MAT227 Análisis III

Alberto Mercado Saucedo

4 de abril de 2019

Prefacio

Estas notas corresponden al curso de Análisis III de la Ingeniería Civil Matemática de la Universidad Técnica Federico Santa María, que básicamente consiste en un curso de Análisis Funcional. Fueron confeccionadas a partir de las ocasiones en que he dictado esta asignatura en tal programa, lo que ha ocurrido en conjunto con el programa de Magíster en Ciencias mención Matemática.

El contenido principal corresponde a lo visto en clase, excepto por algunos ejemplos o algunas partes de demostraciones, que fueron presentados en ayudantía o bien encargados de tarea (así se indica en algunas partes del texto). Gran parte de los ejercicios y problemas propuestos fueron incluidos en pruebas y tareas.

Agradezco a Cristóbal Loyola, quien revisó y completó gran parte de este texto de notas preparadas a partir de los cursos que dicté en la UTFSM del 2016 al 2018. Agradezco también a los alumnos y ayudantes que pasaron por tales cursos.

Cualquier consulta, comentario o sugerencia es bienvenida a mi correo electrónico: alberto.mercado@usm.cl.

Alberto Mercado Saucedo
Valparaíso, Marzo 2019.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Espacios de Banach

Definición 1 *Un espacio vectorial normado (abreviado evn) es un espacio vectorial X sobre $\mathbb{R}$ para el que se ha definido una función $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$, llamada norma, tal que*

- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,
- $\|x\| > 0$ *para todo* $x \neq 0$ *y* $\|x\| = 0$ *si y solo si* $x = 0$.

Ejemplos de espacios normados.
$\mathbb{R}^n$, $B(X)$, $C(K)$, $L^p(\Omega)$, norma de un producto, norma del espacio cociente.
Comentario sobre definición de espacios topológicos, y que la norma define una topología.

Definición 2 *Un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ es un Espacio de Banach si la norma $\|\cdot\|$ define una métrica completa en X.*

Teorema 1 *Un evn X es de Banach si y sólo si toda serie absolutamente convergente en X converge.*

Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que X es un evn completo, y sea $\{x_n\} \subset X$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge.
Definimos $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Entonces, si $n \geq m$ se tiene

$$\|s_n - s_m\| = \|\sum_{m+1}^{n} x_k\| \leq \sum_{m+1}^{n} \|x_k\| \leq \sum_{m+1}^{\infty} \|x_k\| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|s_n - s_m\| < \varepsilon$ siempre que $n \geq m \geq N$. Es decir, $\{s_n\}$ es de Cauchy en X, y como este espacio es completo, se tiene que $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ converge.

($\Leftarrow$) Sea $\{x_n\} \subset X$ una sucesión de Cauchy. Entonces, aplicando inducción matemática, podemos obtener una sucesión $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ tal que $n_{k+1} > n_k$ y

$$\|x_n - x_m\| < 2^{-k} \quad \forall n, m \geq n_k \tag{1.1}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Definimos $y_1 = x_{n_1}$, y, para cada $k \geq 2$,

$$y_k = x_{n_k} - x_{n_{k-1}}. \tag{1.2}$$

Entonces, directamente por la hipótesis (1.1), se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| = \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \|x_{n_1}\| + 1, \tag{1.3}$$

y por tanto la serie $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ es absolutamente convergente y por hipótesis se deduce que converge. Además, para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\sum_{k=1}^{m} y_k = \sum_{k=1}^{m} (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) = x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \cdots + (x_{n_m} - x_{n_{m-1}}) = x_{n_m}, \tag{1.4}$$

de donde tenemos que la sucesión $\{x_{n_m}\}$ es convergente. Como esta es una subsucesión de $\{x_n\}$, la cual es de Cauchy, se deduce que esta es también convergente. Por tanto X es un espacio completo. ■

Ejemplo 1 *El evn $X = L^1(\mu)$ es un espacio de Banach.*

Demostración:

Usaremos la caracterización anterior. Sea $\{f_n\} \subset X$ tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^1} < \infty$. Por el TCM se tiene que

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^1} < \infty.$$

Por lo tanto $g := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ satisface $g \in L^1$ y además

$$|\sum_{n=1}^{m} f_n| \leq g$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Por tanto podemos aplicar el TCD a las sumas parciales $\sum_{n=1}^{m} f_n$, de donde se deduce que convergen ctp. Es decir, existe

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in L^1(\mu).$$

Además, tenemos

$$\|f - \sum_{n=1}^{m} f_n\| \leq f = \sum_{n=m+1}^{\infty} \|f_n\|_{L^1} \to 0,$$

y por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{m} f_n$ converge en L^1. Del teorema anterior se deduce que $L^1(\mu)$ es un espacio completo. ■

Ejemplo 2 *El espacio*

$$\ell^p = \left\{ x = \{x_n\}_{n\in\mathcal{N}} \subset \mathbb{R} : \|x\|_p := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

es un espacio de Banach dotado de la norma $\|\cdot\|_p$, *para todo* $p \in [1, \infty)$.

Demostración:
Sea $\{x^n\} \subset \ell^p$ sucesión de Cauchy. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_k^n - x_k^m| \leq \|x^n - x^m\|_P < \varepsilon$$

para todo $n, m \geq n_0$, con $k \in \mathbb{N}$ fijo. Con esto, para cada k, la sucesión $\{x_k^n\}_n$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y converge a algún $x = \{x_k\}$ por completitud de $\mathbb{R}$. Nuevamente, por definición, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathcal{N}$ tal que para todo $n, m \geq n_0$ y para todo N

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k^n - x_k^m|^p \leq \|x^n - x^m\|_p^p < \varepsilon^p$$

siendo esta suma finita, si $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k - x_k^m|^p < \varepsilon^p.$$

Más aún, si $N \to \infty$ se deduce $\|x - x^m\|_p < \varepsilon$, para todo $m \geq n_0$. Escribiendo $x = x - x^m + x^m$ se ve que $x \in \ell^p$ pues $x - x^m, x^m \in \ell^p$, de lo cual se sigue que $x^n \to x$ en ℓ^p. Se concluye que ℓ^p es un espacio de Banach. ■

Ejercicio 1 *Pruebe que el espacio* $L^p(\mu)$ *es un espacio de Banach.*

1.2. Operadores y funcionales

En esta sección estudiaremos transformaciones lineales entre espacios normados. Tendrán especial importancia aquellas cuyo codominio es el conjunto de números reales, que son comúnmente llamadas funcionales lineales.
Para denotar una bola abierta en X, usaremos la notación

$$B_\delta^X(x_0) = \{x \in X \ : \ \|x - x_0\| < r\},$$

en la que prescindiremos del supraíndice si el espacio queda claro por el contexto. Además escribiremos $B_\delta = B_\delta(0)$.

Definición 3 *Sean X y Y dos evn. Diremos que una función lineal $T : X \longrightarrow Y$ es acotado si existe $C \geq 0$ tal que*
$$\|Tx\| \leq C\|x\|$$
para todo $x \in X$.

Proposición 1 *Son equivalentes:*

a) T es acotado.

b) T es continuo,

c) T es continuo en 0,

Demostración:
$a) \Rightarrow b)$ Si T es acotado, entonces, para cada par $x_1, x_2 \in X$ se tiene

$$\|Tx_1 - Tx_2\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq C\|x_1 - x_2\|,$$

de donde se tiene que T es Lipschitz, y en particular continuo.
$b) \Rightarrow c)$ Es obvio.
$c) \Rightarrow a)$ Dado que $T(0) = 0$ y B_1^Y es una vecindad del 0 en Y, por hipótesis se tiene que existe $\delta > 0$ tal que
$$T(B_\delta^X) \subset B_1^Y. \tag{1.5}$$
Sea $x \in X$. Entonces $x_1 := \delta \frac{x}{2\|x\|} \in B_\delta^X$, y por (1.5) se tiene $\|Tx_1\| < 1$. Es decir $\|Tx\| \leq \frac{2}{\delta}\|x\|$ para todo $x \in X$, de donde se tiene que T es acotado. ■

Definición 4 *Si X, Y son evn, se define el espacio*

$$\mathcal{L}(X,Y) = \{T : X \longrightarrow Y \,:\, T \textit{es lineal y acotado}\},$$

dotado de la norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \text{ínf}\{C \geq 0 \,:\, \|Tx\| \leq C\|x\| \textit{ para todo } x \in X\}.$$

Se prueba fácilmente (Problema **??**) que $\mathcal{L}(X,Y)$ es un evn, así como las siguientes formulaciones equivalentes de su norma:

$$\begin{aligned}\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} &= \sup\{\|Tx\| \,:\, \|x\| \leq 1, x \in X\} \\ &= \sup\{\|Tx\| \,:\, \|x\| = 1, x \in X\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \,:\, x \in X \setminus \{0\}\right\}.\end{aligned} \tag{1.6}$$

El siguiente resultado nos dice cuándo un espacio de operadores es completo, lo cual solo requiere que el espacio de llegada lo sea:

Proposición 2 *Si Y es completo entonces $\mathcal{L}(X,Y)$ es completo, y por tanto un espacio de Banach.*

El caso $Y = \mathbb{R}$ es particularmente importante:

Definición 5 *Si X es un evn, se define el espacio dual de X por*

$$X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \,:\, f \textit{es lineal y continua}\},$$

con la correspondiente norma. Los elementos de X^* son llamados funcionales de X.

De esta manera, la norma del espacio dual está definida por

$$\|f\|_* = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq 1\},$$

que resulta completa por la Proposición 2, al ser $\mathbb{R}$ un espacio completo.

Ejemplo 3 *Considere $X = C[a,b]$ dotado de la norma del supremo y para $x \in X$ defina $f : X \to \mathbb{R}$ por*

$$f(y) = \int_a^b y(t)x(t)\ dt.$$

Se prueba que $f \in X^*$ y su norma es $\|f\| = \|x\|_1$.

Demostración:
La linealidad de f es directo de la linealidad del operador integral. Acotando vemos que

$$|f(y)| = \left|\int_a^b y(t)x(t)\ dt\right| \leq \int_{-1}^1 |y(t)| \cdot |x(t)|\ dt \leq \left(\int_a^b |x(t)|\ dt\right), \|y\|_\infty$$

lo cual implica

$$\|f\| \leq \int_a^b |x(t)|\ dt < \infty,$$

así f es acotado.
Consideramos la sucesión de funciones continuas definidas por

$$\psi_n(t) = \frac{x(t)}{|x(t)| + \frac{1}{n}}.$$

Por Teorema de Convergencia Dominada se verifica

$$f(\psi_n) = \int_a^b \psi_n(t)x(t)\ dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b |x(t)|\ dt.$$

La sucesión $\{\psi_n\} \subset X$ es creciente pues el mapeo $t \mapsto t/(t+1)$ es creciente, y como $[a,b]$ es compacto se tiene

$$\|\psi_n\|_\infty = \frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_\infty + \frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Sigue que

$$\|f\| \geq \frac{|f(\psi_n)|}{\|\psi_n\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b |x(t)|\ dt.$$

De lo anterior se obtiene $\|f\| = \int_a^b |x(t)|\ dt$. ■

Ejercicio 2 *Considere $X = C[a,b]$ dotado de la norma del supremo. Para cada $a \in \mathbb{R}$ defina $f_a : X \to \mathbb{R}$dado por*

$$f_a(\psi) = \int_{-1}^{1} \psi(t)\ dt + a\psi(0).$$

Muestre que f_a es un elemento del dual de $C[-1,1]$ y que $\|f_a\| = 2 + |a|$.

Ejercicio 3 *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita. Muestre que si $1 \leq p \leq q$, entonces $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$ y calcule la norma de la inclusión $L^q(\mu) \to L^p(\mu)$.*

Resulta muy útil determinar si el espacio dual de un evn dado es *identificable* con un espacio conocido. Los siguientes ejemplos ilustran este hecho.

Ejemplo 4 *Si X es un espacio de Hilbert, el Teorema de Representación de Riesz proporciona una identificación (un isomorfismo isométrico) para el espacio dual: $X^* = X$.*

Ejemplo 5 *Sea $X = c_0 := \{x \in \ell^\infty\ :\ \lim_{n\to\infty} = 0\}$ dotado de la norma*

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Veamos que X^* se identifica con ℓ^1:

Demostración:
Demostraremos la existencia de un isomorfismo isométrico $\varphi : \ell^1 \longrightarrow X^*$ de la siguiente manera: Dado $z \in \ell^1$, definimos $\varphi_z : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi_z(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} z_n x_n.$$

Entonces tenemos

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |z_n x_n| \leq \|x\|_\infty \sum_{n\in\mathbb{N}} |z_n| = \|x\|_\infty \|z\|_1, \tag{1.7}$$

por lo que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n$ es convergente y entonces $\varphi_z(x)$ está bien definido.
Además, es claro que φ_z es lineal en x.
Por otra parte, la desigualdad (1.7) muestra que $|\varphi_z(x)| \leq \|z\|_1 \|x\|_\infty$ para todo $x \in X$, de donde se sigue que $\varphi_z \in X^*$ y además

$$\|\varphi_z\|_{X^*} \leq \|z\|_1 \tag{1.8}$$

para toda $z \in \ell^1$.
Es decir, hemos probado que la función

$$\varphi : \ell^1 \longrightarrow X^* \tag{1.9}$$
$$z \mapsto \varphi_z \tag{1.10}$$

es un operador lineal, continua e inyectiva.
Ahora probaremos que φ es sobreyectiva (esta suele ser la parte más difícil): Tomemos $f \in X^*$, y probemos que existe $z \in \ell$ tal que $f = \varphi_z$.
Definimos $z = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $z_n = f(e^n)$, donde $e^n_k = \delta_{kn}$ (es decir, la sucesión con entrada n-ésima igual a 1 y todas las demás nulas). Para probar que $z \in \ell^1$, definimos $x^n \in X$ por

$$x^n = (\operatorname{sgn}(z_1), \operatorname{sgn}(z_2), \ldots, \operatorname{sgn}(z_n), 0, \ldots) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sgn}(z_k) e^k. \tag{1.11}$$

Entonces $f(x^n) = \sum_{k=1}^n \operatorname{sgn} z_k f(e^k) = \sum_{k=1}^n |z_k|$, y por tanto

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| = f(x^n) \leq \|f\|_{X^*} \|x^n\|_\infty = \|f\|_{X^*}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde se concluye que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| \leq \|f\|_{X^*} \tag{1.12}$$

y en particular $z \in \ell^1$.
Por otra parte, para cada $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X$, se tiene

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k e^n\|_\infty = \sup_{k \geq n+1} |x_k| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

es decir $x = \sum_{n\in N} x_n e^n$ en X, por lo que $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n f(e^n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n z_n$ para todo $x \in X$. Por lo tanto $f = \varphi_z$, lo cual nos permite concluir que φ es sobreyectiva.
Por último, para todo $z \in \ell^1$, las desigualdades (1.8) y (1.12) para $f = \varphi_z$ implican que $\|\varphi_z\|_{X^*} = \|z\|_1$, de donde concluimos que φ define un isomorfismo isométrico. ■

Ejemplo 6 *Sea $X = C([0,1])$ dotado de la norma del supremo. Sabemos que esta norma hace de X un espacio de Banach. Se definen las transformaciones*

$$h(x) = x(0), \quad f(x) = \int_0^1 x(t)dt$$

para cada $x \in X$. Se prueba que están bien definidas y que $f, h \in X^*$. Además, $X_0 := \{x \in X : x(0) = 0\}$ es también un espacio de Banach, y se tiene $\|f\|_{X_0^*} = 1$, donde el supremo que define la norma no se alcanza.

Demostración:
Se deja al lector. ■

1.3. Problemas de certamenes

Ejercicio 4 *Sea X un espacio vectorial normado. Defino el mapeo en dualidad F por*

$$F(x) = \{f \in X^* \,:\, \|f\| = \|x\|, \text{ y } f(x) = \|x\|^2\}$$

para cada $x \in X$.

1. *Demuestre las siguientes propiedades de $F(x)$:*

   a) *Para cada $x \in X$, se tiene*

   $$F(x) = \{f \in X^* \,:\, \|f\| \leq \|x\|,\ f(x) = \|x\|^2\}$$

   b) *Para cada $x \in X$, el conjunto $F(x) \subset X^*$ es no-vacío, cerrado y convexo,*

2. *Sea X un espacio de dimensión $n \in \mathbb{N}$, y $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset X$ una base. Para cada $f \in X^*$, denotemos $f_k = f(e_k)$.*

   a) *Consideremos en X la norma $\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k|$. Calcular explícitamente la norma $\|f\|_{X^*}$ en términos de las f_k.*

   b) *La misma pregunta del inciso anterior si consideremos la norma $\|x\|_\infty := \max_{k=1,\ldots,n} \{|x_k|\}$.*

   c) *Determinar explícitamente el conjunto $F(x)$ en cada uno de los dos casos anteriores.*
   SUGERENCIA para (2c): Razonar en $\mathbb{R}^2$, conjeturar, demostrar.

Demostración:

1a) Sea $x \in X$ y denotar por $F_1(x)$ el nuevo conjunto que se ha definido. Claramente $F(x) \subset F_1(x)$. Si $f \in F_1(x)$ entonces tomar $\widetilde{x} = x/\|x\|$ (sin pérdida de generalidad, $x \neq 0$ pues $F(0) = \{0\}$) así

$$f(\widetilde{x}) = \frac{1}{\|x\|} f(x) = \frac{1}{\|x\|} \|x\|^2 = \|x\|$$

y $\widetilde{x} \in B_X$. Como además $\|f\| \leq \|x\|$ se sigue que $\|f\| = \|x\|$ por lo que $f \in F(x)$.

1b) Si $x = 0$ entonces $f(x) = \{0\}$ y si $x \neq 0$, por aplicación estándar de Hahn-Banach se tiene que existe $f \in X^*$ que satisface precisamente $f \in F(x)$, así en cualquier caso $F(x) \neq \emptyset$.

Si $f_n \to f$ en X^* con $\{f_n\}_n \subset F(x)$ entonces en particular $f_n(x) \to f(x)$ y $\|f_n\| \to \|f\|$. Sigue que $f(x) = \|x\|^2$ y $\|f\| \leq \|x\|$, así $f \in F(x)$ y por tanto $F(x)$ es cerrado.

Por último, si $f, g \in F(x)$ y $\alpha \in (0,1)$ tenemos

$$\|\alpha f + (1-\alpha)g\| \leq \alpha\|f\| + (1-\alpha)\|g\| = \alpha\|x\| + (1-\alpha)\|x\| = \|x\|$$

y

$$(\alpha f + (1-\alpha)g)(x) = \alpha f(x) + (1-\alpha)g(x) = \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|x\|^2 = \|x\|^2$$

de lo cual $\alpha f + (1-\alpha)g \in F_1(x) = F(x)$.

2a) Para cada $x \in X$ sea $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$. Entonces

$$f(x) = \sum_{j=1}^n x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j f_j$$

y por tanto

$$|f(x)| \leq \max_{j=1,\ldots,n}\{|f_j|\} \sum_{j=1}^n |x_j|$$

así $\|f\| \leq \max_j\{|f_j|\}$. Por otro lado, para cada k tal que $f_k \neq 0$ definir x tal que

$$x_j = \begin{cases} f_k/|f_k|, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

lo cual implica que $\|x\| = 1$ y $f(x) = |f_k|$, así $|f_k| \leq \|f\|$ para todo $k = 1, ..., n$. De lo anterior se concluye que

$$\|f\| = \max_{j=1,\ldots,n}\{|f_k|\}.$$

2b) Análogamente, vemos que

$$|f(x)| \leq \max_{j=1,\ldots,n}\{|x_j|\} \sum_{j=1}^n |f_j|$$

así

$$\|f\| \leq \sum_{j=1}^n |f_j|.$$

Por otro lado, sea $x \in X$ tal que $x_j = 0$ si $f_j = 0$ y $x_j = \operatorname{sgn}(f_j)$ en otro caso, así $\|x\| = 1$ y

$$f(x) = \sum_{j=1}^n x_j f_j = \sum_{j=1}^n |f_j| \leq \|f\|.$$

De las estimativas anteriores se concluye que

$$\|f\| = \sum_{j=1}^n |f_j|.$$

2c) Si $\|x\|_1 = \sum_j |x_j|$ sabemos que $\|f\| = \text{máx}_j |f_j|$. Entonces $f \in F(x)$ si y solo si

$$\sum_j x_j f_j = \left(\sum_j |x_j| \right)^2 \text{ y } \underset{j}{\text{máx}} |f_j| = \sum_j |x_j|.$$

a) Si $x_k = 0$ la única restricción es $f_k \leq \sum_j |x_j|$, es decir, $|f_k| \leq \|x\|_1$.

b) Si $x_k \neq 0$ afirmamos que $f_k = \text{sgn}(f_k)\|x\|_1$. En efecto, si $x_k f_k < \|x\|_1 |x_k|$ entonces

$$\sum_j x_j f_j = x_k f_k + \sum_{j \neq k} x_j f_j < \|x\|_1 |x_k| + \|x\|_1 \sum_{j \neq k} x_j < \|x\|_1^2$$

luego $f \notin F(x)$.

Luego $f_k = \text{sgn}(f_k)\|x\|_1$ para todo k tal que $x_k \neq 0$ y $|f_k| \leq \|x\|_1 |x_k|$ para todo k tal que $x_k = 0$.

Si $\|x\|_\infty = \sup_k |f_k|$ entonces $f \in F(x)$ si y solo si

$$\sum_j f_j x_j = \underset{k}{\text{máx}} |x_k|^2 \text{ y } \sum_j |f_j| = \underset{k}{\text{máx}} |x_k|.$$

Sea $I = \{j : |x_k| = \|x\|_\infty\}$, entonces

$$\sum_{j \in I} x_j f_j = \sum_{j \in I} \text{sgn}(x_j)\|x\|_\infty f_j = \|x\|_\infty \sum_{j \in I} \text{sgn}(x_j) f_j$$

y como $\sum_{j \notin I} x_j f_j < \|x\|_\infty \sum_{j \notin I} |f_j|$ se tiene $\text{sgn}(x_j) = \text{sgn}(f_j)$ y $\sum_{j \in I} |f_j| = \|x\|_\infty$. Por lo tanto, $f \in F(x)$ si y solo si $\text{sgn}(x_j) = \text{sgn}(f_j)$ para todo $j \in I$, $\sum_{j \in I} |f_j| = \|x\|_\infty$ y $f_j = 0$ para todo $j \notin I$.

■

1.4. Ejercicios

Ejercicio 5 *Sea X un espacio normado y $f \in X^*$. Muestre que f es continuo si y sólo si ker(f) es cerrado.*

Capítulo 2

Teoremas clásicos del Análisis Funcional

2.1. Teorema de Hahn-Banach y sus consecuencias

El Teorema de Hahn-Banach es un resultado fundamental que asegura la existencia de elementos de X^*. Un ingrediente importante es el Lema de Zorn, un resultado de *inducción transfinita.*

Lema 1 (Lema de Zorn) *Si Z es un conjunto parcialmente ordenado no vacío tal que todo subconjunto totalmente ordenado tiene una cota superior, entonces Z pose algún elemento maximal.*

Demostración:
Este Lema es equivalente al Axioma de Elección ■

Teorema 2 (Teorema de Hahn-Banach) *Sea X un espacio vectorial y $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

- $p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall x \in X, \forall \lambda > 0,$
- $p(x + y) \leq p(x) + p(y).$

Si $G \subset X$ es un subespacio vectorial y $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función lineal tal que

$$g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in G,$$

entonces existe una función lineal $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ extensión de g tal que

$$f(x) \leq p(x)$$

para todo $x \in X$.

Con el fin de hacer más comprensible la lectura de la demostración, probaremos primero un caso particular:

Proposición 3 *Bajo las hipótesis del Teorema de Hahn-Banach, si $x_0 \in X \setminus G$ entonces existe una función lineal*

$$h : \langle G \cup \{x_0\} \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$$

extensión de g y tal que $h(x) \leq p(x)$ para todo $x \in \langle G \cup \{x_0\} \rangle$.

