* $f:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$*, es decir, la colección de todas las funciones que satisfacen:*

$$\forall x_0\in\mathbf{X},\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ tal que } d_{\mathbf{X}}(x,x_0)<\delta \implies d_{\mathbf{Y}}(f(x),f(x_0))<\varepsilon.$$

Si $(\mathbf{X},d_{\mathbf{X}})$ es un e.m. compacto, entonces la función $d_\infty:\mathscr{C}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\times\mathscr{C}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\to\mathbb{R}$ definida más abajo es una métrica sobre $\mathscr{C}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$.

$$d_\infty(f,g):=\max_{x\in\mathbf{X}} d_{\mathbf{Y}}(f(x),g(x)),\qquad \forall f,g\in\mathscr{C}(\mathbf{X},\mathbf{Y}).$$

Si además, $(\mathbf{Y},d_{\mathbf{Y}})$ es un e.m. completo, entonces $(\mathscr{C}(\mathbf{X},\mathbf{Y}),d_\infty)$ es un e.m. completo.

Definición A.2.2 Diremos que una sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathscr{C}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ **converge uniformemente** a una función $f:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ si

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists k_0\in\mathbb{N} \text{ tal que } \sup_{x\in\mathbf{X}} d_{\mathbf{Y}}(f(x),f_k(x))<\varepsilon,\qquad \forall k\geq k_0.$$

Si $(\mathbf{X},d_{\mathbf{X}})$ es un e.m. compacto, esto equivale a $d_\infty(f,f_k)\to 0$.

Definición A.2.3 Diremos que un subconjunto $\mathscr{F}\subseteq\mathscr{C}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ es **equi-continuo** si:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ tal que } \forall f\in\mathscr{F} \text{ tenemos que } d_{\mathbf{X}}(x_1,x_2)<\delta \implies d_{\mathbf{Y}}(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon.$$

■ **Ejemplo A.2.2** El conjunto de todas las funciones $f:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ que son **Lipschitz continuas** de módulo $L\geq 0$ es equi-continuo:

$$d_{\mathbf{Y}}(f(x_1),f(x_2))\leq L d_{\mathbf{X}}(x_1,x_2),\qquad \forall x_1,x_2\in\mathbf{X}$$

■

Teorema A.2.3 — Arzelá-Ascoli. Supongamos que $(\mathbf{X},d_{\mathbf{X}})$ es un e.m. compacto e $(\mathbf{Y},d_{\mathbf{Y}})$ es un e.m. completo. Si $\mathscr{F}\subseteq\mathscr{C}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, entonces $\overline{\mathscr{F}}$ es compacto en el e.m. $(\mathscr{C}(\mathbf{X},\mathbf{Y}),d_\infty)$ si y sólo si $\mathscr{F}$ es equi-continuo y para todo $x\in\mathbf{X}$ tenemos que

$$\overline{\{f(x)\mid f\in\mathscr{F}\}}$$

es compacto en $\mathbf{Y}$. En particular, toda sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathscr{F}$ tiene una subsucesión que converge uniformemente a algún $f \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

A.3 Espacios de Banach

A.3.1 Espacios vectoriales normados

En adelante, y a menos que se diga lo contrario, reservaremos la notación $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \ldots$ para **espacios vectoriales reales**. Además, $\mathbb{R}$ denotará el conjunto de número reales.

Definición A.3.1 Supongamos que $\mathbf{E}$ es espacio vectorial. A una función $N\colon \mathbf{E} \to [0, +\infty)$ la llamaremos **norma** si satisface:

- $N(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$;
- $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ para todo $x \in \mathbf{E}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$;
- $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ para todo $x, y \in \mathbf{E}$.

Notación A.4. *Si $N\colon \mathbf{E} \to [0, +\infty)$ es una norma sobre $\mathbf{E}$, usaremos la notación*

$$\|x\|_{\mathbf{E}} := N(x), \qquad \forall x \in \mathbf{E}$$

*para enfatizar la relación de la norma con el espacio $\mathbf{E}$ y diremos que el par $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un **espacio vectorial normado** (abreviado e.v.n. en adelante).*

■ **Ejemplo A.3.1** $(\mathscr{C}([0,1]), \|\cdot\|_{L^1})$ es un e.v.n., donde $\mathscr{C}([0,1])$ denota la colección de todas las funciones $x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continuas y

$$\|x\|_{L^1} := \int_0^1 |x(t)| dt, \qquad \forall x \in \mathscr{C}([0,1]).$$

■

A.3.2 Espacios de Banach

Definición A.3.2 Diremos que un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un **espacio de Banach** si $(\mathbf{E}, d_{\mathbf{E}})$ es un **e.m. completo** para la métrica inducida por la norma:

$$d_{\mathbf{E}}(x, y) := \|x - y\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall\, x, y \in \mathbf{E}.$$

En el caso de e.v.n. de dimensión infinita no todo e.v.n. es un espacio de Banach. Por ejemplo, $(\mathscr{C}([0,1]), \|\cdot\|_{L^1})$ no es un espacio de Banach. En efecto, definamos para cada $k \in \mathbb{N}$ la función continua

$$x_k(t) := \begin{cases} (k+1)t & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{k+1}\right], \\ 1 & \text{si } t \in \left(\frac{1}{k+1}, 1\right]. \end{cases}$$

Luego, cuando $k \to +\infty$ tenemos que la sucesión converge puntualmente a la función

$$x(t) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in (0,1], \\ 0 & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}$$

Es decir, $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ no converge a una función continua. Sin embargo, no es difícil verificar que

$$\|x_k - x_j\|_{L^1} = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{j+1} - \frac{1}{k+1} \right|, \qquad \forall j, k \in \mathbb{N}.$$

Esto en particular muestra que la sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy para la norma $\|\cdot\|_{L^1}$.

■ **Ejemplos A.3.2** Los siguientes son algunos ejemplos de espacios de Banach que usaremos en el curso:

1. $(\mathscr{C}([a,b]),\|\cdot\|_\infty)$, donde $\mathscr{C}([a,b])$ denota la colección de funciones $x\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ continuas y
$$\|x\|_\infty := \max_{t\in[a,b]} |x(t)|, \qquad \forall x\in\mathscr{C}([a,b]).$$
2. $(\ell^p(\mathbb{R}),\|\cdot\|_{\ell^p})$, donde $\ell^p(\mathbb{R})$ es la colección de todas las sucesiones $x=\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$ tales que $\|x\|_{\ell^p}<+\infty$, donde
$$\|x\|_{\ell^p} := \left(\sum_{k=0}^{+\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } p\in[1,+\infty), \qquad \text{o bien} \qquad \|x\|_{\ell^\infty} := \sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k|.$$

■

A.4 Operadores lineales

El concepto de operador lineal continuo jugará un rol fundamental a lo largo del curso.

A.4.1 Continuidad

Proposición A.4.1 Supongamos que $(\mathbf{E},\|\cdot\|_\mathbf{E})$ y $(\mathbf{F},\|\cdot\|_\mathbf{F})$ son dos e.v.n., y supongamos que $L\colon \mathbf{E}\to\mathbf{F}$ es un operador lineal:
$$L(x+\lambda y) = L(x)+\lambda L(y), \qquad \forall x,y\in\mathbf{E},\ \forall\lambda\in\mathbb{R}.$$
Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. existe una constante $c>0$ tal que $\|L(x)\|_\mathbf{F}\le c\|x\|_\mathbf{E}$, para todo $x\in\mathbf{E}$;
2. L es continuo;
3. L es continuo en $x=0$.