Demostración:
Sea $x_0 \in X \setminus G$. Fijemos $t_0 \in \mathbb{R}$ (por el momento arbitrario, por elegir más adelante) y definimos

$$D(h) = \langle G \cup \{x_0\} \rangle = \{x + \lambda x_0 \,:\, x \in G, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

y

$$h(x + \lambda x_0) = g(x) + \lambda t_0$$

para cada $x \in G$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se verifica fácilmente que h está bien definida y es lineal. Además, por construcción se tiene que $G \subset D(h)$ con contención propia, y que h es una extensión de g.
Por tanto, para concluir basta probar que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) \leq p(x)$ para todo $x \in D(h)$. Se deja al lector demostrar este hecho. ■

Ahora probaremos el Teorema en el caso general.
Demostración (del Teorema de Hahn-Banach):
Definimos la colección de extensiones lineales de g acotadas por p:

$$\mathcal{P} = \{(h, D(h)) \,:\, G \subset D(h) \leq X, \quad h : D(h) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es extensión lineal de } g, \quad h(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X\},$$

dotado de la relación de orden $\ll$ definida por

$$(h_1, D(h_1)) \ll (h_2, D(h_2)) \quad \text{si} \quad D(h_1) \subset D(h_2) \text{ y } h_2(x) = h_1(x)\, \forall x \in D(h_1)$$

de manera que la demostración del teorema consta de dos partes:

1. La colección $\mathcal{P}$ con el orden $\ll$ es inductiva, de manera que se puede aplicar el Lema de Zorn.

2. El elemento maximal cuya existencia es garantizada por el Lema de Zorn es la extensión que buscamos.

Veamos el punto 1. Para probar que $\mathcal{P}$ es inductiva, tomamos una subcolección $\mathcal{Q} = \{(h_\alpha, D(h_\alpha)) \,:\, \alpha \in \mathcal{A}\}$ totalmente ordenada; probaremos que contiene un elemento maximal. Definimos

$$D(h) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} D(h_\alpha).$$

Dado que $\mathcal{Q}$ es totalmente ordenada, es fácil ver que $D(h) \ll X$, pues si $x, y \in D(h)$ entonces $x \in D(h_{\alpha_1})$, $y \in D(h_{\alpha_2})$ para algunos α_1, α_2. Por hipótesis, uno de los dominios está contenido en el otro, digamos $D(h_{\alpha_1}) \subset D(h_{\alpha_2})$, y entonces $x + \alpha y \subset D(h_{\alpha_2}) \subset D(h)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, por tanto $D(h) \ll X$. También definimos

$$h : D(h) \longrightarrow \mathbb{R}$$

de la siguiente manera: Si $x \in D(h)$, entonces existe $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ tal que $x \in D(h_{\alpha_0})$. Definimos $h(x) = h_{\alpha_0}(x)$. Como $\mathcal{Q}$ está bien ordenada, h está bien definida (pues si $x \in D(h_{\alpha_0}) \cap D(h_{\alpha_1})$ entonces $h_{\alpha_0}(x) = h_{\alpha_1}(x)$, pues una función es extensión de la otra).
Por tanto se tiene que $(h, D_h) \in \mathcal{P}$ es una cota superior de $\mathcal{Q}$. Por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal $(f, D(f)) \in \mathcal{P}$.

Para probar el punto 2, demostremos que f es la extensión buscada. Es decir, debemos probar que $D(f) = X$. Supongamos que no es cierto, y por tanto existe $x_0 \in X \setminus D(f)$. Aplicamos la Proposición 3 con $g = f$ y $G = D(f)$, y se obtiene una extensión h de f con dominio $D(h) \leq X$ tal que $(D(h), h) \in \mathcal{P}$. Por construcción se tiene $D(f) \subset D(h)$ con contención propia y $h \neq f$.
Esto implica una contradicción a la maximalidad de $(D(f), f)$, de donde concluimos que $D(f) = X$. Por tanto f es la extensión deseada.

$\blacksquare$

Corolario 1 *Sea $Y \subset X$ un subespacio vectorial, y sea $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua. Entonces existe $f \in X^*$ que extiende g tal que*

$$\|f\|_{X^*} = \|g\|_{Y^*}.$$

Demostración:
Tenemos que $g(x) \leq \|g\|_{Y^*}\|x\|$ para todo $x \in Y$. Si definimos $p(x) = \|g\|_{Y^*}\|x\|$ para $x \in Y$, podemos aplicar Hahn-Banach para hallar una extensión linear $f \in X^*$ de g tal que $f(x) \leq \|g\|_{Y^*}\|x\|$ para todo $x \in X$, implicando que $\|f\|_{X^*} \leq \|g\|_{Y^*}$. Por otro lado, siendo f una extensión de g, se tiene $g(x) \leq f(x)$ para toda $x \in X$, lo cual implica $\|g\|_{Y^*} \leq \|f\|_{X^*}$, de donde se sigue la igualdad deseada. $\blacksquare$

Corolario 2 *Si $x_0 \in X$, entonces existe $f \in X^*$ tal que*

$$\|f\| = \|x_0\|, \text{ y } f(x_0) = \|x_0\|^2.$$

Demostración:
Definimos $Y = \mathbb{R}x_0$, y $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ por $g(tx_0) = t\|x_0\|^2$. Entonces g es un funcional lineal en el subespacio vectorial Y. Por el Corolario 1 tenemos que existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = \|g\| = \|x_0\|$ y que es extensión de g, por lo cual $f(x_0) = g(x_0) = \|x_0\|^2$. $\blacksquare$

Obs: Si en particular X es un espacio con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, podemos definir explícitamente un funcional lineal f por

$$f(x) = \langle x, x_0 \rangle ,$$

de manera que satisface la conclusión del Corolario 2. De esta manera, tal resultado es una generalización a los espacios vectoriales normados.

Corolario 3 *Para cada $x \in X$ se tiene*

$$\|x\| = \max\{|f(x)| \, : \, f \in X^*, \|f\|_* \leq 1\}. \tag{2.1}$$

Notar que, a diferencia de (2.1), en la definición de la norma $\|f\|_*$, el supremo no se alcanza necesariamente (ver ejemplo 6).

2.2. Teorema de Hahn Banach, versiones geométricas

En el estudio de los espacios vectoriales normados, tienen particular importancia los conjuntos llamados hiperplanos:

Definición 6 *Si X es un evn, se dice que $H \subset X$ es un hiperplano si existen una función lineal $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ no nula y una constante $\alpha \in X$ tales que $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$*

Usualmente denotaremos $H = \{f = \alpha\}$. Es claro que H separa al espacio X en tres regiones disjuntas: el mismo hiperplano y dos *semiespacios*: $\{x \in X \, : \, f(x) < \alpha\}$ y $\{x \in X \, : \, f(x) > \alpha\}$.

Lema 2 *Sean H un hiperplano, y $C \subset X \setminus H$ un conjunto convexo no vacío. Entonces C está contenido en sólo uno de los dos semiespacios definidos por H.*

Demostración:
Sin pérdida de generalidad, podemos tomar $x_0 \in C$ tal que $f(x_0) < \alpha$. Probaremos que $f(x) < \alpha$ para todo $x \in C$.
En efecto, supongamos que existe $x_1 \in C$ tal que $f(x_1) > \alpha$. Definimos, para cada $t \in (0, 1)$,

$$x_t = (1 - t)x_0 + tx_1.$$

Como C es convexo, se tiene que $x_1 \in C$ para todo $t \in (0, 1)$. Además $f(x_t) = (1 - t)f(x_0) + tf(x_1)$, de donde se obtiene fácilmente la existencia de un t^* tal que $f(x_{t^*}) = \alpha$ (de hecho $t^* = \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$).
Esto es una contradicción con la hipótesis $C \subset X \setminus H$, de donde concluimos que no existe tal $x_1 \in C$, y por tanto $f(x) < \alpha$ para todo $x \in C$. ■

Proposición 4 *Un hiperplano H es cerrado si y sólo si f es continua.*

Demostración:
($\Longleftarrow$) Dado que $\{\alpha\} \subset \mathbb{R}$ es cerrado, esto es directo de las propiedades de la imagen inversa de funciones continuas.
($\Longrightarrow$) Supongamos que el hiperplano H es cerrado. Si $H = X$ entonces f es constante y en particular es continua. De lo contrario, podemos tomar $x_0 \notin H$, sin perdida de generalidad tal que $f(x_0) < \alpha$.

Como H es cerrado, entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset X \setminus H$. Por el Lema 2 aplicado al convexo $B_r(x_0)$, deducimos que $f(x) < \alpha$ para todo $x \in B_r(x_0)$. Como $B_r(x_0) = x_0 + rB_1$, tenemos que

$$f(x_0) + rf(x) = f(x_0 + rx) < \alpha \quad \forall x \in B_1,$$

de donde

$$f(x) < r^{-1}(\alpha - f(x_0)) \quad \forall x \in B_1,$$

lo cual implica que f es acotada y $\|f\| \leq r^{-1}(\alpha - f(x_0))$. ■

Una aplicación muy importante del Teorema de Hahn-Banach es la existencia de hiperplanos que separan ciertos conjuntos. Estas versiones serán usadas en los resultados de ortogonalidad y sobre las topologías débiles.

Definición 7 *Sean A y B subconjuntos del evn X, y $H = \{f = \alpha\}$ un hiperplano. Decimos que*

- *H separa A y B si*

$$f(x) \leq \alpha \leq f(y) \quad \forall x \in A, \forall y \in B$$

- *H separa estrictamente A y B si existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon, \quad \alpha + \varepsilon \leq f(y) \quad \forall x \in A, \forall y \in B$$

Lema 3 *Si X es un evn, sea $C \subset X$ un convexo abierto tal que $0 \in C$. Definimos, para cada $x \in X$,*

$$\rho(x) = \inf\{\alpha > 0 \,:\, x \in \alpha C\}.$$

Entonces:

1. *ρ satisface las hipótesis del Teorema de HB (es subaditiva y homogenea para constantes positivas).*

2. *Existe $M > 0$ tal que $0 \leq p(x) \leq M\|x\|$ para todo $x \in X$.*

3. *$C = \{x \in X \,:\, \rho(x) < 1\}$*

Demostración:
Como C es abierto y $0 \in C$, de la continuidad de la función multiplicación en X se deduce que p está bien definido. ■

Lema 4 *Sea $C \subset X$ un convexo abierto no vacío, y $x_0 \in X \setminus C$. Entonces existe $f \in X^*$ tal que*

$$f(x) < f(x_0) \quad \textit{para todo} \quad x \in C. \tag{2.2}$$

Demostración:
Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $0 \in C$ (de lo contrario, considerar una traslación de C en X). Definimos el subespacio vectorial $G = \mathbb{R}x_0$, y la función lineal $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(tx_0) = t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Aplicaremos el Teorema de Hanh-Banach (Teorema 2) a g y a la funcional de Minkowski p definida por el convexo C. Para esto, probaremos que $g \leq p$ en G. Por el Lema 3 tenemos que p es homogénea para constantes positivas, y que $p(x_0) \geq 1$ (pues $x_0 \notin C$), de donde

$$g(tx_0) = t \leq tp(x_0) = p(tx_0)$$

para todo $t > 0$. Es decir $g \leq p$ en $\mathbb{R}x_0$.
Por tanto se cumplen las hipótesis del Teorema de Hahn-Banach, el cual implica que existe una función lineal $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que es extensión de g y tal que $f \leq p$ en todo X. En particular se tiene que $f(x_0) = g(x_0) = 1$, y que

$$f(x) \leq p(x) < 1$$

para todo $x \in C$, de donde se cumple (2.2). Por último, por el Lema 3 se tiene

$$f(x) \leq p(x) \leq M\|x\|$$

para todo $x \in X$, lo cual implica que f es acotada, es decir $f \in X^*$, con lo que concluye la demostración. ∎

Teorema 3 (Hahn-Banach, 1ra versión geométrica) *Sean $A, B \subset X$ convexos, disjuntos, no vacíos con A abierto. Entonces existe un hiperplano que separa A y B.*

Demostración:
Sea A abierto, y definimos $C = A - B = \{a - b \,:\, a \in A, b \in B\}$.
Se prueba directamente que C es convexo. Además $C = \bigcup_{b\in B}(A - b)$, y cada conjunto $A - b$ es abierto, de donde tenemos que C es abierto. Por último, dado que $A \cap B = \emptyset$, concluimos que $0 \notin C$.
Por lo tanto podemos aplicar el Lema 4, de donde se obtiene que existe $f \in X^*$ tal que

$$f(x) < f(0) = 0$$

para todo $x \in C = A - B$, por lo cual se tiene

$$f(a) < f(b)$$

para todo $a \in A$ y todo $b \in B$, de donde se obtiene

$$\sup f(A) \leq \inf f(B).$$

Concluimos que si $\alpha \in [\sup f(A), \inf f(B)]$ entonces $H := \{f = \alpha\}$ separa A y B. ∎

Teorema 4 (Hahn-Banach, 2da versión geométrica) *Sean $A, B \subset X$ convexos, no vacíos, disjuntos, A cerrado y B compacto. Entonces existe un hiperplano que separa estrictamente A y B*

Demostración:
Sea A abierto, y definimos $C = A - B = \{a - b \,:\, a \in A, b \in B\}$.
Al igual que en el teorema anterior, se tiene C convexo y $0 \notin C$. Además, se tiene que C es cerrado (para lo cual se requiere la compacidad de uno de los conjuntos. Se puede probar directamente por sucesiones).
Por tanto existe $r > 0$ tal que $B_r \cap C = \emptyset$.
Entonces podemos aplicar el Teorema 3, de donde se obtiene la existencia de un hiperplano cerrado H que separa los conjuntos B_r y C. Es decir, existe $f \in X^*$ tal que

$$\begin{aligned}
f(x) &\leq f(y) \quad \forall x \in C, \quad \forall y \in B_r \\
\Rightarrow f(a-b) &\leq f(rz) \quad \forall a \in A, b \in B \quad \forall z \in B_1 \\
\Rightarrow f(a) - f(b) &\leq rf(z) \quad \forall a \in A, b \in B \quad \forall z \in B_1 \\
\Rightarrow f(a) + rf(w) &\leq f(b) \quad \forall a \in A, b \in B \quad \forall w \in B_1 \\
\Rightarrow f(a) + r \sup_{w \in B_1} f(w) &\leq f(b) \quad \forall a \in A, b \in B \\
\Rightarrow f(a) + r\|f\| &\leq f(b) \quad \forall a \in A, b \in B. \\
\Rightarrow \sup f(A) + r\|f\| &\leq \text{ínf} f(B).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

De la última desigualdad se tiene que podemos tomar

$$\alpha \in \left[\sup f(A) + \frac{r\|f\|}{2}, \text{ínf} f(B) - \frac{r\|f\|}{2}\right], \quad \varepsilon = \frac{r\|f\|}{2}$$

para tener que el hiperplano $\{f = \alpha\}$ separa estrictamente A y B. ■

Ejemplo 7 *Si se elimina la hipótesis de compacidad no se puede garantizar que exista una separación estricta, incluso en dimensión finita: en $X = \mathbb{R}^2$, los convexos $A = \{y \leq 0\}$, $B = \{y \geq e^x\}$.*

Ejemplo 8 *(Caracterización de conjuntos cerrados convexos) Sea X un espacio de Banach. Si $C \subset X$ es cerrado convexo no vacío, entonces C es la intersección de todos los semiespacios cerrados que lo contienen.*

Demostración:
Sea $\mathcal{S} = \{S_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ donde S_α es semiespacio cerrado conteniendo a C. Es un hecho que $C \subset \bigcap_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha$. Suponer que existe $x \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha$ tal que $x \notin C$. Siendo C un cerrado convexo y $\{x\}$ compacto convexo por teorema de Hanh-Banach en su segunda forma geométrica existe un hiperplano $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ que separa ambos conjuntos de manera estricta. Definimos entonces $A = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ el cual es un conjunto cerrado que además contiene a C, en base a lo anterior no contiene x ($A \in \mathcal{S}$). Si

C no está contenido en A consideramos $B = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ y procedemos con un razonamiento análogo como el hecho para A. En ambos casos se obtiene una contradicción. ■

2.2.1. Producto en dualidad

Un concepto comúnmente usado, generalización del producto interno para los espacios normados, es el de *producto en dualidad*, denotado por $<,>_{X^*,X}$ y definido en $X^* \times X$ por

$$(f,x) \in X^* \times X \longmapsto \langle f,x \rangle_{X^*,X} = f(x).$$

Esta noción generaliza el producto interior, y en particular permite establecer relaciones de *ortogonalidad* en espacios vectoriales normados.

Definición 8 *Sean $M \subset X$ y $N \subset X^*$ subespacios vectoriales. Entonces definimos*

$$M^\perp = \{f \in X^* : f(x) = 0 \quad \forall x \in M\},$$

y

$$^\perp N = \{x \in X : f(x) = 0 \quad \forall f \in N\}.$$

No es difícil probar que $M^\perp$ y $^\perp N$ son subespacios vectoriales cerrados (ejercicio).
Para probar algunas propiedades de estos conjuntos, introduzcamos, para cada $x \in X$, el *funcional evaluación*

$$J_x : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

definido por $J_x(f) = f(x)$.
Claramente J_x es lineal en f, y además

$$|J_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|\|x\|,$$

para toda $f \in X^*$ de donde $J_x \in X^{**}$ (con $\|J_x\|_{X^{**}} \leq \|x\|$).
En particular, dado que por definición se tiene

$$M^\perp = \bigcap_{x \in M} J_x^{-1}(\{0\}),$$

de lo anterior tenemos que $M^\perp$ es una intersección de conjuntos cerrados, y por lo tanto es un subespacio cerrado de X^*.
Más aun, por el Teorema de Hahn Banach (Corolario (**??**)) se tiene que

$$\|x\| = \text{máx}\{|J_x(f)| : f \in X^*, \|f\|_* \leq 1\} = \|J_x\|_{X^{**}}.$$

Es decir,

$$\|J_x\|_{X^{**}} = \|x\|_X \quad \text{para cada } x \in X. \tag{2.4}$$

Esto nos dice que la función

$$J : X \longrightarrow X^{**}$$

definida por

$$x \longmapsto J_x,$$

es un isomorfismo isométrico entre X y su imagen $J(X) \subset X^{**}$. La función J es llamada la *inyección canónica de X en X^{**}*, y en general no es sobreyectiva.

Proposición 5 *Si $M \subset X$ es un subespacio vectorial entonces se tiene*

$$^{\perp}(M^{\perp}) = \overline{M}.$$

Demostración:
($\supset$) Por definición se tiene que $M \subset {}^{\perp}(M^{\perp})$ y que el segundo conjunto es cerrado, de donde se sigue que $\overline{M} \subset {}^{\perp}(M^{\perp})$.
($\subset$) Sea $x_0 \in X$ tal que $x_0 \notin \overline{M}$. Entonces $\overline{M}$ y $\{x_0\}$ son conjuntos convexos disjuntos, y $\{x_0\}$ es compacto. Por el Teorema 4 existe $f \in X^*$ tal que

$$f(x) < \alpha < f(x_0) \tag{2.5}$$

para todo $x \in \overline{M}$. De (2.5) se tiene, en particular, que $f < \alpha$ en M, y entonces $f = 0$ en M (puesto que los funcionales lineales no nulos no están acotados por ninguna constante). Es decir, se tiene que $f \in M^{\perp}$. Además, de (2.5) se sigue que $0 < f(x_0)$, por lo que $x_0 \notin^{\perp} (M^{\perp})$. ■

De las relación anterior se tiene en particular el siguiente resultado.

Corolario 4 *Sea $F \subset X$ un subespecio vectorial no trivial. Entonces F es denso en X si y solo si para todo $f \in X^*$ que se anula en F se tiene $f = 0$.*

Demostración:
Se sigue de la Proposición 5, y del hecho que ${}^{\perp}(M^{\perp}) = X$ si y solo si $f = 0$ para todo $f \in X^*$ tal que $f = 0$ en M. ■

Proposición 6 *Si $N \subset X^*$ es un subespacio vectorial entonces se tiene*

$$\overline{N} \subset ({}^{\perp}N)^{\perp}.$$

Demostración:
Por definición se tiene $N \subset ({}^{\perp}N)^{\perp}$, y además el segundo conjunto es cerrado, de donde se concluye.

■

Ejemplo 9 *Sean $X = \ell^1$ y*

$$N = c_0 = \{\{x_n\}_{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\} \subset \ell^{\infty} = X^*.$$

De la identificación $N^* = \ell^1$ probada en el ejemplo **??** *se puede deducir que ${}^{\perp}N = \{0\}$. Por lo tanto $({}^{\perp}N)^{\perp} = \ell^{\infty}$, mientras que $\overline{N} = c_0 \neq \ell^{\infty}$.*

2.3. Teorema de Baire y consecuencias

Lema 5 *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Si $\{F_n\}$ es una colección de subconjuntos cerrados no vacíos de X tales que $F_n \supset F_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.*

Demostración:
Por hipótesis podemos tomar $x_n \in F_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces se tiene

$$\{x_k\}_{k\geq n} \subset F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.6}$$

de donde, para cada n, se tiene $d(x_k, x_n) \leq \operatorname{diam}(F_n)$ para todo $k \geq n$, de donde se tiene que $\{x_n\}$ es de Cauchy. Por hipótesis existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. De (2.6) y dado que F_n es cerrado, se tiene $x \in F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual concluye la demostración.
$\blacksquare$

Teorema 5 (Lema de Baire) *Sea X un espacio métrico completo. Sea $\{V_n\}$ una sucesión de conjuntos abiertos densos en X. Entonces se tiene*

$$\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n} = X.$$

Demostración:
Sean $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Probaremos que

$$B_\varepsilon(x_0) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \emptyset. \tag{2.7}$$

Usaremos un proceso inductivo para probar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene $B_\varepsilon(x_0) \cap \bigcap_{k=1}^n V_k \neq \emptyset$:
Como V_1 es denso, el conjunto $B_\varepsilon(x_0) \cap V_1$ es un abierto no vacío, de donde existen $x_1 \in X$ y $\varepsilon_1 > 0$ tales que

$$\overline{B_{\varepsilon_1}(x_1)} \subset B_\varepsilon(x_0) \cap V_1. \tag{2.8}$$

Sin pérdida de generalidad podemos tomar $0 < \varepsilon_1 < 1$. Ahora, dados $x_n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon_n \in (0, 1/n)$, de la densidad de V_n se tiene que existen $x_{n+1} \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon_{n+1} > 0$ tales que

$$\overline{B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1})} \subset B_{\varepsilon_n}(x_n) \cap V_{n+1}, \tag{2.9}$$

y en particular podemos tomar $\varepsilon_{n+1} < \frac{1}{n+1}$.
Aplicando inducción, tenemos entonces una colección de cerrados $\left\{\overline{B_{\varepsilon_n}(x_n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ encajados, todos contenidos en $B_\varepsilon(x_0)$, y tales que $\overline{B_{\varepsilon_n}(x_n)} \cap \bigcap_{k=1}^n V_k \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Entonces, del Lema 5 se tiene que $K := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_{\varepsilon_n}(x_n)} \neq \emptyset$, de donde se desprende (2.7). $\blacksquare$

Corolario 5 *Sea X un espacio métrico completo. Si $\{X_n\}$ es una colección de subconjuntos cerrados de X, cada uno con interior vacío, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ tiene interior vacío.*

Demostración:
Aplicar el Lema de Baire a los abiertos $V_n = X \setminus X_n$. ■

2.3.1. Principio de acotación uniforme

Teorema 6 *Sean X, Y espacios de Banach, y sea $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ una colección de operadores acotados tales que, para cada $x \in X$, se tiene*

$$\sup_{\alpha\in\mathcal{A}} \|T_\alpha x\|_Y < \infty, \tag{2.10}$$

entonces

$$\sup_{\alpha\in\mathcal{A}} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty. \tag{2.11}$$

Demostración:
Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$X_n = \{x \in X \ : \ \|T_\alpha x\| \leq n \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}\}.$$

Por (2.10), para cada $x \in X$ se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} \|T_\alpha x\|_Y$, y por tanto $x \in X_n$. Entonces

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X,$$

y en particular $\mathrm{int}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n) \neq \emptyset$. Además, de la continuidad de T_α se obtiene que cada conjunto X_n es cerrado. Por el Lema de Baire (Corolario 5) se tiene que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{int}(X_{n_0}) \neq \emptyset$, es decir, existen $x_0 \in X$ y $r > 0$ tales que $B_r(x_0) \subset X_{n_0}$. Por definición, se tiene que, para toda $\alpha \in \mathcal{A}$,

$$\|T_\alpha x\| \leq n_0 \quad \forall x \in B_r(x_0),$$

y por tanto

$$\|T_\alpha x_0 + T_\alpha(rz)\| = \|T_\alpha(x_0 + rz)\| \leq n_0 \quad \forall z \in B_1,$$

de donde

$$r\|T_\alpha z\| \leq \|T_\alpha x_0\| + n_0 \leq 2n_0 \quad \forall z \in B_1.$$

De lo anterior se obtiene que $\|T_\alpha\| \leq \frac{2n_0}{r}$ para cada $\alpha \in \mathcal{A}$. ■

Corolario 6 *(Banach-Steinhaus) Sean X, Y espacios de Banach, y sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ una sucesión de operadores acotados tales que existe $T : X \longrightarrow Y$ tal que $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ para cada $x \in X$. Entonces se tiene*

1. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty$,

2. $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, *y*

3. $\|T\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|T_n\|$.

Demostración:
Para cada $x \in X$, la sucesión $\{T_n x\}_n$ es una sucesión covnergente en X, y por tanto acotada, esto es, $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n x\| < \infty$. Siendo X un espacio de Banach, por el Teorema anterior se tiene que $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\| < \infty$ de donde se tiene 1.
Evidentemente T es lineal por la linealidad del límite. Tenemos que para todo $x \in X, \|T_n x\| \leq \|T_n\|\|x\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así por la definición de T se sigue

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq \big(\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|\big)\|x\|, \quad \forall x \in X$$

de lo cual se sigue 2.
Por último, por definición se ve que

$$\liminf_{n\to\infty}\|T_n\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\| < \infty$$

así

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| = \liminf_{n\to\infty}\|T_n x\| \leq \liminf_{n\to\infty}\|T_n\|\|x\|, \quad \forall x \in X$$

de lo cual se deduce directamente 3. ■

Corolario 7 *Sea X un espacio de Banach, y $B \subset X$ tal que $f(B) \subset \mathbb{R}$ es acotado para todo $f \in X^*$. Entonces B es acotado en X.*

Demostración:
Para cada $x \in B$, defina el operador $T_x : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $T_x(f) = f(x)$ para cada $f \in X^*$.

1. Aplique del Corolario de HB para probar que $T_x \in \mathcal{L}(X^*, \mathbb{R})$ con $\|T_x\| = \|x\|$.

2. Como $f(B)$ es acotado para todo $f \in X^*$, se prueba que la familia $\{T_x\}_{x\in B}$ es puntualmente acotada (es decir, se cumplen las hipótesis del Teo de BS).

3. Del Teo de BS se concluye que B es acotado.

■

Corolario 8 *Sean X, Y espacios de Banach. Si $b : X \times Y \to \mathbb{R}$ una aplicación bilineal y separadamente continua entonces b es continua.*

Demostración:
Basta probar que si $(x_n, y_n) \to (0,0)$ entonces $b(x_n, y_n) \to 0$, lo cual es válido por bilinealidad. Para cada $x_n \in X$ definir la aplicación $T_n : Y \to \mathbb{R}$ dada por $T_n y = b(x_n, y)$, el cual es continuo y satisface $T_n y \to 0$ para $n \to \infty$. Esto último implica que para cada $y \in Y$, $\sup_n \|T_n y\| < \infty$, así por Banach-Steinhaus existe $C > 0$ tal que $|T_n y| \leq C\|y\|$, para todo $y \in Y$. En particular para y_n se tiene

$$|b(x_n, y_n)| = |T_n y_n| \leq C\|y_n\|,$$

que converge a cero para $n \to \infty$. ■

Ejemplo 10 *El espacio* $X = \big(C[a,b],\ \|\cdot\|_1\big)$ *no es completo.*

Demostración:
Suponer X completo y por simplicidad considerar $[a,b] = [0,\pi]$. Definir la forma bilineal $b : X \times X \to \mathbb{R}$ por

$$b(\phi, \psi) = \int_0^\pi \phi(t)\psi(t)dt.$$

Por propiedades de la integral y dado que toda función continua sobre un conjunto compacto alcanza su máximo, la forma b es separadamente continua. Por el inciso anterior b es continua. Ahora, considerar la sucesión

$$\phi_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}\sin(nt) & ,\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{n} \\ 0 & ,\ \frac{\pi}{n} < t \leq \pi. \end{cases}$$

Se verifica que $\|\phi_n\|_1 = 2/\sqrt{n}$ que converge a cero para $n \to \infty$, mientras que $b(\phi_n, \phi_n) = \pi/2$ para todo n, por tanto b no es continua. Lo anterior es una contradicción al corolario (8), luego X no es completo. ■

2.3.2. Teorema del mapeo abierto

Teorema 7 (Teorema del Mapeo Abierto) *Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ un operador sobreyectivo. Entonces T es una función abierta.*

El siguiente resultado es consecuencia directa de este teorema:

Corolario 9 *Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ un operador biyectivo. Entonces $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$ (es decir, está bien definido como operador lineal y es continuo).*

El siguiente es un útil resultado para establecer equivalencia de normas en espacios de Banach.

Corolario 10 *Sea X un evn para el cual existen dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$, con cada una de las cuales es espacio de Banach, y tal que existe una constante $C>0$ tal que*

$$\|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \quad \forall x \in X. \tag{2.12}$$

Entonces las dos normas son equivalentes en X.

Teorema 8 (Teorema de la Gráfica Cerrada) *Sean X, Y espacios de Banach y sea $T : X \longrightarrow Y$ una transformación lineal cuya gráfica, definida por*

$$G(T) = \{(x, Tx) \,:\, x \in X\},$$

es un subconjunto cerrado de $X \times Y$. Entonces T es acotado.

Demostración:
Definimos en X la *norma de la gráfica*, por

$$\|x\|_G = \|x\|_X + \|Tx\|_Y,$$

para cada $x \in X$. Se sabe que $(X, \|\cdot\|_G)$ es un espacio de Banach (se deja al lector demostrarlo) y es evidente que $\|x\|_X \leq \|x\|_G$ para todo $x \in X$. Por el Corolario 10 se tiene que ambas normas son equivalentes. Es decir, existe $C>0$ tal que $\|x\|_X + \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ para todo $x \in X$, de donde se tiene en particular que $\|T\| \leq C$.

■

Demostración (del Teorema del Mapeo Abierto):
Primero, veremos que basta probar que existe $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta^Y \subset T(B_1^X). \tag{2.13}$$

En efecto, supongamos que (2.13) es cierto y sea $U \subset X$ abierto. Para cada $y_0 \in T(U)$, existe $x_0 \in U$ tal que $Tx_0 = y_0$, y por hipótesis existe $r > 0$ tal que

$$x_0 + B_r = B_r(x_0) \subset U,$$

de donde

$$y_0 + T(B_r) \subset T(U).$$

Por otra parte, de (2.13) se sigue que

$$B_{r\delta}^Y \subset T(B_r^X).$$

De las dos últimas ecuaciones se sigue que

$$B_{r\delta}^Y(y_0) = y_0 + B_{r\delta}^Y \subset T(U),$$

lo que prueba que $T(U)$ es abierto.
Por lo tanto resta probar la contención (2.13). De hecho, basta probar una contención un poco más débil:

Lema 6 *Sean X, Y son espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\delta > 0$ tales que*

$$B_\delta^Y \subset \overline{T(B_1^X)}. \tag{2.14}$$

Entonces se cumple (2.13).

Supondremos cierto este Lema por un momento, y concluiremos la demostración del teorema. Es decir, probaremos (2.14):
Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = n\overline{T(B_1^X)} = \overline{T(B_n^X)}.$$

Por hipótesis T es sobreyectivo, de donde se tiene $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Por el Lema de Baire (Corolario 5) podemos asegurar la existencia de $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{int}(X_{n_0}) \neq \emptyset$, de donde se tiene $\mathrm{int}(\overline{T(B_1^X)}) \neq \emptyset$.
Entonces existen $y_0 \in Y$ y $\delta > 0$ tales que

$$B_{2\delta}(y_0) \subset \overline{T(B_1^X)}. \tag{2.15}$$

En particular $y_0 \in \overline{T(B_1^X)}$, y por simetría con respecto al origen de este conjunto, se tiene

$$-y_0 \in \overline{T(B_1^X)}. \tag{2.16}$$

Sumando las contenciones (2.15) y (2.16) se tiene

$$B_{2\delta}^Y = B_{2\delta}^Y(y_0) - y_0 \subset \overline{T(B_1^X)} + \overline{T(B_1^X)} = 2\overline{T(B_1^X)}, \tag{2.17}$$

de donde se obtiene directamente (2.14). Por el Lema 6 esto concluye la demostración del Teorema del Mapeo Abierto. ■

Ahora probaremos el resultado pendiente.

Demostración (del Lema 6):
Se deja para el lector. ■

2.3.3. Operador adjunto

Este concepto es una generalización de la idea de matriz transpuesta. En general X y Y denotarán espacios de Banach.

Definición 9 *Dado un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, se define el operador adjunto $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ por*

$$T^* g = g \circ T \tag{2.18}$$

para cada $g \in Y^*$.

Proposición 7 *Para cada $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, existe un único operador adjunto $T^* \in \mathcal{L}(Y^*,X^*)$ definido por* (5.18)*. Además se tiene*

$$\|T^*\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)} = \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}. \tag{2.19}$$

Demostración:
Al estar definida como composición de funciones continuas y lineales, se tiene que T^*g define una función continua y lineal en X, es decir $T^*g \in X^*$. Además se tiene, para cada $x \in X$,

$$|(T^*g)x| = |g(Tx)| \leq \|g\|\|T\|\|x\|,$$

de donde se tiene

$$\|T^*g\| \leq \|g\|\|T\| \tag{2.20}$$

para toda $g \in Y^*$.
Además, de las propiedades de composición de funciones se tiene que T^* definido por (5.18) es una función lineal en g, lo cual junto con (2.20) implica que $T^* \in \mathcal{L}(Y^*,X^*)$ y que

$$\|T^*\| \leq \|T\| \tag{2.21}$$

Por otra parte, para cada $x \in X$, del Teorema de Hahn-Banach (Corolario **??**), tenemos que existe $g_x \in Y^*$ tal que $\|g_x\| = 1$ y $g_x(Tx) = \|Tx\|_Y$. Por lo tanto, para cada $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$ tenemos

$$\begin{aligned} \|Tx\|_Y &= g_x(Tx) \\ &\leq \sup\{|g(Tx)| \,:\, \|g\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|(T^*g)x| \,:\, \|g\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|T^*g\| \,:\, \|g\| \leq 1\} \\ &= \|T^*\|, \end{aligned} \tag{2.22}$$

de donde se obtiene $\|T\| \leq \|T^*\|$, que junto con (2.21) concluye la demostración. ■

Observación 1 *Se tiene entonces*

$$g(Tx) = (T^*g)x$$

para todo $x \in X$, $g \in Y^*$. En la notación del producto en dualidad, esto se escribe como

$$\langle g, Tx\rangle_{Y^*,Y} = \langle T^*g, x\rangle_{X^*,X}.$$

Observación 2 *En el caso particular que X, Y son espacios de Hilbert se tiene $T^* \in \mathcal{L}(Y,X)$, con*

$$\langle g, Tx\rangle_Y = \langle T^*g, x\rangle_X$$

para todo $x \in X$, $g \in Y$.

Ejemplo 11 *Denotamos* $x \in \ell^2$ *por* $x = \{x_n\} = (x_1, x_2, \ldots)$. *Definimos los operadores*

$$S_r x = (0, x_1, x_2, \ldots),$$

$$S_l x = (x_2, x_3, \ldots),$$

llamados shift derecho y shif izquierdo respectivamente. Es evidente que tanto S_r *como* S_l *son operadores lineales en* ℓ^2. *Dados* $x, y \in \ell^2$, *notar que*

$$\langle S_r x, y\rangle_{\ell^2} = \sum_{n\geq 1} x_n y_{n+1} = \langle x, S_l y\rangle_{\ell^2}$$

luego $(S_r)^* = S_l$. *Más aún, como* $\|S_r\| = 1$, *del Teorema 7 se tiene que* $\|S_l\| = 1$.

Proposición 8 *Se tiene*

$$\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^{\perp}$$

y

$$\mathcal{N}(T) = {}^{\perp}\mathcal{R}(T^*)$$

Teorema 9 *El operador* T *es a rango denso si y solo si* T^* *es inyectivo.*

Demostración:
Primero, veamos que de las proposiciones 5 y 8 se tiene que

$$^{\perp}\mathcal{N}(T^*) = {}^{\perp}(\mathcal{R}(T)^{\perp}) = \overline{\mathcal{R}(T)}. \tag{2.23}$$

($\Longrightarrow$) Si T es a rango denso, de (2.23) se tiene que $^{\perp}\mathcal{N}(T^*) = Y$, y entonces la Proposición 6 implica

$$\overline{\mathcal{N}(T^*)} \subset ({}^{\perp}\mathcal{N}(T^*))^{\perp} = Y^{\perp} = \{0\}.$$

Entonces $\mathcal{N}(T^*) = \{0\}$, es decir T^* es inyectivo.
($\Longleftarrow$) Si T^* es inyectivo entonces $^{\perp}\mathcal{N}(T^*) = {}^{\perp}\{0\} = Y$, y de (2.23) se deduce que $\overline{\mathcal{R}(T)} = Y$. ■

Teorema 10 *El operador* T *es sobreyectivo si y solo si existe* $C > 0$ *tal que*

$$\|g\|_{Y^*} \leq C\|T^* g\|_{X^*} \tag{2.24}$$

para toda $g \in Y^*$.

Demostración:
($\Longrightarrow$) Por el Teorema del Mapeo Abierto (Teorema 7), existe $\delta > 0$ tal que $\delta B_1^Y \subset T(B_1^X)$, de donde se tiene

$$\begin{aligned} \|T^* g\|_{X^*} &= \sup\{|(T^* g)x| \,:\, \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|g(y)| \,:\, y \in T(B_1^X)\} \\ &\geq \sup\{|g(\delta z)| \,:\, z \in B_1^Y\} \\ &= \delta\|g\|_{Y^*} \end{aligned} \tag{2.25}$$

para toda $g \in Y^*$. Entonces se cumple (2.24) con $C = 1/\delta$.
($\Longleftarrow$)
Probemos primero que existe $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta^Y \subset \overline{T(B_1^X)}. \tag{2.26}$$

Para esto, tomamos $y_0 \notin \overline{T(B_1^X)}$. Dado que este es un convexo cerrado, por el Teorema de HB existe $g \in Y^*$ tal que

$$g(y) \leq 1 < g(y_0)$$

para cada $y \in \overline{T(B_1^X)}$. Como este conjunto es simétrico respecto al origen y g es lineal, se tiene que

$$|g(y)| \leq 1 < g(y_0) \tag{2.27}$$

para cada $y \in \overline{T(B_1^X)}$. En particular se cumple que

$$|(T^*g)x| = |g(Tx)| \leq 1$$

para todo $x \in B_1^X$, de donde se obtiene

$$\|T^*g\|_{X^*} \leq 1. \tag{2.28}$$

De la hipótesis (2.24) y de (2.28) se deduce que

$$\|g\|_{Y^*} \leq C. \tag{2.29}$$

De la segunda desigualdad de (2.27) y de (2.29) se sigue que

$$1 < g(y_0) \leq \|g\|_{Y^*}\|y_0\|_Y \leq C\|y_0\|_Y,$$

es decir que $y_0 \notin B_\delta^Y$ con $\delta = 1/C$. Por lo tanto se cumple (2.26). Esta contención y el Lema 6 implican que

$$B_\delta^Y \subset T(B_1^X). \tag{2.30}$$

Finalmente, no es difícil ver que (2.30) implica la sobreyectividad de T. En efecto, dado $y \in Y$, se tiene

$$\frac{\delta}{2\|y\|} y \in B_\delta^Y \subset T(B_1^X),$$

de donde existe $x \in B_1^X$ tal que

$$Tx = \frac{\delta}{2\|y\|} y,$$

de donde

$$T\left(\frac{2\|y\|}{\delta} x\right) = y.$$

Por tanto T es sobre.

■

2.4. Problemas de certamenes

Ejercicio 6 *(P1 C1 2016-1) Demuestre el teorema de Krein-Milman.*
Teorema de Krein-Milman. *Sea X un espacio vectorial normado, $K \subset X$ un conjunto compacto convexo y denotemos por E al conjunto de puntos extremos de K. Entonces se tiene $K = \overline{conv(E)}$. Es decir, K es la cerradura del menor convexo que contiene a sus puntos extremos.*
Para probarlo, proceda como sigue: Sea $\mathcal{P}$ la colección de conjuntos extremos cerrados de K. Para cada $A \subset X$, $f \in X^*$, denotamos $A_f := \{x \in A : f(x) = \max_{z \in A} f(z)\}$ ($A_f = \emptyset$ si el máximo no se alcanzara).

(1) Pruebe que dados $f \in X^*$ y $S \in \mathcal{P}$, entonces $S_f \in \mathcal{P}$.

(2) Sea $S \in \mathcal{P}$ y considere la colección $\mathcal{P}_1$ de conjuntos extremos cerrados contenidos en S. Entonces existe una subcolección totalmente ordenada y maximal $\Omega \subset \mathcal{P}_1$. Tomar $M = \bigcap_{T \in \Omega} T$. Pruebe que M contiene un solo punto. Deduzca que todo $S \in \mathcal{P}$ contiene algún punto extremos de K.

(3) Sea $H = conv(E)$. Pruebe que $\overline{H} \subset K$, y que $S \cap H \neq \emptyset$ para todo $S \in \mathcal{P}$.

(4) Suponga que existe $x_0 \in K \setminus \overline{H}$; pruebe que existe $f \in X^*$ tal que $K_f \cap \overline{H} = \emptyset$. Concluya la demostración del teorema de Krein-Milman.

Demostración:
(1) Sea $f \in X^*$ y $S \in \mathcal{P}$. Dados $x, y \in K$, $t \in (0,1)$ tal que $tx + (1-t)y \in S_f$, se tiene $tx + (1-t)y \in S$ y $f(tx + (1-t)y) = \max_{z \in S} f(z)$. Como S es extremal se tiene $x, y \in S$. Luego

$$f(x), f(y) \leq \max_{z \in S} f(z)$$

pero

$$(1-t)\max_{z\in S} f(z) \geq (1-t)f(y) = \max_{z\in S} f(z) - tf(x) \geq \max_{z\in S} f(z) - t\max_{z\in S} f(z) = (1-t)\max_{z\in S} f(z)$$

dado que $(1-t) \neq 0$ (> 0)

$$\max_{z\in S} f(z) = f(y)$$

y análogamente

$$\max_{z\in S} f(z) = f(x).$$

Por lo tanto $x, y \in S_f$. Del hecho

$$S_f = f^{-1}\left(\{\max_{z\in S} f(z)\}\right)$$

sigue que S_f es cerrado por ser preimagen de un conjunto cerrado (pues en $\mathcal{R}$ el singleton es cerrado) bajo una función continua. Por consecuencia $S_f \in \mathcal{P}$.

(2) Consideremos la colección $\mathcal{P}_1$ parcialmente ordenada por la inclusión de conjuntos. Por el Principio Maximal de Hausdorff existe una subcolección Ω totalmente ordenada y maximal en $\mathcal{P}_1$.
Sea $M = \bigcap_{T\subset\Omega} T$. Sea $t \in (0,1)$, si $tx+(1-t)y \in M$ con $x, y \in K$ entonces $tx+(1-t)y \in T$ para todo $T \subset \Omega$ y dado que cada T es extremo, $x, y \in T$ para todo $T \subset \Omega$, i.e. $x, y \in M$ por lo cual M es un conjunto extremo. Siendo Ω maximal, se tiene que $M \in \Omega$. Ahora, dado que M es intersección de cerrados contenidos en un compacto, el mismo M es compacto, el cual es no vacío, pues los conjuntos no vacíos T están ordenados y tienen al menos un punto en común. Si $f \in X^*$, entonces M_f es no vacío, pues M es compacto, el cual a su vez es cerrado y extremo, por lo que $M \subset M_f$. Sean $x, y \in M$ distintos, por aplicación estándar del Teorema de Hahn-Banach, existe un funcional $\widehat{f} \in X^*$ tal que $\widehat{f}(x) \neq \widehat{f}(y)$ (en efecto, X^* separa puntos), luego $x, y \in M_{\widehat{f}}$, esto es,

$$\widehat{f}(x) = \max_{z\in M} f(z) = \widehat{f}(y).$$

Esto último es una contradicción, luego $x = y$ y dado que $M \neq \emptyset$,el conjunto M contiene sólo un punto. La conclusión de que todo $S \in \mathcal{P}$ contiene un punto extremo de K es clara por construcción.

(3) Definir $H = \text{conv}(E)$. Puesto que $E \subset K$ por definición, y K es un conjunto convexo, tomando $\text{conv}(\cdot)$ se tiene que $H = \text{conv}(E) \subset K$. Tomando cerradura, como K es compacto, se tiene $\overline{H} \subset K$.
Por el inciso (2) sabemos que todo $S \in \mathcal{P}$ contiene un punto extremo de K, i.e. $S \cap E \neq \emptyset$, sigue que $S \cap H \neq \emptyset$.

(4) Suponga $K \neq \overline{H}$. Entonces existe $x_0 \in K \setminus \overline{H}$, como $\{x_0\}$ es cerrado convexo y $\overline{H}$ es compacto convexo, y además $\{x_0\} \cap \overline{H} = \emptyset$, por Teorema de Hahn-Banach en su forma geométrica, existe un hiperplano cerrado que separa estricamente a ambos conjuntos, i.e. existe $f \in X^*$ y $\alpha \in \mathcal{R}$ tal que para todo $x \in \overline{H}$

$$f(x) < \alpha < f(x_0) \Longrightarrow f(x) < \alpha < \max_{z\in K} f(z)$$

lo cual se traduce en que $K_f \cap \overline{H} = \emptyset$, y puesto que K_f es un conjunto extremo y cerrado, se obtiene una contradicción por el inciso (3). Se concluye que $\overline{H} = K$.

$\blacksquare$

Ejercicio 7 *(P3 C1 2016-1) Sean $X = \ell^1(\mathbb{N})$ y $A : D(A) \subset X \to X$ definido por*

$$D(A) = \{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X : \sum_{n\in\mathcal{N}} n|x_n| < \infty\}$$

y

$$Ax = \{nx_n\}$$

para cada $x = \{x_n\} \in D(A)$.

1. *Pruebe que A está densamente definido.*

2. *Determine $D(A^*)$, A^* y $\overline{D(A)}$.*

Demostración:

1. Debemos probar que $D(A)$ es denso en $\ell^1(\mathbb{N})$. Sea $x \in \ell^1(\mathbb{N})$ y definamos para cada $N \in \mathbb{N}$ $y^N = \{y_n^N\}_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$y_n^N = \begin{cases} x_n, & n \leq N \\ 0, & n > n \end{cases}.$$

Entonces

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n|y_n^N| = \sum_{n=1}^{N} n|y_n^N| \leq N \sum_{n=1}^{N} |y_n^N| = N \sum_{n=1}^{N} |x_n| \leq N\|x\|_{\ell^1(\mathbb{N})} < \infty$$

por lo que $y^N \in D(A)$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Además

$$\|x - y^N\|_{\ell^1(\mathbb{N})} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n^N| = \sum_{n\geq N+1} |x_n| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

por lo cual $\{y^N\}_{N\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ converge a $x \in \ell^1(\mathbb{N})$ y se concluye que $D(A)$ es denso en $\ell^1(\mathbb{N})$.