■ **Ejemplo A.4.2** Supongamos que $\mathbf{E}=\ell^p(\mathbb{R})$ con la respectiva norma, con $p\in[1,+\infty]$. Consideremos el operador **shift a la derecha** $S_r:\mathbf{E}\to\mathbf{E}$ y el operador **shift a la izquierda** $S_l:\mathbf{E}\to\mathbf{E}$ dados por
$$S_r(x) = (0,x_0,x_1,x_2,x_3,\dots) \qquad \text{y} \qquad S_l(x) = (x_1,x_2,x_3,x_4,\dots), \qquad \forall\, x=\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\in\mathbf{E}.$$
Claramente, S_l y S_r son lineales y continuos, pues
$$\|S_r(x)\|_{\ell^p} = \|x\|_{\ell^p} \quad \text{y} \quad \|S_l(x)\|_{\ell^p}\le\|x\|_{\ell^p}, \qquad \forall\, x\in\mathbf{E}.$$

■

Si $\mathbf{E}$ es de dimensión finita, entonces todo operador lineal será continuo. En efecto, supongamos que $\dim(\mathbf{E})=n$ y sea $\{e_1,\dots,e_n\}$ una base de $\mathbf{E}$. Luego, el operador lineal $L:\mathbf{E}\to\mathbf{F}$ satisface:
$$\|L(x)\|_\mathbf{F} = \left\|L\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right)\right\|_\mathbf{F} = \left\|\sum_{k=1}^n x_k L(e_k)\right\|_\mathbf{F} \le \max_{k=1,\dots,n}\|L(e_k)\|_\mathbf{F}\sum_{k=1}^n |x_k| = c\|x\|_1, \qquad \forall\, x\in\mathbf{E}.$$
Por otro lado, si $\dim(\mathbf{E})=+\infty$, entonces pueden existir operadores que sean lineales pero no continuos. Más aún, siempre es posible construir un operador lineal discontinuo si $\dim(\mathbf{E})=+\infty$.

■ **Ejemplo A.4.3** Consideremos $\mathbf{E} = \mathscr{C}([-1,1]) \cap \mathscr{C}^1((-1,1))$ con la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$. Definamos

$$L(x) = x'(0), \qquad \forall\, x \in \mathbf{E}.$$

Claramente, L es lineal, pero no es continuo, puesto que si se define la sucesión dada por

$$x_k(t) = \frac{1}{k}\operatorname{sen}(kt), \qquad \forall\, t \in [-1,1].$$

Vemos que $x_k \to 0$ uniformemente cuando $k \to +\infty$, sin embargo, $L(x_k) = \cos(k \cdot 0) = 1$ con lo cual $L(x_k) \to 1$, pero $L(0) = 0$. ■

A.4.2 Espacio de operadores lineales continuos

Notación A.5. *La colección de todos los operadores lineales continuos la denotaremos por* $\mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$.

Este conjunto también tiene la estructura de e.v.n. considerando la norma

$$\|L\|_{\mathscr{L}C} := \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}} \le 1} \|L(x)\|_{\mathbf{F}}, \qquad \forall\, L \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F}).$$

Notar que en particular $\|L(x)\|_{\mathbf{F}} \le \|L\|_{\mathscr{L}C}\|x\|_{\mathbf{E}}$ *para todo* $x \in \mathbf{E}$.

Proposición A.4.4 Supongamos que $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{F},\|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ son e.v.n. . Si $(\mathbf{F},\|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ es un espacio de Banach entonces $(\mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F}),\|\cdot\|_{\mathscr{L}C})$ también es un espacio de Banach.

A.4.3 Teorema de Banach-Steinhaus

Una consecuencia del Lema de Baire es el Teorema de Banach-Steinhaus, también llamado *Principio de Acotamiento Uniforme*, cuya importancia radica en que permite pasar de una cota puntual a una cota global (uniforme) respecto a la norma de una familia de operadores acotados.

Teorema A.4.5 — Banach-Steinhaus. Supongamos que $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach, $(\mathbf{F},\|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ es un e.v.n. y que tenemos una familia de operadores lineales continuos $\{L_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$.

Si para todo $x \in \mathbf{E}$ tenemos que

$$\sup_{i\in I} \|L_i(x)\|_{\mathbf{F}} < +\infty,$$

entonces

$$\sup_{i\in I} \|L_i\|_{\mathscr{L}C} < +\infty.$$

Corolario A.4.6 Supongamos que $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Banach, $(\mathbf{F},\|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ es un e.v.n. y que $\{L_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbf{F})$ es una sucesión dada.

Supongamos que $\lim_{k\to+\infty} L_k(x)$ existe para cada $x \in \mathbf{E}$ **(convergencia puntual)**, entonces el operador $L : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ dado por la fórmula

$$L(x) := \lim_{k\to+\infty} L_k(x), \qquad \forall\, x \in \mathbf{E}$$

es lineal continuo y satisface

$$\|L\|_{\mathscr{L}C} \leq \liminf_{k\to+\infty} \|L_k\|_{\mathscr{L}C} < +\infty.$$

A.5 Espacios de Hilbert

Definición A.5.1 Diremos que una función $B\colon \mathbf{E}\times\mathbf{E}\to\mathbb{R}$ es un **producto interno** (también llamado **producto escalar**) en $\mathbf{E}$ si satisface

- $B(x,y)=B(y,x)$ para todo $x,y\in\mathbf{E}$.
- $x\mapsto B(x,y)$ es lineal para todo $y\in\mathbf{E}$ fijo.
- $B(x,x)>0$ para todo $x\in\mathbf{E}\setminus\{0\}$.

Notación A.6. *Si $B\colon \mathbf{E}\times\mathbf{E}\to\mathbb{R}$ es un producto interno en $\mathbf{E}$, en general usaremos la siguiente notación para denotar al producto interno correspondiente:*

$$\langle x,y\rangle := B(x,y), \qquad \forall x,y\in\mathbf{E}.$$

■ **Ejemplo A.5.1** En $\mathbf{E}:=\ell^2(\mathbb{R})$, el espacio de las sucesiones $x=\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$ tales que $\|x\|_{\ell^2}<+\infty$ podemos consider el producto interno

$$\langle x,y\rangle := \sum_{k=0}^{+\infty} x_k y_k, \qquad \forall x,y\in\ell^2(\mathbb{R}).$$

■

Proposición A.5.2 Supongamos que $\mathbf{E}$ es un e.v. y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un producto interno en $\mathbf{E}$. La función $\|\cdot\|\colon \mathbf{E}\to[0,+\infty)$ dada por

$$\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}, \qquad \forall x\in\mathbf{E}$$

es una norma en $\mathbf{E}$ y satisface las siguientes propiedades:

1. $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$, para todo $x,y\in\mathbf{E}$. **(desigualdad de Cauchy-Schwarz)**;
2. $\|x+y\|^2=\|x\|^2+2\langle x,y\rangle+\|y\|^2$, para todo $x,y\in\mathbf{E}$;
3. $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2+\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2=\frac{1}{2}\|x\|^2+\frac{1}{2}\|y\|^2$, para todo $x,y\in\mathbf{E}$. **(identidad del paralelogramo)**

Definición A.5.2 Sea $\mathbf{E}$ un e.v. dotado con el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Diremos que $(\mathbf{E},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un **espacio de Hilbert** si es un espacio de Banach con la norma inducida por el producto interno.

En tal caso, denotaremos indistintamente $(\mathbf{E},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ o bien $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$.

■ **Ejemplos A.5.3** $\mathbf{E}:=\ell^2(\mathbb{R})$ con el producto interno $\langle x,y\rangle := \sum_{k=0}^{+\infty} x_k y_k$ es un espacio de Hilbert.