2. Por definición, para $y \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ se tiene $y \in D(A^*)$ si y solo si

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} ny_n x_n\right| \leq C\|x\|_{\ell^1(\mathbb{N})} \quad \forall x \in D(A). \tag{2.31}$$

Probaremos que $D(A^*) = \{y \in \ell^\infty(\mathbb{N}) : \text{ existe } C > 0,\ n|y_n| \leq C\ \forall n \in \mathbb{N}\}$.

($\supset$) Si $n|y_n| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} ny_n x_n\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} n|y_n||x_n| \leq C \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = C\|x\|_{\ell^1(\mathbb{N})}.$$

($\subset$) Sea $y \in D(A^*)$ y definimos para cada $m \in \mathbb{N}$ $x = \{x_n\}$ por

$$x_m = \begin{cases} \operatorname{sgn}(y_m), & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

de lo cual se tiene $x \in D(A)$ y

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} ny_n x_n = m|y_m|.$$

Por (2.31) tenemos $m|y_m| \leq C\|x\|_{\ell^1(\mathbb{N})} = C$ para todo $m \in \mathbb{N}$.
Ahora, claramente $A^*y = \{ny_n\} \in \ell^\infty \; \forall y \in D(A^*)$.
Por último, notar que $D(A^*) \subset c_0$, esto es, $y_n \to 0$ para todo $y = \{y_n\} \in D(A^*)$. Afirmamos que $\overline{D(A^*)} = c_0$. En efecto, si $z = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$, para cada $N \in \mathbb{N}$ definir

$$y_n^N = \begin{cases} x_n, & n \leq N \\ 0, & n > n \end{cases}$$

de donde $\{ny_n\}_n \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, por lo que $y^N = \{y_n^N\}_n \in D(A^*)$ y además

$$\|y^N - z\|_\infty = \sup_{n>N} |z_n| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

esto es, $y^N \to z$ en $\ell^\infty(\mathbb{N})$ de donde se sigue la afirmación.

■

Ejercicio 8 *(P3 C1 2017-1) Sean X, Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Demuestre que $T : X \to Y$ es biyectiva si y solo si $T^* : Y^* \to X^*$ es biyectiva, siguiendo las indicaciones*

1. *Para demostrar ($\Longrightarrow$), pruebe primero que para todo par $S \in \mathcal{L}(X,Y)$, $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$ se tiene $(ST)^* = T^*S^*$. Concluya.*

Para probar la parte ($\Longleftarrow$)

1. *Pruebe que existe $\delta > 0$ tal que $\delta B_{X^*} \subset T^*(B_{Y^*})$.*
2. *Demuestre $\|Tx\| \geq \delta\|x\|$ para todo $x \in X$.*
3. *Deduzca que T es inyectivo y que su rango es cerrado.*
4. *Concluya.*

Demostración:
Si T es biyectiva, se ve que

$$I_{X^*} = I_X^* = (T^{-1}T)^* = T^*(T^{-1})^*$$
$$I_{Y^*} = I_Y^* = (TT^{-1})^* = (T^{-1})^*T^*.$$

Lo anterior implica $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. En particular se tiene que T^* es biyectiva.
Suponer T^* biyectiva. Sea satisfacen las hipótesis del Teorema del Mapeo Abierto sobre T^*, luego existe $\delta > 0$ tal que

$$\delta B_{X^*} \subset T^*(B_{Y^*}).$$

Notar que para toda $g \in B_{Y^*}$ se tiene $T^*g \in T^*(B_{Y^*}) \supset \delta B_{X^*}$. Dado $x \in X$, por corolario de Hahn-Banach

$$\|Tx\| = \sup_{g\in B_Y^*} |g(Tx)| \geq \sup_{h\in \delta B_{X^*}} |h(x)| = \delta \sup_{h\in B_{X^*}} |h(x)| = \delta\|x\|. \tag{1.1}$$

Si $Tx = 0$ de la desigualdad (1.1) claramente $x = 0$, luego T es inyectiva. Ahora, si $Tx_n \to y$, entonces $\{Tx_n\}$ es una sucesión de Cauchy, y de (1.1) se tiene

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{\delta}\|Tx_n - Tx_m\|$$

luego $\{x_n\}$ es de Cauchy, como X es Banach $x_n \to x \in X$ y por tanto $Tx_n \to Tx$; consecuentemente $y = Tx \in R(T)$, así $R(T)$ es cerrado. Para concluir, como T^* es inyectiva, por relaciones de ortogonalidad $\overline{R(T)} = Y$, por lo anterior $R(T) = Y$, luego T es sobreyectivo. Se concluye que T es biyectiva. ■

Ejercicio 9 *(P1 C1 2018-1)*

1. *Sea X un espacio de Banach reflexivo. Demuestre que para cada $f \in X^*$ existe $x_0 \in X$ tal que $\|x_0\|_X = 1$ y $f(x_0) = \|f\|_{X^*}$.*
2. *Sea $X = C([-1, 1])$, con la norma del supremo. Definimos, para cada $x \in X$,*

$$f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)dt.$$

   Pruebe que f está bien definida y $f \in X^*$.
3. *Demuestre que $|f(x)| < 2\|x\|_X$ para todo $x \in X$.*
4. *Pruebe que $\|f\|_{X^*} = 2$.*
5. *Deduzca que X no es reflexivo.*

Demostración:

1. Si $f \in X^*$, por el Corolario del Teo HB para el evn X^*, existe $\varphi \in X^{**}$ tal que

$$\|\varphi\|_{X^{**}} = \|f\|_{X^*}, \quad \varphi(f) = \|f\|^2_{X^*}.$$

   Como X es reflexivo existe $x \in X$ tal que $\varphi = J_x$, (en particular $\|x\|_X = \|\varphi\|_{X^{**}}$ por ser J isometría), y por tanto $f(x) = \varphi(f) = \|f\|^2_{X^*}$ y $\|x\|_X = \|f\|_{X^*}$.

   Sea

$$x_0 = \frac{1}{\|x\|_X}x.$$

   Entonces $\|x_0\|_X = 1$, y $f(x_0) = \frac{1}{\|x\|_X}f(x) = \frac{1}{\|f\|_{X^*}}\|f\|^2_{X^*} = \|f\|_{X^*}$.

2. Cada $x \in X$ es continua y por lo tanto integrable, por lo que $f(x)$ está bien definida. Por ser la integral lineal, se tiene que f es lineal. Además, para cada $x \in X$ se tiene

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \left|\int_{-1}^{0} x(t)dt\right| + \left|\int_{0}^{1} x(t)dt\right| \\ &\leq \int_{-1}^{0} |x(t)|dt| + \int_{0}^{1} |x(t)|dt \leq 2\|x\|_X, \end{aligned} \tag{2.32}$$

de donde $\|f\|_{X^*} \leq 2$

3. Sea $x \in X$ con $x \neq 0$ (es claro que $f(0) = 0 = \|0\|_X$). Entonces $x(0) \in [-\|x\|_X, \|x\|_X]$, y éste es un intervalo no degenerado (i.e. tiene longitud positiva). Por tanto es cierto al menos uno de los dos casos siguientes

   a) $-\|x\|_X < x(0)$, o bien
   b) $x(0) < \|x\|_X$.

   Supongamos el caso (i). Entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$x(t) > -\|x\|_X$$

   para todo $t \in [-\delta, \delta]$. Como x es continua se deduce que

$$\int_{-\delta}^{0} x(t)dt > -\delta\|x\|_X. \tag{2.33}$$

   y que

$$\int_{0}^{\delta} x(t)dt > -\delta\|x\|_X. \tag{2.34}$$

   De (2.33) se deduce que

$$f(x) > -\delta\|x\|_X + \int_{-1}^{-\delta} x(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)dt \geq -2\|x\|_X, \tag{2.35}$$

   y de (2.34) se deduce que

$$f(x) < \delta\|x\|_X + \int_{-1}^{0} x(t)dt - \int_{\delta}^{1} x(t)dt \leq 2\|x\|_X. \tag{2.36}$$

   Es decir, hemos probado que

$$|f(x)| < 2\|x\|_X.$$

   La demostración es análoga se se cumple el caso (*ii*).

4. Del inciso anterior tenemos que $\|f\|_{X^*} \leq 2$.

   Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $x_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t \leq -\frac{1}{n} \\ -nt, & -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ -1, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

   Se comprueba directamente que $x_n \in X$, $\|x_n\|_X = 1$, y $f(x_n) = 2 - \frac{1}{n}$.

   Por tanto $2 - \frac{1}{n} \leq \|f\|_{X^*}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se concluye que $\|f\|_{X^*} = 2$.

5. Si $f \in X^*$ está dado en los incisos anteriores y $\|x_0\|_X = 1$, entonces

$$|f(x_0)| < 2\|x_0\|_x = 2 = \|f\|_{X^*}.$$

   Por el inciso (a) se tiene que X no es reflexivo.

6. Si $f \in X^*$ está dado en los incisos anteriores y $\|x_0\|_X = 1$, entonces

$$|f(x_0)| < 2\|x_0\|_x = 2 = \|f\|_{X^*}.$$

   Por el inciso (a) se tiene que X no es reflexivo.

$\blacksquare$

Ejercicio 10 *(P2 C1 2018-1) Sean X, Y espacios de Banach, y $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Demuestre que son equivalentes:*

$$\textit{Existe } C > 0 \textit{ tal que} \quad \|x\|_X \leq C\|Tx\|_Y \quad \forall x \in X, \tag{2.37}$$

y

$$T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*) \ \ \textit{es sobreyectivo.} \tag{2.38}$$

Para esto, siga las siguientes indicaciones:
Para probar la parte ((2.38) $\Rightarrow$ (2.37)):

1. *Pruebe que existe $\delta > 0$ tal que $\delta B_{X^*} \subset T^*(B_{Y^*})$.*

2. *Demuestre que, para $x \in X$, $\|Tx\| = \sup\{(T^*g)x \,:\, g \in Y^*, \|g\| \leq 1\}$.*

3. *Deduzca que $\|Tx\| \geq \delta \sup\{h(x) \,:\, h \in X^*, \|h\|_{X^*} \leq 1\}$.*

4. *Concluya.*

Para demostrar la implicancia ((2.37) $\Rightarrow$ (2.38)):

1. *Pruebe que $T^{-1} : T(X) \longrightarrow X$ está bien definida y es continua.*

2. *Pruebe que $T(X)$ es un espacio de Banach.*

3. Sea $\varphi \in X^*$. Pruebe que $\widehat{\varphi} := \varphi \circ T^{-1}$, definido en $T(X)$, posee una extensión $\widetilde{\varphi} \in Y^*$.

4. Concluya.

Demostración:

1. Como T^* es sobreyectivo, por el TMA se tiene que es un operador abierto. En particular $T^*(B_{Y^*})$ es un abierto que contiene al 0. Entonces existe $\delta > 0$ tal que
$$\delta B_{X^*} = B_{X^*}(0,\delta) \subset T^*(B_{Y^*}).$$

2. Para cada $x \in X$, por el Teorema de HB para $Tx \in Y$ se tiene que
$$\begin{aligned}\|Tx\|_Y &= \sup\{g(Tx) \,:\, g \in Y^*, \|g\| \leq 1\}\\ &= \sup\{(T^*g)x \,:\, g \in Y^*, \|g\| \leq 1\}\end{aligned}$$

3. Por el inciso (a), para cada $h \in X^*$, $\|h\|_{X^*} \leq 1$ se tiene que existe $g \in Y^*$, $\|g\| \leq 1$ tal que $\delta h = T^*y$. Por tanto
$$\delta \sup\{h(x) \,:\, h \in X^*, \|h\|_{X^*} \leq 1\} \leq \sup\{(T^*g)x \,:\, g \in Y^*, \|g\| \leq 1\} = \|Tx\|_Y,$$
donde la identidad se tiene por el inciso (b).

4. Por el Teorema de HB se tiene que $\sup\{h(x) \,:\, h \in X^*, \|h\|_{X^*} \leq 1\} = \|x\|_X$ y por tanto del inciso (c) concluimos (2.37) con $C = \frac{1}{\delta}$.

5. Por (2.37), si $Tx = 0$ entonces $x = 0$, de donde T es inyectiva, y por tanto $T : X \longrightarrow T(X)$ es una biyección y entonces $T^{-1} : T(X) \longrightarrow X$ está bien definida.
Además, para cada $y \in T(X)$ (entendido éste como un subespacio de Y) existe una única $x \in X$ tal que $Tx = y$, de manera que, gracias a (2.37) se tiene
$$\|T^{-1}y\|_X = \|T^{-1}(Tx)\|_X = \|x\|_X \leq C\|Tx\|_Y = C\|y\|_Y,$$
de donde se sigue que T^{-1} es acotada con $\|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(T(X),X)} \leq C$.

6. Como T es lineal, claramente $T(X)$ es un subespacio vectorial de Y.

   Probemos que es cerrado: Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T(X)$ una sucesión tal que $y_n \to y \in Y$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $Tx_n = y_n$. Por (2.37) se tiene que
$$\|x_n - x_m\|_X \leq C\|y_n - y_m\|_Y$$
para todo $n, m \in \mathbb{N}$, y por tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X. Entonces existe $x := \lim_{n\to\infty} x_n \in X$. Por continuidad de T se tiene $y = \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$, es decir $y \in T(X)$. Por tanto $T(X) \subset Y$ es cerrado.

   Como Y es completo, se concluye que $T(X)$ también lo es, y por tanto es espacio de Banach.

7. Tenemos que $\widehat{\varphi}$ es un funcional lineal, y por (e) se tiene que es continuo en $T(X)$ (con $\|\widehat{\varphi}\|_{T(X)^*} \leq C\|\varphi\|_{X^*}$). Por el Teorema de HB, posee una extensión $\widetilde{\varphi} \in Y^*$.

8. Probaremos que T^* es sobreyectivo: Sea $\varphi \in X^*$. Definamos $\widetilde{\varphi} \in Y^*$ como en el inciso anterior. Entonces, para cada $x \in X$ se tiene
$$(T^*\widetilde{\varphi})x = \widetilde{\varphi}(Tx) = \widehat{\varphi}(Tx) = (\varphi \circ T^{-1})(Tx) = \varphi(x),$$
es decir, $T^*\widetilde{\varphi} = \varphi$. Por tanto T^* es sobreyectivo.

■

Ejercicio 11 *(P3 C1 2018-1) Sea X un espacio vectorial normado, y $M \subset X$ un subespacio cerrado. Se define el espacio cociente X/M como el conjunto de clases de equivalencia de la relación $y \sim x$ si $y - x \in M$, con la norma*
$$\|[x]\| = \text{ínf}\{\|x - m\| \,:\, m \in M\}.$$
Considere ahora $M^\perp$, subespacio cerrado de X^* y el correspondiente cociente $X^*/M^\perp$. Demuestre que
$$[f] \longmapsto f|_M$$
define un isomorfismo isométrico entre el cociente $X^*/M^\perp$ y el espacio dual M^*.

Demostración:
Sea $H : X^*/M^\perp \longmapsto M^*$ dada por $H([f]) = f|_M$. Demostremos primero que H está bien definida y es lineal.
Si $f_1, f_2 \in X^*$, entonces $[f_1] = [f_2]$ si y solo si $f_1 - f_2 \in M^\perp$, esto es $f_1 = f_2 + g$, con $g \in M^\perp$, luego
$$f_1|_M = (f_2 + g)|_M = f_2|_M + g|_M.$$
Como $g \in M^\perp$, se tiene que $g|_M = 0_{M^*}$.
Por lo tanto, si $[f_1] = [f_2]$ se tiene que $H([f_1]) = H([f_2])$, luego H está bien definida.

La linealidad de H es directa de la definición de suma y ponderación por escalar en X/M. En efecto, dados $[f], [g] \in X^*/M^\perp$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene $[f] + \lambda[g] = [f + \lambda g]$, luego
$$H([f] + \lambda[g]) = H([f + \lambda g]) = (f + \lambda g)|_M = f|_M + \lambda g|_M = H([f]) + \lambda H([g]).$$

Demostremos que H es inyectiva: Si $f|_M = H([f]) = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in M$, lo cual significa que $f \in M^\perp$ y por tanto $[f] = 0$.

Demostremos que H es epiyectiva. Sea $g \in M^*$, por consecuencia del Teorema Analítico de Hanh-Banach, existe $f \in X^*$ tal que $f|_M = g$, luego
$$H([f]) = f|_M = g,$$

y se concluye que H es una biyecci'on.

Demostremos que H es una isometría (y en particular, es continua).
Tomemos $h \in M^{\perp}$, entonces para toda $y \in M$ tal que $\|y\|_X \leq 1$ se tiene

$$|f(y)| = |(f+h)(y)| \leq \|f-h\|_{X^*},$$

de donde

$$\|f|_M\|_{M^*} = \sup\{|f(y)| \,:\, y \in M, \|y\|_M \leq 1\} \leq \|f-h\|_{X^*}.$$

Tomando ínfimo sobre $M^{\perp}$ tenemos

$$\|f|_M\|_{M^*} \leq \inf\{\|f-h\|_{X^*} \,:\, h \in M^{\perp}\} = \|[f]\|_{X^*/M^{\perp}},$$

luego

$$\|H([f])\|_{M^*} \leq \|[f]\|.$$

Demostremos ahora que $\|[f]\| \leq \|H([f])\|$. Denotemos por $g := f|_M$, como $g \in M^*$, por consecuencia del Teorema Analítico de Hanh-Banach, existe $\overline{f} \in X^*$, tal que

$$\overline{f}|_M = g \quad \text{y} \quad \|\overline{f}\|_{X^*} = \|g\|_{M^*}.$$

Entonces

$$\|f|_M\|_{M^*} = \|\overline{f}\|_{X^*} = \|\overline{f} - 0\|_{X^*} \geq \inf\{\|\overline{f}-h\|_{X^*} \,:\, h \in M^{\perp}\} = \|[\overline{f}]\|_{X^*/M^{\perp}}.$$

Es decir,

$$\|H([f])\| \geq \|[\overline{f}]\|.$$

Observemos que $f - \overline{f} \in M^{\perp}$, luego $[f] = [\overline{f}]$, por lo tanto

$$\|H([f])\| \geq \|[f]\|.$$

Hemos demostrado que H es una isometría. ■

2.5. Ejercicios

Ejercicio 12

1. *Sean X un subespacio vectorial cerrado propio (i.e. contenido estricamente) en un espacio normado $\mathcal{N}$ y $\xi \in \mathcal{N} \setminus X$. Si $\delta := d(\xi, X)$, entonces existe $f \in \mathcal{N}^*$ tal que*

$$\|f\| = 1, \quad f(\xi) = \delta \ \text{y} \ f|_X = 0.$$

2. *Utilice el resultado anterior para dar una demostración alternativa del Corolario 4.*

Capítulo 3

Topologías débiles

En general, en un espacio vectorial normado, un conjunto cerrado y acotado pueden no ser compacto. Por ejemplo, si $X = \ell^2$, el conjunto $C = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (la base canónica) es un conjunto infinito discreto, cuyos elementos son vectores unitarios. Esto muestra el contraste con la propiedad de compacidad en $\mathbb{R}^n$. De hecho veremos a continuación que los únicos espacios vectoriales normados en los que la bola unitaria cerrada es compacta son justamente los espacios de dimensión finita.

Lema 7 (Lema de Riesz) *Sean X un evn, y $M \subset X$ un subespacio vectorial cerrado propio. Para todo $\eta < 1$ existe $x \in X$ tal que*

$$\|x\|_X = 1, \qquad dist(x, M) \geq \eta.$$

Demostración:
Sea $y \in X \setminus M$ (que existe por hipótesis). Como M es cerrado se tiene $d := dist(y, M) > 0$. Entonces, por definición existe $m_0 \in M$ tal que

$$d \leq \|y - m_0\|_X < \frac{1}{\eta} d.$$

Denotamos $r = \|y - m_0\|_X$, y definimos

$$x = \frac{1}{r}(y - m_0).$$

Entonces claramente se tiene $\|x\|_X = 1$, y no es difícil probar que $dist(x, M) \geq \eta$. En efecto, para cualquier $m \in M$ se tiene

$$x - m = \frac{1}{r}(y - m_0 - rm). \tag{3.1}$$

Como M es un subespacio vectorial, se tiene $m_0 + rm \in M$, y por tanto

$$\|y - m_0 - rm\|_X \geq dist(y, M) = d \tag{3.2}$$

De (3.1) y (3.2) obtenemos

$$\|x - m\|_X \geq \frac{d}{r} > \eta,$$

de donde se concluye que $dist(x, M) \geq \eta$.

■

El siguiente resultado muestra que en un espacio de dimensión infinita, la bola unitaria cerrada no es compacta.

Teorema 11 (Riesz) *Sea X un evn tal que $\overline{B^X}$ es un conjunto compacto. Entonces X es finito-dimensional.*

Demostración:
Supongamos que X no tiene dimensión finita. Esto significa que para todo conjunto finito $F \subset X$ se tiene $\overline{\langle F \rangle} \neq X$. Por tanto podemos tomar $x \in X \setminus \overline{\langle F \rangle}$ y así $\overline{\langle F \cup \{x\} \rangle}$ es tambien un subespacio propio de X, de dimension finita y que contiene propiamente a F.
Aplicando este razonamiento de manera inductiva, se obtiene una sucesión de subespacios vectoriales $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, cada uno de dimension finita (y por tanto cerrado), tales que

$$X_n \subset X_{n+1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.
Del Lema de Riesz en X_{n+1} se sigue que existe $x_n \in X_{n+1}$ tal que $dist(x_n, X_n) \geq 1/2$ y $\|x_n\|_X = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces se tiene, si $m < n$, que $x_m \in X_m \subset X_{n-1}$ y por tanto

$$\|x_n - x_m\|_X \geq dist(x_n, X_{n-1}) \geq 1/2.$$

Es decir, $\{x_n\} \subset \overline{B_1^X}$ no posee subsucesiones convergentes, de donde se concluye que $\overline{B_1^X}$ no es un conjunto compacto. ■

Podemos observar que si se tienen dos topologías en el mismo espacio, una contenida en la otra, en la topología más pequeña habrá mas posibilidades de tener conjuntos compactos. Esto nos lleva estudiar, en un espacio vectorial normado X, otras topologías con menos abiertos que los definidos por su norma, pero que sigan haciendo continuos a los elementos de X^*.

3.1. Topologías generadas por un conjunto de funciones

Sea X un conjunto, sean Z un espacio topológico, y sea $\Phi = \{\varphi_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una colección de funciones

$$\varphi_\alpha : X \longrightarrow Z.$$

Buscamos una topología para X que haga continua a cada función φ_α. Por supuesto, una solución trivial sería definir la topología discreta: en tal caso cualquier función es continua. Por supuesto, nos interesa construir una topología no trivial, por o que definiremos la topología *más pequeña* (es decir, con menos abiertos) con tal propiedad.

Por la defininción de continuidad de funciones, es claro que la topología en cuestión debe contener los conjuntos de la forma $\varphi_\alpha^{-1}(U)$ para todo $U \subset Z$ abierto. Es decir, debe contener a la colección

$$\mathcal{S}_\Phi := \{\varphi_\alpha^{-1}(U) \,:\, U \subset Z \text{ es abierto}, \alpha \in \Lambda\}. \tag{3.3}$$

De hecho, tal contención es también suficiente: si una topología contiene a $\mathcal{S}_\Phi$, entonces las funciones φ_α son continuas. Hemos transformado el problema original al de determinar la menor topología que contiene a la coleección $\mathcal{S}_\Phi$.
Lo que haremos a continuación es desarrollar un procedimiento para definir una topología generada por una colección arbitraria de conjuntos, y la aplicaremos a la colección definida por (3.3).
Dada una colección $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X, una topología debe contener a las intersecciones de cualquier numero finito de elementos de $\mathcal{S}$, por lo que resulta natural definir:

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{j=1}^{n} G_j \,:\, G_j \in \mathcal{S} \quad \forall j = 1, \ldots, n,\, n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{3.4}$$

También deberá contener a las uniones de elementos, por lo cual definimos

$$\mathcal{T} := \left\{ \bigcup_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha \,:\, B_\alpha \in \mathcal{B} \quad \forall \alpha \in \Gamma \right\}. \tag{3.5}$$

Proposición 9 *OBS: Para cualquier colección $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$, la colección $\mathcal{T}$ definida en (3.5) es una topología en X, siempre y cuando se tome la convención que una intersección de una colección vacía resulta el conjunto completo X (y una unión de una colección resulta $\emptyset$). Si $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\Phi$, definida por (3.3), entonces $\mathcal{T}$ definida en (3.5) es una topología en X, y es la topología más pequeña para la cual todas las funciones φ_α son continuas. Esta topología será denotada por $\mathcal{T}(X, \Phi)$.*

Demostración:
Por construcción $\mathcal{T}$ es cerrada bajo uniones arbitrarias. Se prueba, usando inducción (EJERCICIO), que también lo es bajo intersecciones finitas.
Por otra parte, si $\mathcal{S}$ está definido por (3.3) y $U \subset Z$ es abierto, por construcción se cumple $\varphi_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, por lo que φ_α es continua para toda α.
Finalmente, si $\mathcal{T}_1$ es una topología en X para la cual toda φ_α es continua, entonces $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}_1$, de donde obtenemos $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_1$ y por tanto $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1$. ■

Observación 3 *Comentar la definición de bases y subbases de topologías.*

Proposición 10 *Sea Φ una colección de funciones de un conjunto X en un espacio topológico Z. Si $\mathcal{T} = \mathcal{T}(X, \Phi)$ es la topología generada por Φ, y $\{x_n\} \subset X$ es una sucesión, se tiene*

$$x_n \to x \text{ en } (X, \mathcal{T}) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(x_n) \to \varphi(x) \text{ en } Z \quad \forall \varphi \in \Phi.$$

Demostración:
($\Longrightarrow$) Directo de la continuidad.
($\Longleftarrow$) Sea $V \in \mathcal{T}$ tal que $x \in V$. Probaremos que existe N tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq N$.
Por definición de $\mathcal{T}$, existen $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Lambda$ y $U_1, \ldots, U_m \subset Z$ abiertos tales que

$$x \in B := \bigcap_{j=1}^{m} \varphi_{\alpha_j}^{-1}(U_j) \subset V$$

entonces $\phi_{\alpha_j}(x) \in U_j$ para cada j.
Por hipótesis, existe N_j tal que $\phi_{\alpha_j}(x_n) \in U_j$ para todo $n \geq N_j$, para cada j.
Tomamos $N = \text{máx}\{N_1, \ldots N_m\}$, y obtenemos que $\phi_{\alpha_j}(x_n) \in U_j$ para todo $n \geq N$, para cada j, de donde

$$x_n \in B := \bigcap_{j=1}^{m} \varphi_{\alpha_j}^{-1}(U_j) \subset V$$

para todo $n \geq N$. ■

3.2. Topología débil en un espacio vectorial normado

Definición 10 *Si X es un espacio vectorial normado, denotaremos* **topología débil** *en X a la topología $\mathcal{T}(X, X^*)$. Es decir, la generada por la colección de funcionales lineales continuos en X.*

Una propiedad importante de una topología es la de ser Hausdorff (o separar puntos). Las topologías débiles tienen esta propiedad:

Proposición 11 *La topología $\mathcal{T}(X, X^*)$ es Hausdorff.*

Demostración:
Usar HB. ■

Dada una sucesión $\{x_n\} \subset X$, denotaremos $x_n \to x$ en $\mathcal{T}(X, X^*)$ por

$$x_n \rightharpoonup x,$$

y direcmos que $\{x_n\}$ *converge débilmente* en X al límite x.
Entonces por la Proposición **??**, se tiene que

$$x_n \rightharpoonup x \quad \Longleftrightarrow \quad f(x_n) \to f(x) \;\text{ en } \mathbb{R} \quad \forall f \in X^*.$$

En las siguientes proposiciones analizaremos las principales propiedades de la convergencia débil de sucesiones.

Proposición 12 *Si $x_n \to x$ en X, entonces $x_n \rightharpoonup x$.*

Demostración:
Se tiene directamente por continuidad. ■

Ejemplo 12 *Si $X = \ell^2$, se muestra que la sucesión canónica $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ no posee subsucesiones convergentes en X, y converge débilmente a 0.*

Proposición 13 *Si $x_n \rightharpoonup x$ entonces $\{x_n\}$ es acotada en X, y se tiene*

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|. \tag{3.6}$$

Demostración:
Por hipótesis tenemos que $f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in X^*$. Si consideramos el conjunto $B = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, se tiene en particular que $f(B) = \{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es acotado para todo $f \in X^*$. Por el Teorema de Banach-Steihauss (Corolario (**??**)) se tiene entonces que B es acotado.
Por otra parte, para toda $f \in X^*$ se tiene

$$|f(x_n)| \leq \|f\|_{X^*}\|x_n\|_X,$$

de donde

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f(x_n)| \leq \|f\|_{X^*} \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X,$$

lo cual implica, usando el Teorema de Hahn-Banach (Corolario **??**), que

$$\|x\|_X = \sup\{|f(x)| \,:\, f \in X^*, \|f\|_{X^*} \leq 1\} \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X.$$

■

Proposición 14 *Si $\{f_n\} \subset X^*$ tal que $f_n \to f$ en X^*, y $x_n \rightharpoonup x$, entonces $f_n(x_n) \to f(x)$ en $\mathbb{R}$.*

Demostración:
Por la Proposición anterior existe $C > 0$ tal que $\|x_n\|_X \leq C$ para toda $n \in \mathbb{N}$, de donde

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x)| &\leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\ &\leq \|f_n - f\|_{X^*}\|x_n\|_X + |f(x_n) - f(x)| \\ &\leq C\|f_n - f\|_{X^*} + |f(x_n) - f(x)| \to 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

■

Teorema 12 *Sea X un evn, y $C \subset X$ un subconjunto convexo. Entonces C es cerrado si y solo si es cerrado débil.*

Demostración:
Una implicancia es directa, la otra usar HB para tener una vecindad débil que no intercecta el convexo cerrado fuerte C.

■

Corolario 11 (Mazur) *Si $\{x_n\} \subset X$ es una sucesión débilmente convergente a $x \in X$, entonces x es límite de combinaciones lineales convexas de elementos de $\{x_n\}$.*

Examinaremos ahora si la topología débil puede coincidir con la topología de la norma. En el ejemplo **??** vimos que la tología débil de ℓ^2 es estrictamente menor a la topología de la norma. Veremos en seguida que esta es la situación general en los espacios de dimensión infinita.

Para esto, observemos que para todo conjunto abierto débil U y cada $x_0 \in U$, existen $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ y $\varepsilon > 0$ tales que si denotamos

$$V(x_0, \{f_j\}, \varepsilon) := \{x \in X \, : \, |f_j(x - x_0)| < \varepsilon \quad \forall j = 1, \ldots, n\},$$

entonces se tiene $x \in V(x_0, \{f_j\}, \varepsilon) \subset V$.

Proposición 15 *Sea X un evn de dimensión infinita y V una vecindad débil del 0. Entonces V contiene algún subespecio vectorial no trivial de X.*

Demostración:
Por hipótesis existen $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$V(0, \{f_j\}, \varepsilon) \subset V.$$

Definimos entonces $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por $\varphi(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$. Si φ fuera inyectiva, tendríamos X isomorfo al subespecie $\varphi(X) \subset \mathbb{R}^n$, lo que implica que X es de dimensión finita, contrario a la hipótesis. Por tanto φ no es invectiva, de donde $\ker(\varphi) \neq \{0\}$. Por construcción se tiene que $x \in \ker(\varphi)$ implica que $f_j(x) = 0$ para todoo $j = 1, \ldots, n$, de donde concluimos que

$$\ker(\varphi) \subset V(0, \{f_j\}, \varepsilon) \subset V.$$

Es decir, V contiene al subespacio vectorial no trivial $\ker(\varphi)$. ■

Visto hasta aquí el LUNES 16 ABRIL 2018.

Dado que existen abiertos de la topología de la norma que no contienen subespacios no triviales (por ejemplo, cualquier bola abierta B_r con $r > 0$), podemos asegurar que las topologías fuerte y débil siempre son distintas. Es decir, hemos probado:

Corolario 12 *Si X es un evn de dimensión infinita, entonces la topología débil es estrictamente más pequeña que la topología de la norma.*

Ejemplo 13 *Si X es de dimensión infinita, la topología débil de X no puede ser generada por norma. Si $\sigma(X,X^*)$ fuese generada por una norma $\|\cdot\|^w$, entonces la bola abierta $B_{\|\cdot\|^w}(0,1)$ seria un abierto que contiene un subespacio vectorial V no trivial (pues X es de dimensión infinita). Lo anterior no es posible pues si $x \in B_{\|\cdot\|^w}(0,1) \cap V$ con $\|x\|) = 1/2$, entonces $4x \in B_{\|\cdot\|^w}(0,1)$, lo que es un absurdo pues $\|4x\|^w = 2$.*

Ejemplo 14 *Sean $X = \ell^1$ y $\{e_n\} \subset \ell^1$ definida como la base canónica. Es fácil ver que esta sucesión no posee subsucesiones convergentes.*

Ejemplo 15 *Sean $X = \ell^1$, $\{x_n\} \subset \ell^1$, $x \in \ell^1$. Se puede demostrar que*

$$x_n \to x \Longleftrightarrow x_n \rightharpoonup x.$$

En efecto, en general convergencia fuerte implica convergencia débil. Se deja la otra implicancia de TAREA.
Este resultado nos dice que, en ℓ^1, las convergencias fuerte y débil coinciden. Esto no representa una contradicción con el resultado anterior, dado que una topología no necesariamente está determinada por la convergencia de las sucesiones. Este es el caso de la topología débil, que en general no es metrizable .

Proposición 16 *Si X es un ven de dimensión finita, entonces la topología débil coincide con la topología inducida por la norma.*

Demostración:
Suponer X de dimensión n. Para todo $x \in X$ se tiene $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ donde $\{e_i\}$ es base de X, con esto, considerar la proyección $\pi_i \in X^*$ definida por $\pi_i(x) = x_i$. Dado $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$, basta ver que B^X en norma del máximo pertenece a la topología débil, pues todas las normas son equivalentes en dimensión finita. Se tiene

$$\begin{aligned} B^X_{\|\cdot\|_\infty}(x_0,\varepsilon) &= \{x \in X : \|x - x_0\|_\infty < \varepsilon\} \\ &= \{x \in X : |x_i - x_{0i}| < \varepsilon,\ \forall i = 1,...,n\} \\ &= \{x \in X : |\pi_i(x - x_0)| < \varepsilon,\ \forall i = 1,...,n\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}\big(B_{\mathbb{R}}(x_0,\varepsilon)\big) \end{aligned}$$

Luego la bola en la topología fuerte es intersección finita de bolas en la topología débil, así $B^X \in \sigma(X,X^*)$. Como la topología débil es más gruesa que la topología fuerte, se concluye que ambas coinciden en el caso de dimensión finita. ■

3.3. Topología débil$-*$ de X^*

Definición 11 (Topología débil$-*$) *Si X es un evn y X^* su espacio dual, denotaremos por topología débil$-*$ en X^* a la topología $\mathcal{T}(X^*, \{J_x\}_{x\in X})$.*
Es decir, es la menor topología que hace continuas a todos los funcionales evaluación J_x en X^*. Será usualmente denotada por $\mathcal{T}(X^*,X)$, dada la identificación usual entre X y $J(X)$.

Observación 4 *Es directo ver que la topología débil$-*$ separa puntos en X^*: Si $f_1, f_2 \in X^*$ con $f_1 \neq f_2$, entonces existe $x_0 \in X$ tal que $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$, es decir $J_{x_0}(f_1) \neq J_{x_0}(f_2)$. Por lo tanto $\mathcal{T}(X^*, X)$ es Hausdorff (ver Observación* **??***), y por tanto el límite de sucesiones es único.*

De esta manera, dado que $J(X) \subset X^{**}$, por construcción tenemos que la topología débil$-*$ está contenida en la topología débil de X^* (que corresponde a $\mathcal{T}(X^*, X^{**})$). Si X es reflexivo (es decir, si $J(X) = X$), estas dos topologías de X^* coinciden. Si $\{f_n\} \subset X^*$, $f \in X^*$, denotaremos f_n

Ejemplo 16 *Sea $X = c_0$, con lo que $X^* = \ell^1$. Determinaremos el límite débil$-*$ de (e_n): Si $y = (y_n) \in c_0$, entonces*

$$\langle e_n, y\rangle_{\ell^1, c_0} = \sum_{k=1}^{\infty} e_n(k) y_k = y_n \to 0.$$

Es decir, $\{e_n\} \subset \ell^1$ converge a cero en la topología débil$-*$.

Ejemplo 17 *Sea $X = c_0 := \{x = \{x_n\} \in l^\infty : \lim x_n = 0\}$. Denotemos por $\{e_n\}$ la sucesión definida por $e_n = (0, ..., 1, ..., 0, ...)$ (es decir $e_n^k = \delta_{kn}$, base estándar ya sea de X, X^* o X^{**}). A continuación mostraremos las siguientes afirmaciones.*

(1) $\{e_n\}$ converge débilmente en X a cero y no converge fuertemente.

(2) $\{e_n\}$ converge débil-$*$ en X^* y no converge débil ni fuertemente.

(3) Si $s_n = \sum_{k\geq n} e_k$ para cada $n \in \mathcal{N}$, entonces $\{s_n\}$ converge débil-$*$ en X^{**} y no converge débil ni fuertemente.

Demostración:
Es un hecho que $X^* = l^1$ y $X^{**} = l^\infty$.

(1) Dado $x \in l^1$ se tiene que $x_n \to 0$ por convergencia de series. Luego $\langle x, e_n\rangle = x_n \to 0$, siendo x arbitrario, se tiene que $e_n \rightharpoonup 0$.
Para $n \neq k$, $\|e_n - e_k\| = 1$, luego $\{e_n\}$ no es de Cauchy, y por tanto no converge.

(2) Consideramos $x \in X$, claramente $\langle e_n, x\rangle = x_n \to 0$, luego $e_n \rightharpoonup^* 0$, pues la convergencia débil-$*$ corresponde a la convergencia puntual de funcionales.
Para $n \neq k$, $\|e_n - e_k\| = 2$, luego $\{e_n\}$ no es de Cauchy, y por tanto no converge.
Consideramos $y = \{1\}_{n\in\mathcal{N}} \subset X^{**}$, luego $\langle y, e_n\rangle = 1$, por lo que e_n no converge débil en X.

(3) Dado $y \in l^1$, se verifica que $\sum_n |y_n| < \infty \Longrightarrow \sum_{n\geq k} |y_n| \to 0$. Afirmamos entonces $\langle s_n, y\rangle \to 0$; en efecto

$$|\langle s_n, y\rangle| = \left|\sum_{k\geq n} y_k\right| \leq \sum_{k\geq n} |y_k| \to 0.$$

Siendo y arbitrario, se tiene que $s_n \rightharpoonup^* 0$ en X^{**}.
Consideremos $c = \{x = (x_n) \in l^\infty : \exists \lim x_n\} \leq l^\infty$ y definamos el funcional $f : c \to \mathcal{R}$ dada por $f(x) = \lim x_n$ el cual es claramente lineal y acotado pues $|f(x)| \leq \sup_{k\geq 1}\{x_k\} = \|x\|$. Siendo la normal un subfuncional lineal, sigue por aplicación estándar del Teorema de Hahn-Banach existe $F \in (l^\infty)^*$ extensión de f. Notar que $F(s_n) = f(s_n) = 1$ para todo $n \in \mathcal{N}$, por lo cual $(s_n)_n$ no converge débil, pues de hacerlo, debería ser 0 su límite.
Notar que $\|s_{n+1} - s_n\| = 1$ por lo cual la sucesión no es de Cauchy, sigue que no converge fuerte.

■

Observemos que para todo conjunto abierto débil$-*$ $U \subset X^*$ y cada $f_0 \in U$, existen $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $\varepsilon > 0$ tales que si denotamos

$$V(f_0, \{x_j\}, \varepsilon) := \{f \in X^* : |(f - f_0)(x_j)| < \varepsilon \quad \forall j = 1, \ldots, n\},$$

entonces se tiene $x \in V(x_0, \{f_j\}, \varepsilon) \subset V$.

Visto hasta aquí el MIERCOLES 18 ABRIL 2018.

Proposición 17 *Sean X un espacio vectorial y $\mathcal{F}$ un espacio vectorial de funcionales lineales en X. Si una funcional lineal $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$, entonces $\varphi \in \mathcal{F}$.*

Para demostrar este resultado, necesitamos primero:

Lema 8 *Sean Z un espacio vectorial y $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ funcionales lineales en Z tales que para cada $z \in Z$ se tiene*

$$\varphi_k(z) = 0 \quad \forall k = 1, \ldots m \quad \Longrightarrow \quad \varphi(z) = 0.$$

Entonces existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que $\varphi = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k$.

Demostración:
Definimos $F : Z \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ por $F(z) = (\varphi(z), \varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots, \varphi_m(z))$. Entonces F es una función lineal, y por tanto $F(Z)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{m+1}$, y en particular es convexo. Además, por hipótesis se tiene que tal conjunto no contiene al punto $x_0 := (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{m+1}$.
Por la versión finito-dimensional del Teorema de Hanh-Banach (ver Corolario **??**), se deduce la existencia de $g \in \mathbb{R}^{m+1}$ y de $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$g \cdot x_0 < \alpha < g \cdot F(z) \quad \forall z \in Z.$$

Es decir, si $g = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots . \lambda_m)$, que

$$\lambda_0 < \alpha < \lambda_0 \varphi(z) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(z) \quad \forall z \in Z. \tag{3.8}$$

De (3.8), tomando en cuenta la literalidad de las funciones φ, φ_k, se deduce (análogamente a la demostración del Teorema **??**), que

$$\lambda_0 \varphi(z) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(z) = 0 \quad \forall z \in Z$$

y que $\lambda_0 < 0$, con lo que concluye la demostración. ■

Demostración (de la Proposición 17):
Dado que $0 \in \varphi^{-1}(-1,1)$, y este es un abierto débil, existe una vecindad básica V de la topología $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ tal que

$$0 \in V \subset \varphi^{-1}(-1,1).$$

Por definición de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$, existen $m \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathcal{F}$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$V = V(0, \{\varphi_k\}, \varepsilon) = \{x \in X \,:\, |f_k(x)| < \varepsilon \quad \forall k = 1, \cdots, m\},$$

y en particular se tiene $\bigcap \ker(\varphi_k) \subset V \subset \varphi^{-1}(-1,1)$.
Entonces, si $x \in \bigcap \ker(\varphi_k)$, como este es un subespacio, se tiene $\lambda x \in \bigcap \ker(\varphi_k)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, y por tanto $|\varphi(\lambda x)| < 1$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, de donde se sigue que $x \in \ker(\varphi)$. Es decir, hemos probado que $\bigcap \ker(\varphi_k) \subset \ker(\varphi)$. Del Lema anterior obtenemos que $\varphi = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k \in \mathcal{F}$. ■

Proposición 18 *Sean X un espacio vectorial, $\mathcal{F}$ un espacio vectorial de funcionales lineales en X y $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$* **un funcional lineal**. *Si el hiperplano $H := \{x \in X : \varphi(x) = \alpha\}$ es cerrado en $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$, entonces $\varphi \in \mathcal{F}$.*

Demostración:
Se deja como ejercicio. Seguir las siguientes indicaciones:

1. Pruebe que existe $x_0 \in X \setminus H$, y V abierto en $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ tal que $V \subset X \setminus H$.

2. Demuestre que podemos asumir (s.p.g.) que $\varphi(x) < \alpha$ para toda $x \in V$.

3. Sea $W = V - x_0$. Demuestre que $W = -W$, y que existe $\delta > 0$ tal que

$$|\varphi(y)| < \delta$$

para todo $y \in W$.

4. Use la Proposición 17.

■

En particular para la topología débil$-*$ se tiene el siguiente resultado.

Corolario 13 *Si $H \subset X^*$ es un hiperplano cerrado en la topología $\mathcal{T}(X^*, X)$ entonces existen $x_0 \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que*

$$H = \{f \in X^* \,:\, f(x_0) = \alpha\}.$$

Del anterior Corolario, podemos deducir que para los espacios no reflexivos, la topología débil$-*$ es estrictamente más pequeña que la topología débil. En efecto, sea $\xi \in X^{**} \setminus J(X)$ y definamos

$$H = \{f \in X^* \,:\, \xi(f) = 0\}.$$

Si H fuera débil$-*$ cerrado, por el Corolario anterior tendríamos que $H = \{f \in X^* : f(x_0) = 0\}$ para algún $x_0 \in X$, y por el Lema 8 se tendría $\xi(f) = \lambda f(x_0)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, lo que contradice que $\xi \notin J(X)$. Por tanto, H es un ejemplo de un cerrado débil (y convexo), que no es cerrado débil$-*$.

3.4. Compacidad en las topologías débiles

El siguiente resultado es un claro ejemplo de la importancia de la topología débil$-*$.

Teorema 13 (Teorema de Banach-Alaouglu) *Si X es un evn y X^* es su espacio dual, la bola unitaria cerrada*

$$\overline{B_1^{X^*}} := \{f \in X^* \,:\, \|f\|_{X^*} \leq 1\}$$

es débil$-*$ compacta.

Visto hasta aquí el VIERNES 20 ABRIL 2018.

Para probar este teorema, usaremos el siguiente resultado sobre homemomorfismos entre topologías generadas por colecciones de funciones. Sea Z un espacio topológico, y X e Y conjuntos en los que se han definido topologías inducidas por las familias de funciones Φ_X y Φ_Y, respectivamente, en el sentido de la Proposición 9. Tenemos el siguiente resultado:

Proposición 19 *Supongamos que existe $h : X \longrightarrow Y$ tal que*

1. *La función h es una biyección.*

2. *Se tiene $\Phi_Y = \{f \circ h^{-1} \,:\, f \in \Phi_X\}$.*

Entonces h es un homemomorfismo con respecto a las topologias $\mathcal{T}(X, \Phi_X)$ y $\mathcal{T}(Y, \Phi_Y)$.

Demostración:
Los conjuntos que forman la subbase para la topología $\mathcal{T}(Y, \Phi_Y)$ (ver construcción de tal topología) son de la forma $g^{-1}(U)$ para $g \in \Phi_Y$ y $U \subset Z$ abierto. Por hipótesis se tiene que $g \in \Phi_Y$ si y solo si existe $f \in \Phi_X$ tal que $g = f \circ h^{-1}$, y por tanto

$$g^{-1}(U) = (f \circ h^{-1})^{-1}(U) = h(f^{-1}(U)).$$

De esta manera, las subbases que definen las topologías satisfacen

$$\mathcal{S}_{\Phi_Y} = \{h(V) \,:\, V \in \mathcal{S}_{\Phi_X}\},$$

y como h es una biyección, se sigue que los abiertos de $\mathcal{T}(Y, \Phi_Y)$ son precisamente de la forma $h(U)$ con $U \in \mathcal{T}(X, \Phi_X)$. Entonces h es un homemomorfismo entre X e Y con sus respecivas topologías. ■

Demostración (del Teorema 13):
Sea $Y = \mathbb{R}^X = \{w : X \longrightarrow \mathbb{R}\}$ dotado de la topología producto. Notar que tal topología se define como la menor que hace continuas a las proyecciones $\pi_x : w \in Y \mapsto w_x \in \mathbb{R}, x \in X$, donde w_x denota la coordenada x de w. Es decir, la topología producto es $\mathcal{T}(Y, \{\pi_x\}_{x \in X})$ (en el sentido de la Proposición 9).
Consideramos la inyección canónica $h : X^* \longrightarrow Y$, que está bien definida dado que los elementos de X^* son en particular funciones reales en X. Si X^* está dotado de la topología débil$-*$ (es decir, es la generada por $\{J_x\}_{x \in X}$), mientras que Y posee la topología producto, probaremos las siguientes dos afirmaciones:

A_1) La función $h : X^* \longrightarrow h(X^*)$ es un homeomorfismo.