■

A.5.1 Teorema de la proyección

El Teorema de la Proyección nos permite justificar la existence de un (único) elemento en K donde se alcanza el ínfimo en la definición de la distancia de un punto a un conjunto. Un concepto fundamental para la unicidad en este resultado es el de *convexidad*.

Definición A.5.3

1. La **distancia** de un punto $x \in \mathbf{E}$ a un conjunto $K \subseteq \mathbf{E}$ es la cantidad

$$\operatorname{dist}(x,K) := \inf_{y\in K} \|x-y\|_{\mathbf{E}}.$$

2. Diremos que un conjunto $C \subseteq \mathbf{E}$ es **convexo** si y sólo si

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in C, \qquad \forall\, x,y \in C, \quad \forall\, \lambda \in [0,1].$$

Teorema A.5.4 — Proyección. Supongamos que $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert. Supongamos que $K \subseteq \mathbf{E}$ es un conjunto cerrado, convexo y no vacío. Luego para todo $x \in \mathbf{E}$ existe un único $y \in K$ tal que

$$\operatorname{dist}(x,K) = \|x-y\|_{\mathbf{E}}.$$

Además, este punto está caracterizado como la única solución en K de la desigualdad

$$\langle x-y, z-y\rangle \leq 0, \qquad \forall\, z \in K.$$

Notación A.7. *Dado $x \in \mathbf{E}$, al punto $y \in K$ dado por el teorema precedente lo llamaremos la* ***proyección*** *de x sobre K y lo denotaremos por $P_K(x)$.*

Notemos que en el caso que K sea un s.e.v. de $\mathbf{E}$ la condición

$$\langle x - P_K(x), z - P_K(x)\rangle \leq 0, \qquad \forall z \in K,$$

es equivalente a

$$\langle x - P_K(x), z - P_K(x)\rangle = 0, \qquad \forall z \in K,$$

puesto que $P_K(x) - 2z \in K$ cualquiera sea $z \in K$.

El Teorema de la Proyección también entrega información sobre la regularidad de la proyección de un punto sobre un conjunto, cuando vemos al punto como una variable.

Proposición A.5.5 Supongamos que $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert. Supongamos que $K \subseteq \mathbf{E}$ es un conjunto cerrado, convexo y no vacío. La función $x \mapsto P_K(x)$ es **Lipschitz continua** de módulo $\kappa = 1$, es decir,

$$\|P_K(x) - P_K(y)\|_{\mathbf{E}} \leq \|x-y\|_{\mathbf{E}}, \qquad \forall x,y \in \mathbf{E}.$$

A.5.2 Teorema de Representación de Riesz

Teorema A.5.6 — Representación de Riesz. Supongamos que $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert. Para todo $L \in \mathscr{L}C(\mathbf{E},\mathbb{R})$ existe un único $\varphi_L \in \mathbf{E}$ tal que

$$L(x) = \langle x, \varphi_L\rangle, \qquad \forall\, x \in \mathbf{E}.$$

Notemos también que $\|\varphi_L\|_{\mathbf{E}} = \|L\|_{\mathscr{L}C}$. En efecto, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, vemos que

$$\|L\|_{\mathscr{L}C} = \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}}\leq 1} |L(x)| = \sup_{\|x\|_{\mathbf{E}}\leq 1} |\langle x,\varphi_L\rangle| \leq \|\varphi_L\|_{\mathbf{E}}.$$

Por otro lado, también tenemos

$$\|\varphi_L\|_{\mathbf{E}}^2 = \langle \varphi_L, \varphi_L \rangle = L(\varphi_L) \leq \|L\|_{\mathscr{L}C} \|\varphi_L\|_{\mathbf{E}}.$$

De donde podemos concluir que $\|\varphi_L\|_{\mathbf{E}} = \|L\|_{\mathscr{L}C}$; claramente, tenemos $L \equiv 0$ si y sólo si $\varphi_L \equiv 0$.

A.5.3 Bases de un espacio de Hilbert

Definición A.5.4 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert dotado de un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{E}$ es una sucesión dada. Diremos que $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una **base ortonormal completa** de $\mathbf{E}$ si $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es **ortonormal**, es decir,

$$\langle e_k, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

y además se cumple

$$\forall x \in \mathbf{E}, \quad \langle x, e_k \rangle = 0, \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \tag{A.1}$$

- Una base ortonormal completa de $\mathbf{E}$ también se conoce con el nombre de **base de Hilbert**.
- Gracias al Teorema de Hahn-Banach Geométrico (Corolario 3.2.3), la condición (A.1) es equivalente a que el s.e.v. generado por $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sea denso en $\mathbf{E}$.

Proposición A.5.7 Todo espacio de Hilbert separable tiene una base ortonormal completa.

Teorema A.5.8 Supongamos que $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un espacio de Hilbert. Si $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal completa de $\mathbf{E}$, entonces

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle e_k = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \langle x, e_k \rangle e_k, \qquad \forall x \in \mathbf{E}$$

y además se verifica la **identidad de Bessel-Parseval**

$$\|x\|_{\mathbf{E}}^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2, \qquad \forall x \in \mathbf{E}$$

B. Espacio topológicos

Definición B.0.1 Una colección $\mathscr{T}$ de subconjuntos de $\mathbf{X}$ es una **topología** (sobre $\mathbf{X}$) si:

- $\mathbf{X}, \emptyset \in \mathscr{T}$
- $A_1, A_2 \in \mathscr{T} \implies A_1 \cap A_2 \in \mathscr{T}$.
- $\forall \alpha \in \Lambda,\ A_\alpha \in \mathscr{T} \implies \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \mathscr{T}$.

En tal caso, el par $(\mathbf{X}, \mathscr{T})$ lo llamaremos **espacio topológico** y a los elementos de $\mathscr{T}$ **conjuntos abiertos**. Como contra parte, si $A \subseteq \mathbf{X}$ es abierto, entonces diremos que $B = \mathbf{X} \setminus A$ es un conjunto **cerrado**.

Ejemplos B.0.1

- $\mathscr{T}_{\text{disc}} = \mathscr{P}(\mathbf{X})$ se llama la **topología discreta** y $\mathscr{T}_{\text{triv}} = \{\emptyset, \mathbf{X}\}$ la **topología trivial**.
- Si $(\mathbf{X}, \mathscr{T})$ es un espacio topológico y $K \subseteq \mathbf{X}$ es un subconjunto,

$$\mathscr{T}|_K := \{A \cap K \in \mathscr{P}(\mathbf{X}) \mid A \in \mathscr{T}\}$$

  es una topología sobre K, que llamaremos **topología traza** de K.
- Si $(\mathbf{X}, d)$ es un e.m., entonces $\mathscr{T}_d := \{A \in \mathscr{P}(\mathbf{X}) \mid A \text{ es abierto en el e.m.}\}$ es una topología sobre $\mathbf{X}$. A la topología $\mathscr{T}_d$ la llamaremos **topología inducida por la métrica**.

■

Notación B.1. *Si $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.n. y $d_{\mathbf{E}}$ es la métrica inducida por la norma ($d_{\mathbf{E}}(x,y) := \|x-y\|_{\mathbf{E}}$, para todo $x, y \in \mathbf{E}$), la topología $\mathscr{T}_{d_{\mathbf{E}}}$ la llamaremos la topología de la norma o **topología fuerte** en $\mathbf{E}$. Si $\mathbf{E} = \mathbb{R}$, usaremos la notación $\mathscr{T}_{\mathbb{R}}$.*

Definición B.0.2 Supongamos que $(\mathbf{X}, \mathscr{T})$ es un espacio topológico. Diremos que $V \subseteq \mathbf{X}$ es una **vecindad** de $x \in \mathbf{X}$ si

$$\exists A \in \mathscr{T} \text{ tal que } x \in A \subseteq V.$$

Diremos que V es una vecindad abierta si V es abierto y que es una vecindad cerrada si V es cerrado.

Notación B.2. *Denotaremos por $\mathscr{N}(x)$ a la colección de todas las vecindades de $x \in \mathbf{X}$. Además,*

- $\operatorname{int}(A)$ *denotará el* ***interior*** *de un subconjunto $A \subseteq \mathbf{X}$, es decir el conjunto*

$$\operatorname{int}(A) := \{x \in \mathbf{X} \mid \exists V \in \mathscr{N}(x) \text{ tal que } V \subseteq A\}.$$

- $\overline{B}$ *denotará la* ***adherencia*** *de un subconjunto $B \subseteq \mathbf{X}$, es decir el conjunto*

$$\overline{B} := \{x \in \mathbf{X} \mid \forall V \in \mathscr{N}(x) \text{ se tiene que } V \cap B \neq \emptyset\}.$$

Proposición B.0.2 Supongamos que $(\mathbf{X}, \mathscr{T})$ es un espacio topológico. Un subconjunto $A \subseteq \mathbf{X}$ es abierto si $A = \operatorname{int}(A)$ y un subconjunto $B \subseteq \mathbf{X}$ es cerrado si $B = \overline{B}$.

Definición B.0.3 Supongamos que $(\mathbf{X}, \mathscr{T})$ es un espacio topológico. Diremos que $\Theta \subseteq \mathscr{T}$ es una **base para la topología $\mathscr{T}$** si todo abierto se puede escribir como unión de elementos de Θ.

Si $\Theta \subseteq \mathscr{T}$ es una base para la topología $\mathscr{T}$, dado $x \in \mathbf{X}$ tenemos $V \in \mathscr{N}(x)$ si y sólo si

$$\exists A \in \Theta \text{ tal que } x \in A \subseteq V.$$

■ **Ejemplo B.0.3** Si $(\mathbf{X}, d)$ es un e.m. y $A \subseteq \mathbf{X}$ es abierto, entonces para todo $x \in A$ existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $\mathbb{B}_{\mathbf{X}}(x, \varepsilon_x) \subseteq A$. En particular,

$$A = \bigcup_{x \in A} \mathbb{B}_{\mathbf{X}}(x, \varepsilon_x).$$

Luego,

$$\Theta_d := \{\mathbb{B}_{\mathbf{X}}(x, \varepsilon) \in \mathscr{P}(\mathbf{X}) \mid x \in \mathbf{X},\ \varepsilon > 0\}$$

es una base para la topología inducida por la métrica d. ■

B.1 Funciones continuas

Definición B.1.1 Supongamos que $(\mathbf{X}, \mathscr{T}_{\mathbf{X}})$ e $(\mathbf{Y}, \mathscr{T}_{\mathbf{Y}})$ son dos espacios topológicos. Diremos que $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ es **continua** en $x \in \mathbf{X}$ si:

$$\forall V \in \mathscr{N}(f(x)),\ \exists W \in \mathscr{N}(x) \text{ tal que } f(W) \subseteq V.$$

Diremos que f es continua, si es continua en todo $x \in \mathbf{X}$.

Proposición B.1.1 Supongamos que $(\mathbf{X}, \mathscr{T}_{\mathbf{X}})$ e $(\mathbf{Y}, \mathscr{T}_{\mathbf{Y}})$ son dos espacios topológicos. Luego, una función $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ es continua si y sólo si:

$$f^{-1}(A) \in \mathscr{T}_{\mathbf{X}}, \quad \forall A \in \mathscr{T}_{\mathbf{Y}}. \tag{B.1}$$

Notación B.3. *Si una función es continua, escribiremos $f : (\mathbf{X}, \mathscr{T}_{\mathbf{X}}) \to (\mathbf{Y}, \mathscr{T}_{\mathbf{Y}})$ para enfatizar la relación con las topologías.*

Si $\Theta_{\mathbf{Y}} \subseteq \mathscr{T}_{\mathbf{Y}}$ es una base para la topología $\mathscr{T}_{\mathbf{Y}}$, entonces $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ es continua si y sólo si

$$f^{-1}(A) \in \mathscr{T}_{\mathbf{X}}, \quad \forall A \in \Theta_{\mathbf{Y}}. \tag{B.2}$$

En efecto, basta notar que si $A \in \mathscr{T}_{\mathbf{Y}}$ tenemos que existe una colección $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \Theta_{\mathbf{Y}}$ tal que $A = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$. En particular, tenemos que

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(A_\alpha) \in \mathscr{T}_{\mathbf{X}}$$

pues cada $f^{-1}(A_\alpha) \in \mathscr{T}_{\mathbf{X}}$ gracias a (B.2).

B.2 Espacios Topológicos particulares

Notación B.4. *Si $\{\mathbf{X}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una colección de conjuntos, el* ***espacio producto*** *generado por $\{\mathbf{X}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ será el conjunto*

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} \mathbf{X}_\alpha := \{(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \mid x_\alpha \in \mathbf{X}_\alpha, \ \forall \alpha \in \Lambda\}.$$

Si además, $\{(\mathbf{X}_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una colección de espacios topológicos denotaremos por

$$\Theta(\{\mathscr{T}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}) := \left\{ \prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \mid A_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha, \ \forall \alpha \in \Lambda \text{ y } \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Lambda \text{ tales que } A_\alpha = \mathbf{X}_\alpha, \forall \alpha \in \Lambda \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \right\}.$$

El conjunto $\Theta(\{\mathscr{T}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ lo llamaremos los cilindros abiertos del espacio producto.

Si $\mathbf{X}_\alpha \neq \emptyset$ para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces por el Axioma de elección tenemos que

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} \mathbf{X}_\alpha \neq \emptyset.$$

Proposición B.2.1 Supongamos que $\{(\mathbf{X}_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una colección de espacios topológicos. Existe una única topología sobre $\prod_{\alpha\in\Lambda} \mathbf{X}_\alpha$, que denotaremos por

$$\bigotimes_{\alpha\in\Lambda} \mathscr{T}_\alpha,$$

tal que $\Theta(\{\mathscr{T}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ es una base para esta topología.

A esta topología la llamaremos la **topología producto**.

Notación B.5. *Si $(\mathbf{X}, \mathscr{T})$ es un espacio topológico, escribiremos $x_k \to x$ para denotar que la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{X}$ converge a $x \in \mathbf{X}$, es decir,*

$$\forall V \in \mathscr{N}(x), \quad \exists k_0 \in \mathbb{N}, \quad \text{tal que } x_k \in V, \quad \forall k \geq k_0.$$

Definición B.2.1 Diremos que un espacio topológico $(\mathbf{X}, \mathscr{T})$ es **Hausdorff** si

$$\forall x, y \in \mathbf{X},\ x \neq y,\ \exists V_x \in \mathscr{N}(x),\ V_y \in \mathscr{N}(y) \text{ tales que } V_x \cap V_y = \emptyset.$$

Proposición B.2.2 Supongamos que $(\mathbf{X}, \mathscr{T})$ es un espacio topológico Hausdorff.

- Si $x \in \mathbf{X}$, entonces $\{x\} \subseteq \mathbf{X}$ es cerrado.
- Si una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{X}$ converge, su límite es único.
- Si $K \subseteq \mathbf{X}$ es un subconjunto, $(K, \mathscr{T}|_K)$ es un espacio topológico Hausdorff.