A_2) El conjunto $K := h(\overline{B^{X^*}}) \subset Y$ es compacto.

Suponiendo ciertas estas dos afirmaciones, tenemos directamente $\overline{B^{X^*}} = h^{-1}(K)$ es compacto.

Para probar A_1) usaremos la Proposición 19. Notemos primero que las familias de funciones que generan las topologías en juego son $\Phi_{X^*} = \{J_x\}_{x \in X}$ y $\Phi_{h(X^*)} = \{\pi_x\}_{x \in X}$. Tenemos que h es inyectiva por definición y sobreyectiva en su imagen, por lo que el punto 1) está probado. Probemos el punto 2). Para cada $w \in h(X^*)$ existe $f \in X^*$ tal que $w = h(f)$, y por tanto $J_x \circ h^{-1}(w) = J_x(f) = f(x) = w_x$ (coordenada x de $w \in Y$). Es decir, tenemos que $J_x \circ h^{-1} = \pi_x$ para cada $x \in X$, y por tanto se cumple el punto 2).
Por la Proposición 19 tenemos que h es un homeomorfismo, por lo que hemos probado A_1).

Ahora probemos A_2). Para cada $w \in Y$ se tiene que $w \in K$ si y solo si $x \in X \to w_x \in \mathbb{R}$ es lineal y $|w_x| \leq \|x\|_X$ para todo $x \in X$. Es decir, si definimos

$$K_1 = \{w \in Y \,:\, |w_x| \leq \|x\|_X \quad \forall x \in X\},$$

y

$$K_2 = \{w \in Y \,:\, w_{x+y} = w_x + w_y,\, w_{\lambda x} = \lambda w_x \quad \forall x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

tenemos $K = K_1 \cap K_2$.
Ahora, es directo ver que $K_1 = \prod_{x \in X} [-\|x\|, \|x\|]$, y por el teorema de Tíjonov (el producto de espacios compactos es compacto) se tiene que K_1 es compacto en Y. Por otra parte, $K_2 = C_1 \cap C_2$, donde

$$C_1 = \bigcap_{x,y \in X} \{w \in Y \,:\, w_{x+y} - w_x - w_y = 0, \}$$

y

$$C_2 = \bigcap_{x \in X, \lambda \in \mathbb{R}} \{w \in Y \,:\, w_{\lambda x} - \lambda w_x = 0\}.$$

Al ser cada uno de estos conjuntos intersecciones de imágenes inversas del conjunto cerrado $\{0\}$ bajo funciones proyecciones, se deduce que C_1 y C_2 son subconjuntos cerrados de Y.
Por lo tanto $K \subset Y$ es compacto, con lo que concluye la demostración de A_2) y por tanto del teorema.

■

Comentamos también una caracterización de la continuidad con respecto a la topología $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$, que no usaremos por ahora, pero que es bastante útil:

Proposición 20 *Si Y es un espacio topológico, una función $g : Y \longrightarrow X$ es continua si y sólo si $\varphi_\alpha \circ g : Y \longrightarrow Z_\alpha$ es continua para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.*

Teorema 14 (Teorema de Kakutani) *Sea X un espacio de Banach reflexivo, entonces*

$$\overline{B_1^X} = \{x \in X \,:\, \|x\|_X \leq 1\}$$

es un conjunto compacto en la topología débil.

Demostración:
Probaremos que la inyección J es un homemomorfismo entre X dotado con la topología débil y X^{**} dotado de la topología débil$-*$. Es decir

$$J : (X, \mathcal{T}(X, X^*)) \longrightarrow (X^{**}, \mathcal{T}(X^{**}, X^*))$$

es biyectiva, continua y con inversa continua. Habiendo probado esto, notemos que $J(\overline{B_1^X}) = \overline{B_1^{X^{**}}}$, y que este conjunto es compacto en la topología débil$-*$ de X^{**} (por el Teorema 13), de donde se deduce directamente que $\overline{B_1^X}$ es compacto en la topología débil. Probemos entonces que J es un homeomorfismo.
Veamos que se cumplen las hipótesis de la Proposicion 19. Por hipótesis X^{**} es reflexivo, con lo que J es una biyección y por tanto se cumple 1). Para probar el punto 2), notemos que la familia de funciones que define la topología débil$-*$ de X^{**} está formada por $\{\varphi_f\}_{f \in X^*}$, donde

$$\varphi_f : \xi \in X^{**} \longmapsto \xi(f)$$

para cada $f \in X^*$. Ahora, para cada $\xi \in X^{**}$ existe $x \in X$ tal que $\xi = J_x$, de manera que

$$\varphi_f(\xi) = J_x(f) = f(x),$$

de donde se tiene $\varphi_f = f \circ J^{-1}$, para toda $f \in X^*$. Dado que X^* es precisamente la familia que define la topología débil en X, hemos probado el punto 2) de la Proposicion 19 y por tanto se deduce que h es un homeomorfismo. ■

Observación 5 *El recíproco de este teorema es también cierto (aunque no lo probaremos aquí).*

Observación 6 *El Teorema 14 implica que, para todo $M > 0$, la bola $\overline{B_M^X}$ es compacto en la topología débil, y por tanto todo conjunto débilmente cerrado y acotado es compacto. Por otra parte, en espacios topológicos no metrizables. ser compacto no implica que las sucesiones acotadas poseen subsucesiones convergentes. Para probar este hecho en la topología débil debemos pasar por otros resultados.*

Proposición 21 *Si X es un evn reflexivo y $M \subset X$ es un subespacio cerrado, entonces M es reflexivo.*

Demostración:
Sea $\eta \in M^{**}$. Definimos $\xi : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\xi(f) = \eta(f|_M)$$

para todo $f \in X^*$. Es claro que ξ es lineal y continuo, es decir $\xi \in X^{**}$. Como X es reflexivo, existe $x_0 \in X$ tal que $\xi = J_{x_0}$. Por lo tanto

$$\eta(f|_M) = f(x_0) \quad \text{para todo } f \in X^*. \tag{3.9}$$

Probaremos ahora que $x_0 \in M$. Para esto, notemos que para todo $f \in M^\perp$ se tiene $f(x_0) = \eta(f|_M) = \eta(0) = 0$. De la Proposición 5 y dado que M es cerrado tenemos entonces que $x_0 \in {}^\perp(M^\perp) = \overline{M} = M$.
Por último, por el Teorema de Hahn-Banach (Corolario **??**) se tiene que para cada $g \in M^*$ existe $f \in X^*$ tal que $f|_M = g$. Esto, junto con (3.9) implica que $\eta = J_{x_0}$, y por tanto M es reflexivo. ■

Definición 12 *Un espacio topológico es separable si contiene un subconjunto denso numerable.*

Ejemplo 18 *$L^\infty(0,1)$ no es separable: si definimos, para cada $\lambda \in (0,1)$, $f_\lambda = 1_{(0,\lambda)} \in L^\infty(0,1)$, tenemos $\|f_{\lambda_1} - f_{\lambda_2}\|_\infty = 1$ para todo $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dado que el conjunto $\{f_\lambda : \lambda \in (0,1)\}$ es más que numerable, $L^\infty(0,1)$ no posee ningún subconjunto densos numerable.*

Teorema 15 *Sea X un espacio de Banach tal que su espacio dual X^* es separable. Entonces X es separable.*

Demostración:
Por hipótesis existe $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ subconjunto denso. Para cada $n \in \mathbb{N}$, por definición podemos tomar $x_n \in X$ tal que $\|x_n\|_X \leq 1$ y

$$f_n(x_n) \geq \frac{1}{2}\|f_n\|_{X^*}. \tag{3.10}$$

Definamos

$$D = \left\{ \sum_{j=1}^{m} q_j x_{n_j} \ : \ q_j \in \mathbb{Q}, n_j \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Es claro que $D \subset X$ es numerable y que es denso en el subespacio $D_1 = \langle\{x_n\}\rangle \subset X$. Probaremos que D_1 es denso en X:
Sea $f \in X^*$ tal que $f|_{D_1} = 0$. Demostraremos que $f = 0$, con lo cual se concluirá que $\overline{D_1} = X$ (Corolario **??**), y por tanto que D es denso en X.
En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Por la densidad del conjunto $\{f_n\} \subset X^*$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - f_n\|_{X^*} < \frac{\varepsilon}{3}$, de donde

$$\|f\|_{X^*} < \frac{\varepsilon}{3} + \|f_n\|_{X^*}. \tag{3.11}$$

Además, por hipótesis se tiene $f(x_n) = 0$, lo que junto con (3.10) implica que

$$\|f_n\|_{X^*} \leq 2(f_n - f)(x_n) \leq 2\|f - f_n\|_{X^*} < \frac{2}{3}\varepsilon. \tag{3.12}$$

De (3.11) y (3.12) se sigue que $\|f\|_{X^*} < \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que $f = 0$, con lo que termina la demostración. ■

Ya estamos listos para probar que la bola cerrada es secuencialmente compacta:

Teorema 16 *Sea X un espacio de Banach reflexivo. Toda sucesión acotada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ posee alguna subsucesión débilmente convergente.*

Demostración:
Sea $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset X$ tal que $\|x_n\|_X \leq 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Definimos $M = \overline{\langle\{x_n\}\rangle} \subset X$. Por construcción se tiene que M es separable, y por la Proposición 21 se sabemos que M es reflexivo. Entonces $M^{**} = J(M)$, y por tanto es separable (J es una isometría). Del Teorema 15 se deduce que M^* es separable, es decir que podemos tomar $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset M^*$ denso numerable.
Para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene $\|g_m(x_n)\|_X \leq \|g_m\|$, y por tanto existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(g_m(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathbb{R}$. Aplicando un proceso diagonal, podemos suponer que

$$(g_m(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{converge en } \mathbb{R} \text{ para toda } m \in \mathbb{N}.$$

Dado que $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es denso en M^*, se prueba que para cada $g \in X^*$, la sucesión $(g(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy, y por tanto podemos definir

$$\xi(g) = \lim_{k\to\infty} g(x_{n_k})$$

para cada $g \in M^*$. Se deduce que ξ es lineal en g, y dado que

$$|g(x_{n_k})| \leq \|g\|_{M^*} \|x_{n_k}\|_X \leq \|g\|_{M^*}$$

para toda k, se tiene $\xi \in M^{**}$ con $\|\xi\|_{M^{**}} \leq 1$. Como M es reflexivo, existe $x \in M$, $\|x\|_X \leq 1$, tal que $\xi(g) = g(x)$ para toda $g \in M^*$. Por definición de ξ tenemos entonces que

$$\lim_{k \to \infty} g(x_{n_k}) = g(x)$$

para toda $g \in M^*$, y por lo tanto para toda $g \in X^*$. Es decir, $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge debilmente. ■

Observación 7 *El recíproco del teorema 16 es también cierto (ver [**?**], Teorema ??).*

3.5. Problemas de certamenes

Ejercicio 13 *(P1 C2 2016-1)*

1. *Sea $X = c_0 := \{x = \{x_n\} \in \ell^\infty : \lim_{n \to \infty} x_n = 0\}$. Denotemos por $\{e_n\}_n$ la sucesión definida por $e_n = (0, ..., 1, ..., 0, ...)$ (es decir $e_n^k = \delta_{kn}$, base estándar ya sea de X, X^* o X^{**}). Demuestre que $\{e_n\}_n$ converge débil-$*$ en X^* y no converge débil ni fuertemente en X^*.*

2. *Considere el espacio de Banach $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Suponga $f_n \rightharpoonup f$ en este espacio. Muestre que f_n converge puntualmente en $[0,1]$ a f.*

Demostración:

1. Ver ejemplo (17).

2. Sea $X = (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Considere $\phi_x : X \to \mathbb{R}$ definida por $\phi_x(f) = f(x)$ para cada $x \in [0,1]$. Claramente ϕ_x es lineal y además

$$|\phi_x(f)| = |f(x)| \leq \max_{x \in [0,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty, \ \forall f \in X,$$

por tanto ϕ_x es continua. Sigue que $\phi_x \in X^*$ para cada $x \in [0,1]$. Por hipótesis se tiene $\phi_x(f_n) \to \phi_x(f)$ para $n \to \infty$, para todo $x \in [0,1]$, esto es, $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in [0,1]$.

■

Ejercicio 14 *(P2 C2 2016-1) Sea X un espacio de Banach.*

(1) Sea $x \in X$. Para cada $f \in X^*$ considere

$$U_f(x) = \{g \in X^* : |g(x) - f(x)| < 1|\}.$$

Pruebe que $U_f(x)$ es débil-$*$ abierto en X^*.

(2) Pruebe que si $C \subset X^*$ es débil-$*$ compacto, entonces, para cada $x \in X$, existen $n \in \mathcal{N}$ y $f_1, ..., f_n \in C$ tales que $C \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{f_j}(x)$.

(3) Sea $C \subset X^*$ débil-$*$ cerrado. Demuestre que $C \subset X^*$ es débil-$*$ compacto ssi C es fuertemente acotado (i.e. acotado en la norma de X^*).

Demostración:

(1) Dado $\xi \in X$, es un hecho que el funcional

$$\begin{aligned} \widehat{\xi} : X^* &\longrightarrow \mathcal{R} \\ f &\longmapsto f(\xi), \end{aligned}$$

es continuo débil-$*$, luego es fácil ver que dado $f \in X^*$

$$U_f(\xi) = \{g \in X^* : |\widehat{\xi}(g) - \widehat{\xi}(f)| < 1\} = \widehat{\xi}^{-1}\left(B_{\mathcal{R}}(\widehat{\xi}(f), 1)\right)$$

siendo $B_{\mathcal{R}}(\widehat{\xi}(f), 1) = (f(\xi) - 1, f(\xi) + 1)$ abierto en $\mathcal{R}$, sigue que $U_f(\xi)$ es débil-$*$ abierto.

(2) Sea $C \subset X^*$ un conjunto débil-$*$ compacto. Dado $x \in X$, claramente $f \in U_f(x)$ para todo $f \in C$, entonces $C \subset \bigcup_{f \in C} U_f(x)$ donde éste último es una cobertura débil-$*$ abierta de C, por compacidad, existe una subcobertura finita, es decir, existe $\{f_i\}_{i=1}^{n} \subset C$ tal que $C \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{f_j}(x)$.

(3) ($\Longrightarrow$) Sea $C \subset X^*$ débil-$*$ compacto, fijamos $x \in X$, por inciso (2) existe un conjunto $\{f_i\}_{i=1}^{n} \subset C$ tal que $C \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{f_j}(x)$. Tomamos $g \in C$, entonces $|g(x) - f_k(x)| < 1$ para algún $k \subset \{1, ..., n\}$. Definimos $M = \max_j\{\|f_j\|\}$, entonces

$$\begin{aligned} |g(x) - f_k(x)| < 1 &\Longrightarrow |g(x)| \leq |f_k(x)| + 1 \\ &\Longrightarrow |g(x)| \leq \|f_k\| \cdot \|x\| + 1 \\ &\Longrightarrow |g(x)| \leq M\|x\| + 1 \end{aligned}$$

es decir para cada $x \in X$ se verifica $\sup_{g \in C} |g(x)| < \infty$, sigue por Principio de Limitación Uniforme que $\sup_{g \in C}\|g\| < \infty$, i.e. C es fuertemente acotado en X^*.
($\Longleftarrow$) Si C es fuertemente acotado, entonces existe $M > 0$ tal que $\|g\| \leq M$, es decir $C \subset M\mathcal{B}_{X^*}$ donde $\mathcal{B}_{X^*} \subset X^*$ es la bola unitaria, el cual por el Teorema de Banach-Alaoglu, es un conjunto débil-$*$ compacto, sigue que por linealidad que $M\mathcal{B}_{X^*}$ es débil-$*$ compacto. Siendo C débil-$*$ cerrado contenido en un débil-$*$ compacto nos permite concluir que C es débil-$*$ compacto.

■

Ejercicio 15 *(P3 C2 2016-1)*

1. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach tal que $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ no tiene puntos extremos. Muestre que X no es dual de ningún espacio de Banach (es decir, no existe ningún isomorfismo isométrico a algún espacio Z^*, con Z Banach).*
   Sugerencia: Puede usar los Teoremas de Banach-Alaoglu y Krein-Milman.

2. *Deduzca que c_0 no es dual de ningún espacio de Banach.*
   Sugerencia: Examine si la bola unitaria cerrada de c_0 posee puntos extremos.

Demostración:

1. Suponer que X es dual de algún espacio de Banach Z. Dotamos a X de la topología débil-$*$, por lo cual el conjunto B es débil-$*$ compacto (Teorema de Banach-Alaoglu). Es claro que B es un conjunto convexo, así por el Teorema de Krein-Milman se tiene $B = \overline{\text{conv}(E)}$ donde E es el conjunto de puntos extremos en B, que por hipótesis es vacío, así $B = \emptyset$, lo cual es una contradicción pues $0 \in B$.

2. Sea B_{c_0} la bola unitaria en c_0. Dado $x \in B_{c_0}$ es claro que $|x_n| \leq 1$ para todo n y $\lim x_n = 0.$, entonces existe un n_0 tal que $|x_{n_0}| < 1/2$. Definamos $y = \{y_n\},\ z = \{z_n\}$ por
$$y_n = \begin{cases} x_n, & n \neq n_0 \\ x_{n_0} + \frac{1}{2}, & n = n_0 \end{cases}$$
y
$$z_n = \begin{cases} x_n, & n \neq n_0 \\ x_{n_0} - \frac{1}{2}, & n = n_0 \end{cases}$$
de ello es claro que $\lim y_n = \lim z_n = 0$, por lo cual $y, z \in X$. También $|y_n| \leq 1$ para todo $n \neq n_0$, y $|y_{n_0}| = |x_{n_0} + 1/2| \leq |x_{n_0}| + 1/2 < 1$ luego $y \in B_{c_0}$. De manera análoga se tiene que $z \in B_{c_0}$. Notando que
$$x_{n_0} = \frac{1}{2}\left(x_{n_0} + \frac{1}{2} + x_{n_0} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(y_{n_0} + z_{n_0})$$
sigue que
$$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$$
concluimos entonces que x no es punto extremo. Siendo x arbitrario en la bola, se ve que B_{c_0} no posee puntos extremos, por lo mostrado en el párrafo anterior, c_0 no es dual de ningún espacio de Banach.

■

Ejercicio 16 *(P1 C2 2017-1) Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $f_n = \chi_{[n,n+1]}$. Para cada espacio mencionado a continuación, consideraremos la medida de Lebesgue en $\mathcal{R}$.*

1. *Pruebe que $\{f_n\}$ no converge fuertemente en $L^p(0,\infty)$, para todo $p \in [1,\infty)$.*
2. *Pruebe que $\{f_n\}$ converge débilmente en $L^p(0,\infty)$, para todo $p \in (1,\infty)$.*
3. *Pruebe que $\{f_n\}$ converge débil-$*$ en $L^\infty(0,\infty)$.*
4. *Pruebe que $\{f_n\}$ no converge débilmente en $L^1(0,\infty)$*

Demostración:

1. Si $n \neq m$
$$\int_0^\infty |f_n(x) - f_m(x)|^p dx = \int_n^{n+1} dx + \int_m^{m+1} dx = 2,$$
luego $\|f_n - f_m\|_p = 2^{1/p}$. Por tanto $\{f_n\}$ no es de Cauchy y consecuentemente no converge fuertemente en $L^p(0,\infty)$ para todo $p \in [1,\infty)$. Para $p = \infty$ es análogo.

2. Sea $g \in L^p(0,\infty)^* = L^q(0,\infty)$ para p, q exponentes conjugados. Entonces
$$\langle g, f_n \rangle = \int_0^\infty g f_n dx = \int_n^{n+1} g dx.$$
Por la desigualdad de Hölder
$$\left| \int_n^{n+1} g dx \right| \leq \left| \int_n^{n+1} g dx \right| \leq \left(\int_n^{n+1} |g|^q dx \right)^{1/q},$$
y como $g \in L^q(0,\infty)$ se tiene $\int_n^{n+1} |g|^q dx \to 0$ a medida que $n \to \infty$. Luego $\langle g, f_n \rangle \to 0$ para toda $g \in L^p(0,\infty)^*$, esto es, $f_n \rightharpoonup 0$ en $L^p(0,\infty)$.

3. Notar que $\{f_n\} \subset L^1(0,\infty)^* = L^\infty(0,\infty)$. Entonces para $g \in L^1(0,\infty)$
$$|\langle f_n, g \rangle| \leq \int_0^\infty |f_n g| dx = \int_n^{n+1} |g| dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
pues g es integrable. Luego $\langle f_n, g \rangle \to 0$ para toda $g \in L^1(0,\infty)$, por la caracterización de convergencia débil-* se tiene $f_n \rightharpoonup^* 0$ en $L^\infty(0,\infty)$.

4. Definir $g = \sum_{n\geq 0} \chi_{[2n,2n+1)} - \chi_{[2n+1,2n+2)}$. Es claro que $g \in L^1(0,\infty)^* = L^\infty(0,\infty)$. Notar que
$$\langle g, f_n \rangle = \sum_{n\geq 0} \int_n^{n+1} g dx = (-1)^n,$$
luego $\langle g, f_n \rangle$ no converge y en consecuencia $\{f_n\}$ no converge débil en $L^1(0,\infty)$.

■

Ejercicio 17 *(P2 C2 2017-1) Sea X un espacio de Banach.*

1. *Sea $\{f_n\} \subset X^*$ tal que, para cada $x \in X$, la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge en $\mathbb{R}$. Probar que existe $f \in X^*$ tal que $f_n \to f$ en $\sigma(X, X^*)$ (convergencia débil-$*$)*

2. *Suponga que X es reflexivo. Sea $\{x_n\} \subset X$ tal que, para cada $f \in X^*$, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge en $\mathbb{R}$. Pruebe que existe $x \in X$ tal que $x \to x$ en $\sigma(X, X^*)$ (convergencia débil).*

3. *Sea $X = c_0 \subset \ell^\infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $x_n = (1, 1, \cdots, 1, 0, 0, \cdots)$ (las primeras n coordenadas tienen valor 1, las restantes son 0). Pruebe que $\{x_n\}$ converge en $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$ (topología débil-$*$) y que no converge en $\sigma(X, X^*)$ (convergencia débil).*

4. *Pruebe que el resultado en (2) es falso para espacios no reflexivos.*

Demostración:

1. Para cada $x \in X$, por hipótesis está bien definido $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Probemos que $f \in X^*$. Claramente f es lineal por linealidad del límite. Dado que $\{f_n\} \subset X^*$ es puntualmente acotada, por el Principio de Acotación Uniforme se tiene que es uniformemente acotada, esto es, existe $M > 0$ tal que $\|f_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vemos que

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|\|x\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X$$

de lo cual se sigue que $f \in X^*$. Por construcción $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$, esto es, $f_n \rightharpoonup^* f$.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\varphi : X^* \to \mathbb{R}$ por $\varphi_n(x) = f(x_n)$. Por hipótesis $\varphi(f) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(f)$ está bien definido para cada $f \in X^*$. Evidentemente φ es lineal por linealidad del límite. Además $\{\varphi_n\}$ es puntualmente acotada, así por Principio de Acotación Uniforme, existe $M > 0$ tal que $\|\varphi_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$|\varphi(f)| = \lim_{n\to\infty} |\varphi_n(f)| \leq \liminf_{n\to\infty} \|\varphi_n\|\|f\| \leq M\|f\|, \quad \forall f \in X^*$$

luego φ es acotada y por tanto $\varphi \in X^{**}$. Como X es reflexivo, existe $x \in X$ tal que $\varphi = J_x$, esto es, $\varphi(f) = f(x)$ para todo $f \in X^*$, de lo cual se tiene directamente que $x_n \rightharpoonup x$.