Proposición B.2.3 Supongamos que $\{(\mathbf{X}_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una colección de espacios topológicos. Luego $\left(\prod_{\alpha\in\Lambda} \mathbf{X}_\alpha, \bigotimes_{\alpha\in\Lambda} \mathscr{T}_\alpha\right)$ es un espacio topológico Hausdorff si cada $(\mathbf{X}_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ lo es.

Definición B.2.2 Diremos que un espacio topológico $(\mathbf{X}, \mathscr{T})$ es **compacto** si es Hausdorff y cualquier recubrimiento abierto de $\mathbf{X}$ admite un sub-recubrimiento finito, es decir, si $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una colección de conjuntos abiertos de $\mathbf{X}$ tenemos

$$\mathbf{X} \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \quad \Longrightarrow \quad \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Lambda \text{ tal que } \mathbf{X} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_{\alpha_k}.$$

Además, diremos que un subconjunto $K \subseteq \mathbf{X}$ es compacto si $(K, \mathscr{T}|_K)$ es un espacio topológico compacto.

Proposición B.2.4 Supongamos que $(\mathbf{X}, \mathscr{T}_{\mathbf{X}})$ e $(\mathbf{Y}, \mathscr{T}_{\mathbf{Y}})$ son dos espacios topológicos Hausdorff y que $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ es una función continua. Si $(\mathbf{X}, \mathscr{T}_{\mathbf{X}})$ es compacto, entonces $f(\mathbf{X})$ es un subconjunto compacto de $(\mathbf{Y}, \mathscr{T}_{\mathbf{Y}})$.

Teorema B.2.5 — Tychonoff. Supongamos que $\{(\mathbf{X}_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una colección de espacios topológicos. $\left(\prod_{\alpha\in\Lambda} \mathbf{X}_\alpha, \bigotimes_{\alpha\in\Lambda} \mathscr{T}_\alpha\right)$ es un espacio topológico compacto si cada $(\mathbf{X}_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ lo es

Definición B.2.3 Diremos que un espacio topológico Hausdorff $(\mathbf{X}, \mathscr{T})$ es **secuencialmente compacto** si toda sucesión tiene una subsucesión convergente.

En general, la compacidad no es equivalente a la compacidad secuencial.

Definición B.2.4 Diremos que un espacio topológico $(\mathbf{X}, \mathscr{T})$ es **metrizable** si existe una métrica tal que $\mathscr{T} = \mathscr{T}_d$, donde $\mathscr{T}_d$ es la topología inducida por la métrica.

Proposición B.2.6 Supongamos que $(\mathbf{X}, \mathscr{T})$ es un espacio topológico metrizable. Luego, $(\mathbf{X}, \mathscr{T})$ es compacto si y sólo si es secuencialmente compacto.

B.3 Espacios vectoriales topológicos

Definición B.3.1 Supongamos que $\mathscr{T}$ es una topología sobre $\mathbf{E}$ (un espacio vectorial real). Diremos que el par $(\mathbf{E},\mathscr{T})$ es un **espacio vectorial topológico** (abreviado e.v.t. en adelante) si las siguientes funciones son continuas:

- $f_{\text{sum}} : (\mathbf{E}\times\mathbf{E},\mathscr{T}\bigotimes\mathscr{T}) \to (\mathbf{E},\mathscr{T})$ dada por $f_{\text{sum}}(x,y) = x+y$, para todo $x,y\in\mathbf{E}$;
- $f_{\text{mult}} : (\mathbb{R}\times\mathbf{E},\mathscr{T}_{\mathbb{R}}\bigotimes\mathscr{T}) \to (\mathbf{E},\mathscr{T})$ dada por $f_{\text{mult}}(\lambda,x) = \lambda x$, para todo $\lambda\in\mathbb{R}$ y $x\in\mathbf{E}$.

Aquí $\mathscr{T}\bigotimes\mathscr{T}$ y $\mathscr{T}_{\mathbb{R}}\bigotimes\mathscr{T}$ denotan las topologías producto sobre $\mathbf{E}\times\mathbf{E}$ y $\mathbb{R}\times\mathbf{E}$, respectivamente.

Ejemplo B.3.1 Todo e.v.n. $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es un e.v.t. ■

Proposición B.3.2 Supongamos que $(\mathbf{E},\mathscr{T})$ es un e.v.t.

- Para todo $x\in\mathbf{E}$ tenemos que $\mathscr{N}(x) = x+\mathscr{N}(0)$.
- Si $\mathbf{E}$ es de dimensión finita, entonces existe una única topología tal que $(\mathbf{E},\mathscr{T})$ es un e.v.t. Hausdorff.

Proposición B.3.3 Supongamos $(\mathbf{E},\mathscr{T}_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{F},\mathscr{T}_{\mathbf{F}})$ son dos e.v.t. y que $L\colon \mathbf{E}\to\mathbf{F}$ es un operador lineal. Luego, L es continuo si y sólo si L es continuo en $x=0$.

Definición B.3.2 Diremos que un conjunto S es

- **finito** si existe $N\in\mathbb{N}$ y una función biyectiva $\varphi : \{1,2,\ldots,N\}\to S$.
- **(infinito) numerable** si existe una función biyectiva $\varphi : \mathbb{N}\to S$.
  En tal caso, $S = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, donde $x_k = \varphi(k)$ para todo $k\in\mathbb{N}$.

Proposición B.3.4

- Si S_1 y S_2 son conjuntos numerables, entonces $S_1\cup S_2$ y $S_1\times S_2$ son conjuntos numerables.
- Si $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos numerables, entonces $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} S_k$ es un conjunto numerable.

Definición B.3.3 Diremos que un e.v.n. $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ es **separable** si existe un subconjunto numerable y denso en $\mathbf{E}$. En otras palabras, existe $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbf{E}$ que satisface:

$$\forall x\in\mathbf{E},\ \forall\varepsilon>0,\ \exists k\in\mathbb{N} \text{ tal que } \|x-x_k\|_{\mathbf{E}}<\varepsilon.$$

Ejemplo B.3.5 $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n})$ es separable; basta tomar $\mathbb{Q}^n$ como conjunto denso numerable ■

C. Teoría de la medida

Ahora presentaremos un resumen de resultados y definiciones básicas de teoría de la medida. Para mayor detalles sobre las demostraciones de los resultados que enunciaremos en esta parte se recomienda revisar el libro de J. San Martín [**SanBook2017**] y así como el libro de G. Folland [**FolBook1999**].

C.1 Espacios de Medida

Definición C.1.1 Supongamos que Ω es un conjunto no vacío. Una σ-álgebra sobre Ω es una colección $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ de subconjuntos de Ω que satisface:

- $\Omega \in \mathscr{A}$;
- $A \setminus B \in \mathscr{A}$ para cada $A, B \in \mathscr{A}$;
- $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathscr{A}$ si para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos $A_k \in \mathscr{A}$.

En tal caso, el par $(\Omega, \mathscr{A})$ lo llamaremos **espacio medible** y los elementos de $\mathscr{A}$ **conjuntos medibles**.

Si $(\Omega, \mathscr{A})$ es un espacio medible, entonces $\emptyset \in \mathscr{A}$ y $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathscr{A}$ si para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos $A_k \in \mathscr{A}$.

C.1.1 Borelianos y σ-álgebra producto

Definición C.1.2 Supongamos que Ω es un conjunto no vacío y $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ es una colección de subconjuntos de Ω. Definimos la σ-álgebra engendrada por $\mathscr{T}$ como la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\mathscr{T}$:

$$\sigma(\mathscr{T}) := \bigcap_{\mathscr{T} \subseteq \mathscr{A}} \{\mathscr{A} \mid \mathscr{A} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra sobre } \Omega\}.$$

Notación C.1.

- *Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathscr{T}$ es la topología traza sobre Ω, es decir, $\mathscr{T} = \{A \cap \Omega \mid A \text{ es un abierto de } \mathbb{R}^n\}$, entonces $\sigma(\mathscr{T})$ se llama la σ-álgebra de Borel de Ω y la denotaremos $\mathscr{B}(\Omega)$.*
  Los conjuntos que pertenecen a $\mathscr{B}(\Omega)$ se llaman usualmente ***Borelianos*** *o* ***Borel medibles****.*
  En el caso que $\Omega = \mathbb{R}$, escribiremos simplemente $\mathscr{B}$ en vez de $\mathscr{B}(\Omega)$.
- *Si $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ y $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ son dos espacios medibles, denotaremos por $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ a la σ-álgebra sobre $\Omega_1 \times \Omega_2$ engendrada por $\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$. A ésta la llamaremos la σ-álgebra producto.*
- *Si $(\Omega_1, \mathscr{A}_1) = (\Omega_2, \mathscr{A}_2) = (\mathbb{R}, \mathscr{B})$, definiremos $\mathscr{B}^2 = \mathscr{B} \otimes \mathscr{B}$, la cual será una σ-álgebra sobre $\mathbb{R}^2$. De forma inductiva, definimos también $\mathscr{B}^n = \mathscr{B}^{n-1} \otimes \mathscr{B}$, la cual de forma similar será una σ-álgebra sobre $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$).*

$\mathscr{B}^n$ coincide con $\sigma(\mathscr{T}_{\mathbb{R}^n})$, donde $\mathscr{T}_{\mathbb{R}^n}$ es la topología usual de $\mathbb{R}^n$.

C.1.2 Medidas

Definición C.1.3 Una **medida** sobre un espacio medible $(\Omega, \mathscr{A})$ es una función $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ que satisface:

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- $\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k)$ para toda colección $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de conjuntos medibles y **disjuntos**.

En tal caso, a la tupla $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ la llamaremos **espacio de medida**.

Teorema C.1.1 — Hahn. Supongamos que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función creciente y continua por la derecha. Luego, existe una única medida $\mu_F : \mathscr{B} \to [0, +\infty]$ sobre $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ que verifica

$$\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a), \qquad \forall a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\ b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},\ a < b.$$

Notación C.2.

- *La medida μ_F la llamamos la* ***medida de Lebesgue-Stieltjes*** *asociada a F.*
- *En el caso $F(x) = x$, a μ_F la llamamos la* ***medida de Lebesgue*** *y la denotaremos $\mathfrak{m}$.*
  La medida de Lebesgue corresponde a la noción usual de largo de un intervalo real.

C.1.3 Conjuntos Lebesgue medibles

Definición C.1.4 Sea $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida.

- Diremos que un conjuntos $N \subseteq \Omega$ es **despreciable** si existe $A \in \mathscr{A}$ tal que $N \subseteq A$ y $\mu(A) = 0$.
- Una σ-álgebra $\mathscr{A}$ es **completa** si contiene a todos los conjuntos despreciable de $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$.
- Un espacio de medida $(\Omega, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu})$ es una **completación** de $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ si $\overline{\mathscr{A}}$ es completa para $(\Omega, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu})$, $\mathscr{A} \subseteq \overline{\mathscr{A}}$ y $\overline{\mu}|_{\mathscr{A}} = \mu$.

Proposición C.1.2 Sea $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida. Denotemos por $\mathscr{N}$ la colección de conjuntos despreciables respecto a $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ y definamos

$$\overline{\mathscr{A}} = \{A \cup N \mid A \in \mathscr{A},\ N \in \mathscr{N}\}.$$

Luego, $\overline{\mathscr{A}}$ es una σ-álgebra y existe una única medida $\overline{\mu}$ tal que $(\Omega, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu})$ es una completación de $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$.

Notación C.3.

- *En el caso que $\Omega = \mathbb{R}$, escribiremos $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \mathfrak{m})$ para denotar a la completación de $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, \mathfrak{m})$. A $\mathscr{L}$ la llamaremos la σ-álgebra de Lebesgue y a los conjuntos de $\mathscr{L}$* ***Lebesgue-medibles****.*

C.1.4 Medida producto

Definición C.1.5 Una medida sobre un espacio medible $(\Omega, \mathscr{A})$ se dirá σ-finita si existe una colección numerable de conjuntos medibles $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\mu(A_k) \in \mathbb{R}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$.

En tal caso, diremos que tupla $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es un **espacio de medida σ-finita**.

■ **Ejemplos C.1.3**

- Toda medida de Lebesgue-Stieltjes μ_F sobre $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ es σ-finita.
- La completación de un espacio de medida σ-finita también lo es. En particular, $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \mathfrak{m})$ también es un espacio de medida σ-finita.

■

Teorema C.1.4 Supongamos que $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathscr{A}_2, \mu_2)$ son dos espacios de **medida σ-finita**. Luego, existe una única medida σ-finita $\mu_1 \otimes \mu_2 \colon \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \to [0, +\infty]$ sobre $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$ que verifica

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\ \mu_2(A_2), \qquad \forall A_1 \in \mathscr{A}_1,\ A_2 \in \mathscr{A}_2.$$

Notación C.4.

- *Si $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \mu_1) = (\Omega_2, \mathscr{A}_2, \mu_2) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}, \mathfrak{m})$, denotaremos por $\mathfrak{m}^2$ a la medida producto $\mathfrak{m} \otimes \mathfrak{m}$ sobre $\mathscr{B}^2$. Inductivamente, denotaremos también por $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n-1} \otimes \mathfrak{m}$ a la medida producto sobre $\mathscr{B}^n$ $(n \geq 2)$.*
- *$(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}^n, \mathfrak{m}^n)$ denotará la completación de $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n, \mathfrak{m}^n)$. A $\mathscr{L}^n$ la llamaremos la σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.*

C.2 Integral de Lebesgue

C.2.1 Funciones medibles

Supongamos que $(\Omega, \mathscr{A})$ es un espacio medible.

Definición C.2.1 Diremos que una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es **medible** si $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ para todo $B \in \mathscr{B}$.

Proposición C.2.1

1. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es **medible** si y sólo si

$$\{x \in \Omega \mid f(x) < a\} \in \mathscr{A}, \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

2. Si $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles, entonces también serán funciones medibles:

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k, \quad \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k, \quad \limsup_{k\to+\infty} f_k \quad \text{y} \quad \liminf_{k\to+\infty} f_k.$$

Además, si $f_k \to f$ puntualmente (i.e. $f_k(x) \to f(x)$ para todo $x \in \Omega$), entonces f es también medible.

Notación C.5. *En el caso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$:*

- *Si $\mathscr{A} = \mathscr{B}(\Omega)$ diremos que la función es* ***Boreliana****.*
- *Si $\mathscr{A} = \mathscr{L}(\Omega)$ diremos que la función es* ***Lebesgue medible****.*

C.2.2 Funciones simples

Notación C.6. *Dado un conjunto $A \subseteq \Omega$, denotaremos por $\mathbb{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}$ a la* ***función característica*** *del conjunto A:*

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & si\ x \in A, \\ 0 & si\ x \notin A. \end{cases}$$

Definición C.2.2 Supongamos que $(\Omega, \mathscr{A})$ es un espacio medible. Diremos que una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es **simple** si existen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ **disjuntos** tales que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}(x), \qquad \forall x \in \Omega.$$

Toda función simple es una función medible, pues $f^{-1}(B) = \emptyset$ o bien

$$f^{-1}(B) = \bigcup \{A_k \mid \text{ tal que } a_k \in B\}.$$

Proposición C.2.2 Supongamos que $(\Omega, \mathscr{A})$ es un espacio medible y que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función medible. Luego existe una sucesión de funciones simples $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que **converge puntualmente** a f.