3. Sabemos que $X^* = \ell^1$ y $(\ell^1)^* = \ell^\infty$. Si $y \in \ell^1$ entonces

$$\langle x_n, y \rangle = \sum_k x_n^k y_k = \sum_{k=1}^n y_k \to \sum_{k=1}^\infty y_k$$

pues y es sumable. Claramente $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^\infty y_k$ donde $x = \{x_n\}$ esta definida por $x_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \ell^\infty$, por lo que $\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$ para todo $y \in \ell^1$, esto es, $x_n \rightharpoonup^* x = (1, 1, ...) \in \ell^\infty$.

Ahora, si $x_n \rightharpoonup x$ en c_0 entonces $x_n \rightharpoonup^* x$ en ℓ^∞. Como $x_n \rightharpoonup (1, 1, ...) \notin c_0$ y el límite débil es único se concluye que $\{x_n\}$ no converge débilmente.

4. El ejemplo del ítem 3. cumple que para cada $f \in X^* = \ell^1$ se tiene $f(x_n) \to \langle f, x \rangle$ donde $x = (1, 1, ...)$. Sin embargo $\{x_n\}$ no converge en la topología débil. Claro X no es reflexivo, pues $X = c_0 \subset \ell^\infty = X^**$ y la contención es estricta.

■

Ejercicio 18 *(P3 C2 2017-1) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Considerar $f \in \mathcal{H}^*$ y $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{R}$ una forma bilineal continua y coerciva, i.e.*

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|,$$

y existe $\delta > 0$ tal que

$$a(u, u) \geq \delta\|u\|^2. \tag{1}$$

Dada $f \in \mathcal{H}^*$, sea $\{X_n\}_n$ una sucesión creciente de subespacios cerrados de $\mathcal{H}$ tales que $\cup_n X_n = \mathcal{H}$ y suponga que para cada $n \in \mathcal{N}$ existe $u_n \in X_n$ tal que

$$a(u_n, v) = f(v), \tag{2}$$

para todo $v \in X_n$. Probar que $\{u_n\}_n$ posee alguna subsucesión débilmente convergente a u solución de

$$a(u, v) = f(v),$$

para todo $v \in \mathcal{H}$.

Demostración:
Si en (2) tomamos en $v = u_n$ para cada $n \in \mathcal{N}$, junto con (1) obtenemos

$$\delta\|u_n\|^2 \leq a(u_n, u_n) = f(u_n) \leq \|f\|\|u_n\|.$$

Luego, definiendo $M = \frac{1}{\delta}\|f\|$

$$\|u_n\| \leq M,$$

es decir, $\{u_n\}_n \subset MB_{\mathcal{H}}$. Todo espacio de Hilbert es reflexivo, y como $B_{\mathcal{H}}$ es secuencialmente débil compacta, vía homeomorfismo $MB_{\mathcal{H}}$ es secuencialmente compacta, por tanto existe $\{n_k\}_k$ estrictamente creciente y $u \in \mathcal{H}$ tal que

$$u_{n_k} \rightharpoonup u.$$

Para cada v fijo, la aplicación $u \mapsto a(u,v)$ es lineal y continua (pues a lo es), luego pertenece a $\mathcal{H}^*$. Entonces para $v \in \mathcal{H} = \cup X_n$ existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $v \in X_n$ para todo $n \geq N$ (pues la unión es creciente). De (2) tenemos

$$a(u_{n_k}, v) = f(v)$$

para todo $n_k \geq N$. Si tomamos límite en k, por convergencia débil $a(u,v) = f(v)$, y esto es válido para todo $v \in \mathcal{H}$. ■

Ejercicio 19 *(P2 C2 2018-1) (Teorema de Hahn-Banach para topología débil−∗) Sea X un espacio de Banach. Sean $A \subset X^*$ y $B \subset X^*$ dos convexos no vacíos tales que A es* **débil**−∗ *abierto y $A \cap B = \emptyset$. Probar que existen $x_0 \in X \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que el hiperplano*

$$H := \{f \in X^* \,:\, f(x_0) = \alpha\}$$

separa A y B. Para esto:

1. *Probar que existen $\xi \in X^{**}$, $\xi \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\xi(f) \leq a \leq \xi(g)$$

   para todo $f \in A$, $g \in B$.

2. *Sea $f_0 \in A$. Pruebe que existe una vecindad* **débil**−∗ *$V \subset X^*$ de 0 tal que $f_0 + V \subset A$. Demuestre que puede suponer que V es simétrica.*

3. *Demuestre que existe una constante C tal que $|\xi(h)| \leq C$ para todo $h \in V$.*

4. *Concluya.*

Demostración:

1. Como A es débil-∗ abierto, en particular es abierto en la topología de X^*. Por HB en X^*, existe $\xi \in X^{**}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que el hiperplano $H = \{f \in X^* : \xi(f) = \alpha\}$. Es decir,

$$\xi(f) \leq \alpha \leq \xi(g)$$

   para todos $f \in A,\ g \in B$.

2. Sea $f_0 \in A$. Como A es débil-$*$ abierto, existe V_{f_0} vecindad débil-$*$ de f_0 en X^* tal que $f_0 \in V_{f_0} \subset A$. Si $V := V_{f_0} - f_0$ entonces V es vecindad débil$-*$ de 0 y además $V + f_0 = V_{f_0} \subset A$. Podemos suponer V simétrica (esto es $-V = V$), pues de lo contrario, consideramos $V \cap (-V)$, que es vecindad débil-$*$ del 0 (pues $0 \in V$ y $0 = -0 \in -V$) y simétrica (pues $f \in V \cap (-V)$ ssi $f \in V$ y $f \in -V$ ssi $-f \in V \cap (-V)$).

3. Como $f_0 + V \subset A$, por el ítem 1. se tiene que $\xi(f_0 + f) \leq \alpha$ para toda $f \in V$. Entonces
$$\xi(f) = \xi(f_0 + f) - \xi(f_0) \leq \alpha - \xi(f_0), \quad \forall f \in V.$$
Además, si $f \in V$, como V es simétrica se tiene $-f \in V$ por lo cual
$$-\xi(f) = \xi(-f) \leq \alpha - \xi(f_0)$$
obteniendo
$$|\xi(f)| \leq \alpha - \xi(f_0), \quad \forall \xi \in V.$$
Denotaremos la constante del lado derecho por C.

4. Sabemos que $|\xi(f)| \leq C$ para toda $f \in V$ donde V es una vecindad débil-$*$ de $0 \in X^*$. Entonces
$$V = \bigcap_{j=1}^{k} \{g \in X^* : |g(x_j)| < r_j\}$$
para algunos $x_j \in X,\ r_j > 0$ y λV también es vecindad débil-$*$ del $0 \in X^*$ para todo $\lambda \in \mathcal{R}$. Se deduce entonces que ξ es continua en 0. Como ξ es lineal y $V + h$ es vecindad débil-$*$ de h para todo $h \in X^*$, se tiene que $\xi : X^* \to \mathcal{R}$ es débil-$*$ continua. Por resultado visto en clases se deduce que $\xi = J_{x_0}$ para algún $x_0 \in X$.

■

Capítulo 4

Teoría de distribuciones

Las distribuciones son una generalización de las funciones integrables en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que resulta muy útil para definir objetos como la derivada débil y espacios de Sobolev. Este concepto le dará cabida al famoso ejemplo, *la delta de Dirac*. Si δ representa un impulso en $x = 0$, entonces δ se caracteriza por como actúa sobre funciones regulares φ, a través de

$$\int \delta(x)\varphi(x)dx = \delta(0). \tag{4.1}$$

Entonces, definiremos las distribuciones por como actúan sobre funciones regulares definidas en un espacio adecuado. Si en (4.1) se considera $L^2(\Omega)$ como espacio de funciones, se tiene el mapeo
En lo que sigue, Ω denotará un subconjunto abierto de $\mathcal{R}^n$, a menos que se diga lo contrario.

$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx,$$

además, sabemos que $f \mapsto T_f$ es una isometría de L^2 en L^2. Pero (4.1) no tiene sentido para toda $\varphi \in L^2(\Omega)$ (no podemos esperar que $\delta \in L^2(\Omega)$). Se debe restringir (4.1) a un conjunto más pequeño, pero que sea *denso* en $L^2(\Omega)$.

Definición 13 *Se define*

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi : \Omega \to \mathcal{R} : \varphi \in C^\infty(\Omega),\ supp(\varphi)\ es\ compacto\}.$$

A modo de observación, es claro que $C_0^\infty(\Omega) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $p \geq 1$.

Ejemplo 19 *La función*

$$\eta(x) = \begin{cases} C\,exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1, \end{cases}$$

con C constante, pertenece a $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

A continuación veremos algunos teorema de regularización, con el objetivo de responder la pregunta: ¿es C_0^∞ denso en L^p?

Definición 14 *Dadas u, v funciones definidas en $\mathbb{R}^n$ a valores reales, se define el producto convolución $u * v$ por*

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy.$$

Teorema 17 (Desigualdad de Young) *Sean $u \in L^p(\mathbb{R})$, $v \in L^q(\mathbb{R})$ para $p, q \geq 1$. Sea r tal que $1/r = 1/p + 1/q - 1$, entonces $u * v \in L^r$ y*

$$\|u * v\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R})}\|v\|_{L^q(\mathbb{R})}.$$

Consideramos η definida en el ejemplo 13 con C tal que $\int \eta = 1$ y para $\varepsilon > 0$ denotamos

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right),$$

entonces

- $\eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,
- $\operatorname{supp}(\eta_\varepsilon) = \overline{B}_\varepsilon(0)$,
- $\int \eta_\varepsilon = 1$.

Si consideramos $f \in L^p(\Omega)$, al extender por cero esta función, se obtiene $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Definimos a continuación

$$f_\varepsilon(x) = (f * \eta_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\eta_\varepsilon(y)dy = \int_{B_\varepsilon} f(x-y)\eta_\varepsilon(y)dy. \tag{4.2}$$

Lema 9 *Sea $f \in L^p(\Omega)$. Entonces*

1. *$supp(f_\varepsilon) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : dist\big(x, supp(f_\varepsilon)\big) \leq \varepsilon\}$,*
2. *$f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,*
3. *si f tiene soporte compacto, entonces $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ para $\varepsilon << 1$.*
4. *si f es continua en Ω, entonces $f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ uniforme en compactos de Ω,*
5. *si $p \in [1, \infty)$ entonces*

$$\|f_\varepsilon\| \leq \|f\|_p \quad y \quad \|f_\varepsilon - f\|_p \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

Demostración:
Probaremos 5. Sea $q = p/(p-1)$. Por la desigualdad de Hölder se tiene

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)f(y)dy &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)dy\right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)|f(y)|^p dy\right)^{1/p} \\ &= \left(\int \eta_\varepsilon(x-y)|f(y)|^p dy\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Utilizando Fubini

$$\|f_\varepsilon\|_{L^p}^p = \int_\Omega |f_\varepsilon|^p \leq \int_\Omega \left(\int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)|f(y)|^p dy\right) dx = \int_\Omega |f(y)|^p \left(\int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)dx\right) dy \tag{4.3}$$

$$\leq \int_\Omega |f(y)|^p \tag{4.4}$$

$$= \|f\|_p^p. \tag{4.5}$$

Ahora, dado $\delta > 0$, sabemos que existe $g \in C_0(\Omega)$ tal que $\|g - f\|_p < \delta$. Por (4.5) se tiene

$$\|g_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \leq \|g - f\| < \delta.$$

Por el ítem 4. sabemos que para $\varepsilon \to 0$, $g_\varepsilon \to g$ uniformemente pues g tiene soporte compacto, así $\|g_\varepsilon - g\| < \delta$ para $\varepsilon > 0$ pequeño. Finalmente

$$\|f - f_\varepsilon\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g_\varepsilon\|_p + \|g_\varepsilon - f_\varepsilon\| < 3\delta,$$

de donde se sigue el resultado. ■

Ejemplo 20 *Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Entonces f_ε está bien definida en $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : dist\big(x, \partial\Omega\big) < \varepsilon\}$ y $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Notar que $f_\varepsilon \not\to f$ en $L^\infty(\Omega)$ pero $\|f_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \|f\|_\infty$.*

Teorema 18 *El conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $p \in [1, \infty)$.*

Demostración:
Sea $L^p_c(\Omega)$ el espacio de funciones en $L^p(\Omega)$ con soporte compacto en Ω. Si $f \in L^p_c(\Omega)$, entonces el Lema 9. implica que $\mathrm{supp}(f_\varepsilon)$ es un compacto de Ω para $\varepsilon > 0$ pequeño. Nuevamente por el Lema 9. se tien $f_\varepsilon \to f$. Entonces $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p_c(\Omega)$. Por otro lado, sea $\{K_n\}_n$ una sucesión de compactos tales que $K_n \uparrow \Omega$. Denotando por χ la función caracteristica de un conjunto, se tiene $\{\chi_{K_n} f\} \subset L^p_c(\Omega)$ y $|\chi_{K_n} f| \leq |f|$, así por Teorema de Convergencia dominada se tiene $\|\chi_{K_n} f - f\|_{L^p} \to 0$, de donde se sigue el resultado. ■

A continuación, veremos como se comporta

Definición 15 *Se dice que una sucesión $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge a $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ si*

1. *existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que $supp(\varphi_n) \subset K$,*
2. *$D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ uniforme en Ω, para todo multiíndice α.*

Denotaremos por $\mathcal{D}(\Omega)$ al espacio $C_0^\infty(\Omega)$ dotado de la topología asociada a la convergencia anterior definida.

Definición 16 *Una distribución es un elemento $T \in \mathcal{D}'(\Omega) := \big(\mathcal{D}(\Omega)\big)^*$, esto es, $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{R}$ es lineal y continuo respecto a la topología de $\mathcal{D}(\Omega)$, el cual denotaremos por $T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

Ejemplo 21 *Si $u \in L^1(\Omega)$, entonces*

$$\langle \Lambda_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u\varphi dx, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

está bien definida, luego Λ_u es una distribución. Notar además que $u \mapsto \Lambda_u$ es un mapeo inyectivo.

Ejemplo 22 *Se define $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$ para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Esta regla define una distribución $\delta \in \mathcal{D}'(\Omega)$, llamada Delta de Dirac.*

Observación 8

- *El espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ es un espacio vectorial.*
- *Se dice que $\Lambda_n \to \Lambda$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ si $\langle \Lambda_n, \varphi \rangle \to \langle \Lambda, \varphi \rangle$ para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.*
- *Se tienen las inyecciones $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$.*

4.0.1. Espacios de Sobolev

A continuación, nuestro objetivo será derivar distribuciones, y por tanto, cualquier función localmente integrable. Si $f \in C^1(\Omega)$ se debiese tener

$$\big(\Lambda_f\big)' = \Lambda_{f'}.$$

Para toda $\varphi \in C_0^\Omega$ se tiene

$$\langle \Lambda_{f'}, \varphi \rangle = \int_\Omega f'\varphi dx = -\int_\Omega f\varphi' dx = \langle \Lambda_f, \varphi' \rangle,$$

lo cual sugiere

$$\langle (\Lambda_f)', \varphi \rangle = \langle \Lambda, -\varphi' \rangle$$

Definición 17 *Si $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se define $\partial_x \Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ por*

$$\langle \partial_x \Lambda, \varphi \rangle = -\langle \Lambda, \partial_x \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

y para todo multiíndice α

$$\langle D^\alpha \Lambda, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \Lambda, D^\alpha \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Recordamos el Teorema de Gauss para $\mathbb{R}^n$ en Ω

$$\int_{\Omega} u\partial_{x_i} v dx = -\int_{\Omega} v\partial_{x_i} u dx + \int_{\partial\Omega} uv\widehat{n} d\sigma.$$

Ejemplo 23 *Sea $f \in C^1(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Entonces*

$$\begin{aligned}\langle \partial_{x_i} f, \varphi\rangle = -\langle f, \partial_{x_i}\varphi\rangle &= -\int_{\Omega} f\partial_{x_i}\varphi dx \\ &= \int_{\Omega} \varphi\partial_{x_i} f dx - \int_{\partial\Omega} f\varphi\widehat{n} d\sigma \\ &= \int_{\Omega} (\partial_{x_i} f)\varphi dx,\end{aligned}$$

es decir, la derivada usual coincide con la derivada distribucional.

Ejemplo 24 *Consideramos H la función de salto (usualmente llamada función escalón de Heaviside)*

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & < 0 \end{cases}$$

donde $H \in L^1_{loc}(\mathcal{R})$. Si vemos H en el sentido de las distribuciones

$$\langle H', \varphi\rangle = -\langle H, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} H\varphi' dx = -\int_0^{\infty} \varphi' dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, vp\rangle$$

es decir, $H' = \delta_0$ en el sentido de las distribuciones, donde δ denota la delta de dirac.

Notemos que $u, D^{\alpha}u \in D'(\Omega)$ implica

$$\langle D^{\alpha}u, \varphi\rangle = (-1)^{\alpha}\langle u, D^{\alpha}\varphi\rangle. \tag{4.6}$$

Definición 18 *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, definimos el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ por*

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^{\alpha}u \in L^2(\Omega),\ |\alpha| = 1\}.$$

Ejemplo 25 *Claramente H no pertenece a $H^1(\Omega)$, pues $H' = \delta_0 \notin L^2(\Omega)$.*

Ejemplo 26 *Sea $f(x) = |x|$, la cual no es diferenciable en el sentido usual. Para $\Omega = (-1, 1)$ se tiene*

$$\langle f', \varphi\rangle = -\int_{-1}^{1} f'(x)\varphi(x) dx = -\int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x) dx = \int_{-1}^{0} x\varphi(x) dx - \int_0^1 x\varphi(x) dx$$

integrando por partes y utilizando que φ tiene soporte compacto

$$\langle f', \varphi\rangle = \int_{-1}^{0} (-\varphi(x)) dx + \int_0^1 \varphi(x) dx = \int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x) dx$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ -1, & -1 < x < 0 \end{cases},$$

así $f' = g$ en el sentido de las distribuciones.

Dotamos al espacio $H^1(\Omega)$ con la norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \textstyle\sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \tag{4.7}$$

o escrito de un modo más amigable

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx \right)^{1/2}.$$

Se ve que el espacio $\left(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}\right)$ resulta ser un espacio completo. Más aún, la norma (4.7) proviene del producto interno

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=1} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}. \tag{4.8}$$

Ahora, cuando trabajamos con funciones en $L^2(\Omega)$, a priori, no tiene sentido evaluar funciones en el borde, pues este resulta ser un conjunto de medida n-dimensional 0. Es así que se introduce el operador traza
A continuación, introducimos un importante subespacio de $H^1(\Omega)$.

Definición 19 *Se define $H^1_0(\Omega)$ como la clausura en $H^1(\Omega)$ del conjunto $C_c\infty(\Omega)$. Este espacio se caracteriza por*

$$H^1_0(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : tr(u) = 0\}. \tag{4.9}$$

Teorema 19 *(Desigualdad de Poincaré) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado y no vacío. Entonces existe una constante $C > 0$ dependiendo sólo de Ω tal que para toda $u \in H^1_0(\Omega)$ se tiene*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Observación 9 *Notar que la desigualdad de Poincaré implica que $\|u\|_{H^1_0(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ es una norma en $H^1_0(\Omega)$, equivalente a la norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Es así que $\left(H^1_0(\Omega), \|\cdot\|_{H^1_0(\Omega)}\right)$ resulta ser también un espacio completo.*

Definición 20 *Se dice que una distribución $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ es solución fundamental de un operador diferencial P si $PT = \delta'$.*

Observación 10 *En general, una solución débil de $Pu = 0$ está dada por una (no se que dice ahí) tal que $P\Lambda_u = 0$.*

aqui ejemplitos

4.1. Problemas de certamenes

Ejercicio 20 *(P3 C2 2018-1)*

1. *Dada $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ definimos $v(x) = \int_0^x u(t)dt,\ x \in \mathbb{R}$. Demuestre que v es una función continua en $\mathbb{R}$ que satisface $\partial_x v = u$ en el sentido de las distribuciones.*

2. *Sea $u \in L^2(a,b)$. Pruebe que $u \in H^1(a,b)$ si y solo si u es continua en $[a,b]$ y existe $w \in L^2(a,b)$ tal que*

$$u(y) = u(x) + \int_x^y w(t)dt \tag{4.10}$$

   para todo $x, y \in [a,b]$. Además $\partial_x u = w$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
   Sugerencia: Utilice el inciso anterior y el hecho que una distribución tiene derivada nula si y solo si es constante.

3. *Dada $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, pruebe que la función*

$$u(x,t) = g(x+ct) + g(x-ct)$$

   es solución en el sentido de las distribuciones de la ecuación de ondas en $\mathbb{R}^2$

$$\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0.$$

   Sugerencia: Puede utilizar que $\partial_t^2 - c^2\partial_x^2 = (\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)$.

Demostración:

1. Sea $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ y $v(x) := \int_0^x u(t)dt,\ x \in \mathbb{R}$. Sea $x_n \to x$ y definir $u_n = u\chi_{[0,x_n]}$ y asumir sin pérdida de generalidad que $x > 0$. Entonces $u_n \to u\chi_{[0,x]}$ ctp y $|u_n| \leq |u|\chi_{[0,x+\varepsilon]} \in L^1(0, x+\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$. Por Teorema de Convergencia Dominada se tiene que $v(x_n) \to v(x)$ por lo que v es continua.

   Sea $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} v(x)\phi'(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^x u(t)dt\right)\phi'(x)dx \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^x u(t)\phi'(x)dtdx - \int_{-\infty}^0\int_x^0 u(t)\phi'(x)dtdx \\
&= \int_0^{+\infty}\int_t^{+\infty} u(t)\phi'(x)dxdt - \int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^t u(t)\phi'(x)dxdt \\
&= -\int_0^{+\infty} u(t)\phi(t)dt - \int_{-\infty}^0 u(t)\phi(t)dt \\
&= -\int_{\mathbb{R}} u(t)\phi(t)dt.
\end{aligned}$$

   Por definición sigue que $\partial_x v = u$ en el sentido de las distribuciones.

2. Sea $u \in L^1(a,b)$. Suponer $u \in H^1(a,b)$, entonces $u' \in L^2(a,b) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Definimos $v(x) := \int_0^x u'(t)dt$, por el ítem anterior v es continua y $v' = u'$ en el sentido de las distribuciones. Entonces $(v-u)' = 0$ así $u - v$ es constante, es decir, $u(x) = v(x) + C$ para todo $x \in [a,b]$ y $C \in \mathbb{R}$ constante, y en particular u es continua. Por último

$$u(y) - u(x) = v(y) + C - (v(x) + C) = \int_0^y u'(t)dt - \int_0^x u'(t)dt = \int_x^y u'(t)dt.$$

obteniéndose (4.10) con $w = u' \in L^2(a,b)$.
Ahora, si existe $w \in L^2(a,b)$ tal que se tiene (4.10), en particular

$$u(x) = u(0) + \int_0^x w(t)dt$$

pues u es continua y por tanto $u(0)$ está bien definido. Por el inciso anterior se tiene $u' = w \in L^2(a,b)$, por lo que $u \in H^1(a,b)$.

3. Sea $w(x) = g(ax+b)$ con $a \neq 0$. Probaremos que $w'(x) = ag'(ax+b)$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Sea $\phi C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} w'\phi dx &= -\int_{\mathbb{R}} w\phi' dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} g(ax+b)\phi'(x)dx \\
&= -\frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} g\phi'\left(\frac{y-b}{a}\right)dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}} g(y)\frac{d}{dy}\left(\phi'\left(\frac{y-b}{a}\right)\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} g'(y)\phi\left(\frac{y-b}{a}\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} ag'(ax+b)\phi'(x)dx,
\end{aligned}$$

pues $\phi(cx+d) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. De lo anterior se sigue $w'(x) = ag'(ax+b),\ x \in \mathbb{R}$.