Además, si $f \geq 0$ podemos asumir que $f_k \geq 0$ y que $f_k \nearrow f$ puntualmente (i.e. $f_k(x) \nearrow f(x)$ para todo $x \in \Omega$).

C.2.3 Funciones integrables

Definición C.2.3 — Integral. Supongamos que $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida y que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función medible.

1. Si f es una función simple con $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}$, entonces la **integral de f** será la cantidad

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k) \in [0, +\infty].$$

2. Si $f \geq 0$, entonces tomando una sucesión de funciones simples positivas $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que

$f_k \nearrow f$ puntualmente, la **integral de f** será la cantidad

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega f_k d\mu.$$

En cualquier de estos casos diremos que f es **integrable** si $\int_\Omega f d\mu \in \mathbb{R}$.

En el segundo caso, la definición es **independiente** de la sucesión de funciones simples $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tomada.

C.2.4 Teoremas de convergencia

Supongamos que $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida. Ahora revisaremos dos resultados fundamentales que permiten intercambiar límites con integrales.

Teorema C.2.3 — Convergencia monótona. Supongamos que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles positivas tales que $f_k \nearrow f$ puntualmente. Entonces,

$$\int_\Omega f_k d\mu \nearrow \int_\Omega f d\mu.$$

Lema — Fatou. Supongamos que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles positivas. Entonces,

$$\int_\Omega \liminf_{k\to+\infty} f_k d\mu \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_\Omega f_k d\mu.$$

C.2.5 Funciones integrables (definición general)

Definición C.2.4 — Integral. Supongamos que $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida. Diremos que una función medible $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es **integrable** si f_+ y f_- son **integrables**. En tal caso, la integral de f será la cantidad

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f_+ d\mu - \int_\Omega f_- d\mu.$$

Aquí $f_+ = \max\{f, 0\}$ y $f_- = -\min\{f, 0\}$. Notemos que ambas son funciones medibles positivas y cumplen $f = f_+ - f_-$.

Notación C.7.

- *Denotaremos por* $\mathscr{L}^1_\mu(\Omega)$ *al conjunto de funciones* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *que sean integrables en* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$.
- *Si* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}, \mathfrak{m})$ *o* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathscr{L}, \mathfrak{m})$, *escribiremos la integral como*

$$\int_\mathbb{R} f(x)dx := \int_\mathbb{R} f d\mathfrak{m}.$$

Proposición C.2.4 $\mathscr{L}^1_\mu(\Omega)$ es un espacio vectorial. Además dados $f, g \in \mathscr{L}^1_\mu(\Omega)$ tales que $f \leq g$ se cumple que

$$\int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega g d\mu.$$

Dado $A \in \mathscr{A}$ y $f \in \mathscr{L}^1_\mu(\Omega)$, tenemos $f \cdot \mathbb{1}_A \in \mathscr{L}^1_\mu(\Omega)$, y definimos

$$\int_A f d\mu := \int_{\mathbb{R}} f \cdot \mathbb{1}_A d\mu \quad \text{y} \quad \int_a^b f(x)dx := \int_{(a,b)} f d\mathfrak{m}.$$

C.2.6 Teoremas de integración

Ahora revisaremos dos resultados de gran importancia respecto a funciones integrables. Para comprender el primer teorema necesitamos la noción de convergencia en **casi todo punto (c.t.p.)**.

Definición C.2.5 Supongamos que $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida. Diremos que una sucesión de funciones medibles $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ **converge c.t.p.** a una función medible $f : \Omega \to \mathbb{R}$ si el conjunto

$$\left\{x \in \Omega \mid \liminf_{k\to+\infty} f_k(x) < \limsup_{k\to+\infty} f_k(x)\right\} \cup \left\{x \in \Omega \mid \lim_{k\to+\infty} f_k(x) \neq f(x)\right\}$$

es un conjunto despreciable. En tal caso esto lo denotaremos por $f_k \to f$ c.t.p..

Notación C.8. *Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ y $g : \Omega \to \mathbb{R}$ son dos funciones medibles, escribiremos $f \leq g$ c.t.p. si $\{x \in \Omega \mid f(x) > g(x)\}$ es un conjunto despreciable.*

Teorema C.2.5 — Convergencia dominada de Lebesgue. Supongamos que $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida. Supongamos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función medible y que existe $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}^1_\mu(\Omega)$ tal que $f_k \to f$ c.t.p.. Si existe $g \in \mathscr{L}^1_\mu(\Omega)$ tal que $|f_k| \leq g$ c.t.p. para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $f \in \mathscr{L}^1_\mu(\Omega)$ con

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega |f - f_k| d\mu = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega f_k d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

El segundo teorema que revisaremos, permite en particular justificar el cambio de orden en el calculo integrales iteradas.

Teorema C.2.6 — Fubini. Supongamos que $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathscr{A}_2, \mu_2)$ son dos espacios de medida σ-finita. Si $f \in \mathscr{L}^1_{\mu_1\otimes\mu_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, entonces existen conjunto despreciables $N_1 \subseteq \Omega_1$ y $N_2 \subseteq \Omega_2$ tales que

- $f_x := f(x,\cdot) \in \mathscr{L}^1_{\mu_2}(\Omega_2)$ para todo $x \in \Omega_1 \setminus N_1$ y $f^y := f(\cdot,y) \in \mathscr{L}^1_{\mu_1}(\Omega_1)$ para todo $y \in \Omega_2 \setminus N_2$;
- $g \in \mathscr{L}^1_{\mu_1}(\Omega_1)$ y $h \in \mathscr{L}^1_{\mu_2}(\Omega_2)$, donde

$$g(x) := \mathbb{1}_{\Omega_1\setminus N_1}(x) \cdot \int_{\Omega_2} f_x d\mu_2 \quad \text{y} \quad h(y) := \mathbb{1}_{\Omega_2\setminus N_2}(y) \cdot \int_{\Omega_1} f^y d\mu_1, \qquad \forall x \in \Omega_1,\ y \in \Omega_2.$$

Además tenemos que

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f \, d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f_x d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f^y d\mu_1 \right) d\mu_2$$

Notación C.9. *En el caso $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \mu_1) = (\Omega_2, \mathscr{A}_2, \mu_2) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}, \mathfrak{m})$, la integral doble la escribiremos como*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\mathfrak{m} \otimes \mathfrak{m} = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \, dxdy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy \right) dx.$$

Lo mismo será válido para el caso $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \mu_1) = (\Omega_2, \mathscr{A}_2, \mu_2) = (\mathbb{R}, \mathscr{L}, \mathfrak{m})$

C.3 Espacios L^p

C.3.1 Definiciones básicas

Definición C.3.1 Supongamos que $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida. Dado $p \in [1, +\infty)$, denotaremos por $\mathscr{L}^p_\mu(\Omega)$ al conjunto de funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles tales que $|f|^p \in \mathscr{L}^1_\mu(\Omega)$, es decir,

$$f \in \mathscr{L}^p_\mu(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ es medible y } \int_\Omega |f|^p d\mu \in \mathbb{R}.$$

Además, para $f \in \mathscr{L}^p_\mu(\Omega)$ escribiremos $\|f\|_{L^p} := \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$.

También denotaremos por $\mathscr{L}^\infty_\mu(\Omega)$ al conjunto de funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles tales que $\|f\|_{L^\infty} \in \mathbb{R}$, donde

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname*{ínf}_{a \geq 0} \{a \mid |f| \leq a \text{ c.t.p.}\}.$$

Si $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ y $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ es la **medida de conteo**:

$$\mu(A) := \begin{cases} \operatorname{card}(A) & \text{si } A \text{ es finito,} \\ +\infty & \text{si no,} \end{cases}$$

tenemos que $\mathscr{L}^p_\mu(\mathbb{N}) \cong \ell^p(\mathbb{R})$ para $p \in [1, +\infty]$. En este caso, toda función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es medible y se puede asociar a una sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, donde $f(k) = x_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. En tal caso tenemos que

$$\int_{\mathbb{N}} |f|^p d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|^p \quad \text{e} \quad \operatorname*{ínf}_{a \geq 0} \{a \mid |f| \leq a \text{ c.t.p.}\} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|.$$

C.3.2 Espacios L^p

Notación C.10. *Dadas $f : \Omega \to \mathbb{R}$ y $g : \Omega \to \mathbb{R}$, escribiremos $f = g$ c.t.p. si $\{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\}$ es despreciable.*

- Si $f, g \in \mathscr{L}^p_\mu(\Omega)$ son iguales c.t.p., entonces $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^p}$.
- La igualdad c.t.p. induce una relación de equivalencia: $f \sim g \iff f = g$ c.t.p..
- Si $[f]$ corresponde a la clase de equivalencia de $f \in \mathscr{L}^p_\mu(\Omega)$, entonces podemos definir una norma en este espacio via la fórmula $\|[f]\|_{L^p} := \|f\|_{L^p}$.

Definición C.3.2 Supongamos que $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida. Dado $p \in [1, +\infty]$, denotaremos por $L^p_\mu(\Omega)$ al conjunto cociente $\mathscr{L}^p_\mu(\Omega)/\sim$. En otras palabras,

$$L^p_\mu(\Omega) := \left\{ [f] \mid f \in \mathscr{L}^p_\mu(\Omega) \right\}.$$

donde $[f] = \{g : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible} \mid f = g \text{ c.t.p.}\}$

Abusando de la notación, escribiremos $f \in L^p_\mu(\Omega)$, donde f es un representante de la clase de equivalencia.

C.3.3 Algunas propiedades de los espacios L^p

Teorema C.3.1 Supongamos que $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ un espacio de medida y $p\in[1,+\infty]$. Luego,$(L^p_\mu(\Omega),\|\cdot\|_{L^p})$ es un espacio de Banach y además, $(L^2_\mu(\Omega),\|\cdot\|_{L^2})$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle f,g\rangle := \int_\Omega f\cdot g\,d\mu, \qquad \forall f,g\in L^2_\mu(\Omega).$$

Teorema C.3.2 — Desigualdad de Hölder. Supongamos que $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ un espacio de medida y $p,q\in[1,+\infty]$ son tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Luego, si $f\in L^p_\mu(\Omega)$ y $g\in L^q_\mu(\Omega)$, entonces $f\cdot g\in L^1_\mu(\Omega)$ y además

$$\|f\cdot g\|_{L^1}\le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$$

Corolario C.3.3 Supongamos que $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ un espacio de medida y $p,q\in\mathbb{R}$ son tales que $1\le p\le q\le+\infty$. Si $\mu(\Omega)\in\mathbb{R}$, entonces $L^\infty_\mu(\Omega)\subseteq L^q_\mu(\Omega)\subseteq L^p_\mu(\Omega)\subseteq L^1_\mu(\Omega)$ y tenemos que

$$\|f\|_{L^p}\le \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_{L^q}, \qquad \forall f\in L^q_\mu(\Omega).$$

C.4 Medidas de Radon

Teorema C.4.1 — Representación de Riesz-Radon. Supongamos que $\mathbf{X}\subseteq\mathbb{R}^n$ es un subconjunto compacto y no vacío, y que $\ell\in\mathscr{L}C(\mathscr{C}(\mathbf{X}),\mathbb{R})$ es un funcional lineal continuo y positivo, es decir,

$$\ell(g)\ge 0 \qquad \forall g\in\mathscr{C}(\mathbf{X}) \text{ tal que } g\ge 0.$$

Luego existe una única medida Boreliana finita $\nu:\mathscr{B}(\mathbf{X})\to\mathbb{R}$ tal que

$$\ell(g)=\int_{\mathbf{X}} g\,d\nu, \qquad \forall g\in\mathscr{C}(\mathbf{X}).$$

Proposición C.4.2 Supongamos que $\mathbf{X}\subseteq\mathbb{R}^n$ es un subconjunto compacto y no vacío. Para todo $\ell\in\mathscr{L}C(\mathscr{C}(\mathbf{X}),\mathbb{R})$, existen $\ell_1,\ell_2\in\mathscr{L}C(\mathscr{C}(\mathbf{X}),\mathbb{R})$ funcionales lineales continuos y positivos, tales que $\ell=\ell_1-\ell_2$.

En particular, existen dos medidas Borelianas finitas $\nu_1:\mathscr{B}(\mathbf{X})\to\mathbb{R}$ y $\nu_2:\mathscr{B}(\mathbf{X})\to\mathbb{R}$ tales que

$$\ell(g)=\int_{\mathbf{X}} g\,d\nu_1-\int_{\mathbf{X}} g\,d\nu_2, \qquad \forall g\in\mathscr{C}(\mathbf{X}).$$

C.5 Teorema de Radon-Nikodým

Definición C.5.1 Supongamos que $\mu:\ :\mathscr{A}\to[0,+\infty]$ y $\nu:\ :\mathscr{A}\to[0,+\infty]$ son dos medidas sobre un espacio medible $(\Omega,\mathscr{A})$. Diremos que ν es **absolutamente continua** con respecto a μ, denotado $\nu\ll\mu$, si se cumple

$$\forall A\in\mathscr{A}, \qquad \mu(A)=0 \implies \nu(A)=0.$$

Teorema C.5.1 — Radon-Nikodým. Supongamos que $(\Omega, \mathscr{A})$ es un espacio medible y que además $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty)$ y $\nu : \; : \mathscr{A} \to [0, +\infty)$ son dos medidas finitas. Si $\nu \ll \mu$, entonces existe una función $g \in L^1_\mu(\Omega)$ (únicamente determinada) que satisface

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu, \qquad \forall A \in \mathscr{A}.$$

El Teorema de Radon-Nikodým también es válido si $\mu : \; : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ y $\nu : \; : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ son dos medidas σ-finitas, en tal caso $g : \Omega \to \mathbb{R}$ es sólo médible (no necesariamente integrable).

Bibliografía & Índice alfabético

Bibliografía

[1] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.

[2] G. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley & Sons, Inc., 1999.

[3] P. Gajardo *Apunte Mat 225 Análisis I*. 2021.

[4] P.R. Halmos *Naive Set Theory*. First Edition. Springer-Verlag New York, 1974.

[5] F. Hirsch, G. Lacombe *Elements of functional analysis*, Vol.192. Springer Science & Business Media, 2012.

[6] G. K. Pedersen. *Analysis Now*. Springer-Verlag, 1989.

[7] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics: Functional analysis*. Elsevier, 2012.

[8] J. San Martín *Teoría de la Medida*. Editorial Universitaria, 2017.

UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Departamento de Matemática