Entonces

$$\partial_t g(x-ct) = -cg'(x-ct) = -c\partial_x g(x-ct)$$

de lo cual se sigue que $(\partial_t + c\partial_x)g(x-ct) = 0$ y de manera análoga se obtiene $(\partial_t - c\partial_x)g(x+ct) = 0$. Por lo tanto, si $u(x) = g(x+ct) + g(x-ct)$ se tiene

$$(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2)u = (\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)g(x+ct) + (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)g(x-ct) = 0.$$

$\blacksquare$

Capítulo 5

Espacios de Hilbert y teoría de operadores

Definición 21 *Si H es un espacio vectorial, un producto escalar en H es una función bilineal*

$$(\cdot,\cdot) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

que cumple las siguientes propiedades:

1. $(x,x) \geq 0$ para todo $x \in H$.
2. $(x,x) > 0$ para todo $x \in H \setminus \{0\}$.
3. $(x,y) = (y,x)$ para todo $x, y \in H$.

Si $(\cdot,\cdot)$ es un producto escalar en H, entonces definimos

$$\|x\|_H = \sqrt{(x,x)}$$

para todo $x \in H$.

Proposición 22 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Si $(\cdot,\cdot)$ es un producto escalar en H, entonces*

$$|(x,y)| \leq \|x\|_H \|y\|_H$$

para todo $x, y \in H$.

Demostración:
■

Corolario 14 *i $(\cdot,\cdot)$ es un producto escalar en H, entonces $\|\cdot\|_H$ es una norma en H.*

Demostración:

■

Proposición 23 (Propiedad del paralelogramo) *Una norma $\|\cdot\|$ en un ven X proviene de un producto escalar si y solo si*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

para todo $x, y \in X$.

Definición 22 *Un espacio de Hilbert es un ev dotado de un producto escalar $(\cdot,\cdot)$ para el cual la norma $\|\|_H = \sqrt{(x,x)}$, $x \in H$ es tal que $(H, \|\cdot\|_H)$ es un espacio normado completo.*

Ejemplo 27 *aqui ejemplo de L2*

Ejemplo 28 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto no vacío, $p \in [1,\infty] \setminus \{2\}$. El espacio $L^p(\Omega)$ es un espacio de Hilbert si y solo si $p = 2$. Podemos hallar $A, B \subset \Omega$ tales que $A \cap B = \emptyset$ y $0 < \lambda(A) \neq \lambda(B) < \infty$. Para $1 \leq p < \infty, p \neq 2$ notar que las funciones $\phi = \chi_A$ y $\psi = \chi_B$ pertenecen a $L^P(\Omega)$ y satisfacen $\|\phi\|_p^2 = \lambda(A)^{2/p}$, $\|\psi\|_p^2 = \lambda(B)^{2/p}$, $\|\phi+\psi\|_p^2 = \|\phi-\psi\|_p^2 = (\lambda(A)+\lambda(B))^{2/p}$, luego no se satisface la Ley del Paralelogramo para $p \neq 2$. Para el caso $p = \infty$ dado que los conjuntos A, B son de medida no nula $\|\phi\|_\infty^2 = 1, \|\psi\|_\infty^2 = 1$ y $\|\phi+\psi\|_\infty^2 = \|\phi-\psi\|_\infty^2 = 1$, luego no se satisface la Ley del Paralelogramo.*

Ejemplo 29 *aqui ejemplo de H1 y H_0^1*

Teorema 20 (Proyección en un convexo)

Teorema 21 (Proyección ortogonal)

Espacio dual

Teorema 22 (Teorema de representación de Riesz) *Sea $\varphi \in H^*$*

Identificación de los duales.

Definición 23 (Subespacio ortogonal)

Teorema de Lax-Milgram.

Definición 24 *Sea $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal. Decimos que a es:*

1. *Bicontinua, si existe $C > 0$ tal que*

$$|a(x,y)| \leq C\|x\|\|y\|$$

para todo $x, y \in H$.

2. *Coerciva, si existe $\delta > 0$ tal que*

$$|a(x,x)| \geq \delta \|x\|^2$$

para todo $x \in H$.

3. *Simétrica, si*

$$a(x,y) = a(y,x)$$

para todo $x, y \in H$.

Teorema 23 (Teorema de Lax-Milgram) *Sea H un espacio de Hilbert, y sea a una forma bilineal en H que es bicontinua y coerciva. Entonces, para cada $\varphi \in H^*$ existe un único $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = \varphi(v) \quad \text{para todo } v \in H. \tag{5.1}$$

Si además a es simétrica, entonces $u \in H$ está caracterizado por satisfacer

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v) \right\}. \tag{5.2}$$

Demostración:
Por el teorema de representación de Riesz, existe un único $f \in H$ tal que

$$\varphi(v) = (v,f)_H \quad \text{para todo } v \in H. \tag{5.3}$$

Por otra parte, definamos $\varphi_u : H \longrightarrow H$ por $\varphi_u(v) = a(u,v)$. Dado que a es bilineal y bicontinua, se tiene $\varphi_u \in H^*$. De nuevo por el teorema de Riesz, existe un único representante de φ_u, al que denotaremos por $Au \in H$. Es decir, para todo $u, v \in H$ se tiene que

$$a(u,v) = (Au, v)_H.$$

Por la bilinealidad de a, es directo que A es un operador lineal, y por la bicontinuidad se tiene, para $v = Au$, que

$$\|Au\|^2 = (Au, Au)_H = a(u, Au) \leq C\|u\|\|Au\|$$

para todo $u \in H$, y por tanto $\|A\| \leq C$.
Ahora, por construcción tenemos que un $u \in H$ cumple (5.1) sí y sólo sí satisface

$$Au = f. \tag{5.4}$$

Por la coercividad de a, se tiene, para para $v = Au$, que

$$\|Au\|^2 = (Au, Au)_H = a(u, Au) \geq \delta\|u\|\|Au\|,$$

y por tanto $\|Au\| \geq \delta\|u\|$ para todo $u \in H$. En particular A es inyectivo y la unicidad de la ecuación (5.4) está garantizada.

Por otra parte, es fácil deducir la misma propiedad para el operador adjunto. En efecto, si $u = A^*v$ tenemos que

$$\|A^*v\|^2 = (A^*v, A^*v)_H = (AA^*v, v)_H = a(A^*v, v) \geq \delta\|A^*v\|\|v\|,$$

y por tanto $\|A^*v\| \geq \delta\|v\|$ para todo $v \in H$. Por el teorema **??**, concluimos que A es sobreyectivo.
Por lo tanto existe un único $u \in H$ que satisface (5.4).
Por último, si a es simétrica entonces $\|v\|_a^2 = a(v, v)$ define una norma y entonces $u \in H$ está caracterizado como el minimizador de

$$\|u - v\|_a^2 = a(u - v, u - v) = a(u, u) + a(v, v) - 2a(u, v) = a(u, u) + a(v, v) - 2\varphi(v)$$

en $v \in H$. Esto equivale a minimizar

$$\frac{1}{2}a(v, v) - \varphi(v), \quad v \in H,$$

lo que concluye la demostración. ■

Observación 11 (Dependencia continua respecto a los datos) *En el teorema anterior se tiene*

$$\|u\|_H \leq \delta^{-1}\|\varphi\|_{H^*}$$

Teorema 24 *Todo espacio de Hilbert separable tiene una base ortonormal.*

Visto hasta aquí el LUNES 6 de agosto

5.1. Operadores compactos

El objetivo de esta parte del curso es el análisis espectral de cierto tipo de operadores en espacios de Hilbert: operadores compactos autoadjuntos. Por tanto, introduciremos a continuación estas propiedades.
Nuestro principal interés son los operadores en espacios de Hilbert, pero estableceremos las propiedades principales en el contexto de operadores en espacios de Banach.
Recordemos la definición de los espacios de operadores $\mathcal{L}(X, Y)$, donde X, Y son espacios de Banach introducidos en **??**.

Ejemplo 30 *Sea $H = \ell^2$. Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $T_n : H \longrightarrow H$ por*

$$x = (x_1, x_2, \ldots) \in H \mapsto T_n x := (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots).$$

Se tiene directamente que T_n es lineal, y que $\|T_n x\|_H = \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \leq \|x\|_H$ para todo $x \in H$, por lo que $T_n \in \mathcal{L}(H)$ y $\|T_n\| \leq 1$. De hecho $T(e_1) = e_1$, de donde se tiene $\|T_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 25 *Sean X, Y espacios de Banach. Diremos que un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es*

- *A* **rango finito** *si $\mathcal{R}(T) \subset Y$ tiene dimensión finita.*
- **Compacto** *si $\overline{T(B_1^X)} \subset Y$ es compacto.*

Se denotará

$$\mathcal{K}(X,Y) := \{T \in \mathcal{L}(X,Y) \,:\, T \text{ es compacto } \}.$$

Un operador es compacto sí y solo sí transforma conjuntos acotados en conjuntos precompactos.
Directamente de la definición se tiene que todo operador a rango finito es compacto.
La identidad es un operador compacto sí y sólo sí el espacio es finito dimensional.
Si T, S son operadores acotados tales que T es compacto, entonces la composición $T \circ S$ es compacto.

Proposición 24 *Si X, Y son espacios de Banach, entonces $\mathcal{K}(X,Y)$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{L}(X,Y)$.*

Demostración:
Es claro que es un subespacio vectorial (tarea). Para ver que es cerrado, sea $\{T_n\} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ tal que $T_n \to T$ en $\mathcal{L}(X,Y)$. Probaremos que $\overline{T(B^X)}$ es compacto.
Usaremos que, en un espacio métrico completo, un conjunto tiene cerradura compacta sí y sólo sí es totalmente acotado. De esta manera, si $\varepsilon > 0$, mostraremos que existen $y_1, \ldots, y_m \in Y$ tales que

$$T(B^X) \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_\varepsilon(y_j). \tag{5.5}$$

Como $T_n \to T$ en $\mathcal{L}(X,Y)$, sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_{n_0} - T\| \leq \varepsilon/2$. Entonces $\overline{T_{n_0}(B^X)}$ es compacto, y por tanto existen $y_1, \ldots, y_m \in Y$ tales que

$$T_{n_0}(B^X) \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_{\varepsilon/2}(y_j).$$

Sea $y \in T(B^X)$. Entonces $y = Tx$ con $x \in B^X$, y por hipótesis existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $T_{n_0}x \in B^X_{\varepsilon/2}(y_k)$. Se tiene

$$\|y - y_k\|_Y = \|Tx - T_{n_0}x + T_{n_0}x - y_k\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X + \|T_{n_0} - y_k\|_Y \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Por tanto hemos demostrado (5.5), lo que concluye la demostración. ∎

Directamente de este teorema se tiene el resultado siguiente.

Corolario 15 *Si $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ son operadores a rango finito tales que $T_n \to T$ en $\mathcal{L}(X,Y)$, entonces T es un operador compacto.*

El recíproco del Corolario 15 es falso en general: (Dar REFERENCIA).
No es difícil probar que es cierto en espacios de Hilbert. En efecto, si H es un espacio de Hilbert separable y $T \in \mathcal{L}(X, H)$ (X un espacio de Banach), entonces sabemos que H posee una base ortonormal $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Definimos $P_n \in \mathcal{L}(H)$ como la proyección ortogonal en el espacio $H_n := \overline{\langle\{e_k : k = 1, \ldots, n\}\rangle}$. Entonces se tiene directamente que $P_n \circ T$ es a rango finito, y se puede probar que, si T es compacto, se tiene $P_n \circ T \to T$ en $\mathcal{L}(X, H)$.
Ver en ayudantía: Composición de acotado con compacto es compacto.

Visto hasta aquí el MIERCOLES 8 de agosto

5.2. Teoría espectral

Definición 26 *Si X es un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(X)$, definimos el conjunto resolvente de T por*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : T - \lambda I \textit{ es biyectivo}\} \subset \mathbb{R}.$$

El espectro de T es el conjunto

$$\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T).$$

Notemos que, por el Teorema del Mapeo Abierto, se tiene $\lambda \in \rho(T)$ si y solo si $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.
El espectro $\sigma(T)$ de un operador T se clasifica en sus siguientes subconjuntos:

- El espectro puntual $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : T - \lambda I \text{ no es inyectivo}\}$,
- El espectro continuo $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : T - \lambda I \text{ es inyectivo y } R(T - \lambda I) \neq \overline{R(T - \lambda I)} = X\}$, y
- El espectro residual $\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : T - \lambda I \text{ es inyectivo y } \overline{R(T - \lambda I)} \neq X\}$.

Los elementos $\lambda \in \sigma_p(T)$ son llamados los valores propios de T. Para cada uno de ellos, por definición se tiene $E_\lambda := N(T - \lambda I) \neq \{0\}$. El espacio E_λ es llamado el espacio propio asociado a λ.

Ejemplo 31 *Sea M un subespacio no trivial, propio y cerrado de H, y sea P_M la proyección ortogonal asociada. Entonces $\sigma(P_M) = \sigma_p(P_M) = \{0, 1\}$.*

Demostración:
■

Proposición 25 *Para todo $T \in \mathcal{L}(X)$ se tiene $\sigma(T)$ es compacto y $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$.*

Demostración:
Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda| > \|T\|$. Probaremos que $T - \lambda I$ es biyectivo.
En efecto, dado $x \in X$, $u \in X$ resuelve la ecuación

$$Tu - \lambda u = x \tag{5.6}$$

si y sólo si $u = Su$, donde

$$Su := \frac{1}{\lambda}(Tu - f).$$

Se verifica directamente que S es una contracción en X, por lo que el Teorema de punto fijo de Banach garantiza que existe un único $u \in X$ tal que $Su = u$. Por lo tanto $T - \lambda I$ es biyectivo.
Ahora veamos que $\rho(T) \subset \mathbb{R}$ es abierto. Sea $\lambda_0 \in \rho(T)$, y tomemos $\delta > 0$ que será precisado a continuación.
Si $\lambda_0 \in \rho(T)$, sea $\lambda \in B_\delta(\lambda_0)$. Dado $x \in X$, la ecuación (5.6) es equivalente a tener

$$Tu - \lambda_0 u = x + (\lambda - \lambda_0)u,$$

lo que equivale a tener

$$u = (T - \lambda_0 I)^{-1}(x + (\lambda - \lambda_0)u).$$

Definimos entonces $Su = (T - \lambda_0 I)^{-1}(x + (\lambda - \lambda_0)u)$. Se obtiene que, para $\delta < \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\|^{-1}$, se tiene que S es contracción en X. Por lo tanto existe una única solución $u \in X$ de (5.6), y por tanto $\lambda \in \rho(T)$, lo que demuestra que este conjunto es abierto.
■

Teorema 25 (Alternativa de Fredholm) *Sea X un espacio de Banach, y sea $T \in K(X)$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, exactamente una de las siguientes afirmaciones es cierta:*

1. *Existe $x \in X \setminus \{0\}$ tal que $Tx = \lambda x$ (es decir, λ es valor propio).*
2. *Se tiene $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ (es decir, λ pertenece a la resolvente).*

Observación 12 *El teorema establece que, para un operador T compacto se tiene*

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}.$$

Su nombre se refiere a que, para $\lambda \neq 0$, se tienen dos alternativas: o bien la ecuación $Tx - \lambda x = 0$ tiene soluciones no triviales, o bien la ecuación $Tx - \lambda x = f$ tiene una solución x para cada f.

Visto hasta aquí el VIERNES 10 de agosto

Para la demostración usaremos el Lema de Riesz (Lema 7) y de los siguientes resultados:

Lema 10 *Si $T \in \mathcal{L}(X)$ es un operador compacto y $\lambda \neq 0$ no es un valor propio de T, entonces existe $\delta > 0$ tal que*

$$\|(T-\lambda)x\| \geq \delta\|x\|$$

para todo $x \in X$.

Demostración:
Se deja como ejercicio. Sugerencia: probarlo por contradicción. ■

Lema 11 *Sea F un evn, $E \subset F$ un subespacio vectorial cerrado. Si $v \in F$, $w \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ son tales que $(T-\alpha I)v$, $(T-\beta I)w \in E$, entonces*

$$\|\frac{1}{\alpha}Tv - \frac{1}{\beta}Tw\| \geq dist(v, E).$$

Demostración:
Basta escribir

$$\frac{1}{\alpha}Tv - \frac{1}{\beta}Tw = \frac{1}{\alpha}(T-\alpha I)v - \frac{1}{\beta}(T-\beta I)w + v - w.$$

Por hipótesis tenemos que $(T-\alpha I)v - (T-\beta I)w - w \in E$, de donde se concluye el resultado. ■

Demostración (del Teorema de Alternativa de Fredholm):
Sea $\lambda \notin \sigma_p(T)$, $\lambda \neq 0$. Mostraremos que $\lambda \in \rho(T)$. Usaremos el Lema 10 y el Lema de Riez (Lema **??**).
Por el Lema 10 tenemos directamente que $V_1 := R(T-\lambda I)$ es un conjunto cerrado. Debemos probar que $V_1 = X$. Supongamos lo contrario. Entonces, como $T - \lambda I$ es inyectivo, se tiene que

$$V_{m+1} := R((T-\lambda I)^{m+1}) \subsetneq V_m$$

para cada $m \in \mathbb{N}$. (Si $V_2 = V_1$, usando la inyectividad de $T - \lambda I$ se deduce que este operador es sobreyectivo, que contradice la hipótesis. Usando inducción se concluye la afirmación).
Ahora, aplicamos el Lema de Riesz a la sucesión de subespacios $\{V_m\}$: existe una sucesión $\{z_m\} \subset X$ tal que $z_m \in V_m$, $\|z_m\| = 1$ y

$$dist(z_m, V_{m+1}) \geq \frac{1}{2} \tag{5.7}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.
De las propiedades de esta sucesión deduciremos una contradicción a la compacidad de T. En efecto, de tal propiedad se tiene que, como $\{z_n\}$ es una sucesión de vectores unitarios, se deduce que $\{Tz_n\}$ posee alguna subsucesión convergente (que denotaremos con el mísmo índice, s.p.g.).

Por otra parte, tomemos $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m$. Entonces $(T-\lambda)z_m \in V_{m+1}$, $(T-\lambda)z_n \in V_{n+1} \subset V_{m+1}$ y $z_n \in V_n \subset V_{m+1}$. Entonces, basta usar el lema 11 con $F = V_m$, $E = E_m$ y $\alpha = \beta = \lambda$.
De tal resultado y (5.7) se concluye que

$$\|Tz_n - Tz_m\| \geq \frac{|\lambda|}{2}.$$

Esto contradice el hecho que $\{Tz_n\}$ es convergente, con lo que se sigue que $V_1 = X$ y concluye la demostración. ∎

Proposición 26 *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Si $T \in \mathcal{L}(X)$ es un operador compacto, entonces $0 \in \sigma(T)$, y además todos los elementos del conjunto $\sigma(T) \setminus \{0\}$ son puntos aislados.*

Demostración:
De tener $0 \in \rho(T)$ se tendría que T es un operador biyectivo y por tanto $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Luego se tendría que $I = T \circ T^{-1}$ es un operador compacto, lo que contradice que $\dim(X) = \infty$.

Sabemos que $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ Ahora, sea $\{\lambda_n\} \subset \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ una sucesión de valores propios distintos, y supongamos que $\lambda_n \to \lambda$. Demostraremos que $\lambda = 0$.
El razonamiento que emplearemos es análogo al de la demostración del Teorema **??**: construiremos una sucesión de subespacios cerrados de X, pero esta vez creciente. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, por definición existe $e_n \in X \setminus \{0\}$ tal que

$$(T - \lambda_n I)e_n = 0.$$

Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el espacio

$$E_n = \langle \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \rangle .$$

Dado que los vectores propios e_n corresponden a distintos valores propios, se tiene que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es un conjunto l.i. y por tanto $E_n \subsetneq E_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
Por el Lema de Riesz, existe $\{u_n\} \subset X$ tal que $u_n \in E_n$, $\|u_n\| = 1$ y $d(u_n, E_{n-1}) \geq 1/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Dado que e_n es vector propio correspondiente a λ_n, se tiene

$$(T - \lambda_n I)E_n \subset E_{n-1}. \tag{5.8}$$

Sean $1 < m < n$. Entonces se tiene $(T - \lambda_m I)u_m \in E_{m-1} \subset E_n$, y de (5.8) se sigue que $(T - \lambda_n I)u_n \in E_{n-1}$. Entonces aplicamos el Lema 11 para $F = E_n$, $E = E_{n-1}$, para concluir que

$$\|\frac{1}{\lambda_n}Tu_n - \frac{1}{\lambda_m}Tu_m\| \geq \frac{1}{2}. \tag{5.9}$$

Por otra parte, de la compacidad de T se sigue que $\{Tu_n\}$ posee alguna subsucesión convergente. Si $\lambda_n \to \lambda \neq 0$, se tendría una contradicción con (5.9), de donde se deduce que $\lambda = 0$. ∎

El siguiente resultado resume el análisis espectral de operadores compactos.

Corolario 16 *(Clasificación del espectro) Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita, y $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador compacto, entonces:*

1. $0 \in \sigma(T)$,
2. $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$,
3. *Se tiene uno de los siguientes casos:*
   a) $\sigma(T) = \{0\}$,
   b) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *es finito,*
   c) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *es una sucesión convergente a* 0.

Ejemplo 32 *Sea $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $\lambda_n > \lambda_{n+1} > 0$ para todo n y $\lambda_n \to 0$. Definir $A : \ell^1 \to \ell^1$ por*

$$A(x_n) = (\lambda_n x_n).$$

Mostraremos que A es un operador lineal, continuo, compacto y clasificaremos su espectro.

Demostración:
Es claro que A es lineal. Además es acotado pues

$$\|Ax\| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n x_n| \leq \lambda_1 \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \lambda_1 \|x\|.$$

Para todo $n \geq 1$ definir $A_n : \ell^1 \to \ell^1$ por

$$A(x_1, x_2, ...) = (\lambda_1 x_1, ..., \lambda_n x_n, 0, 0, ...).$$

Claramente los operadores A_n son lineales, acotados y compactos, pues son a rango finito. Notar que

$$\|A - A_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax - A_n x\| = \sup_{\|x\|=1} \sum_{k\geq n+1} \lambda_k |x_k| \leq \lambda_{n+1}.$$

Como $\lambda_n \to 0$ para $n \to \infty$, se concluye que $A_n \to A$ y por tanto A es compacto.
A continuación clasificaremos el espectro de A.

1. $\sigma_p(A) = \{\lambda_n\}$. Notar que $e_k \in \ker(A - \lambda_k I)$ para todo k, así $\{\lambda_k\} \subset \sigma_p(A)$. Si $\lambda \in \sigma_p(A)$ entonces existe una sucesión no nula $(x_n) \in \ker(A - \lambda I)$, lo cual implica
$$(\lambda_n - \lambda)x_n = 0,$$
para todo $n \in \mathcal{N}$. Como (x_n) es nulo, existe k tal que $x_k \neq 0$, luego $\lambda = \lambda_k$ y por tanto $\{\lambda_n\} \subset \sigma_p(A)$.

2. $\sigma_R(A) = \emptyset$. Basta mostrar que para todo $\lambda \notin \{\lambda_n\}$, el operador $A - \lambda I$ tiene imagen densa. Como $\lambda_k - \lambda \neq 0$ para todo k, se tiene $e_k/(\lambda_k - \lambda) \in \ell^1$, y
$$(A - \lambda I)\frac{e_k}{\lambda_k - \lambda} = e_k.$$
Luego $\{e_n\} \subset \mathrm{img}(A - \lambda I)$, lo cual muestra la densidad de la imagen.

3. $\sigma_c(A) = \{0\}$. Como $\ker(A) = \{0\}$, A tiene inversa por izquierda A^{-1}. Por el inciso anterior este operador tiene dominio densa. Si A^{-1} fuese acotado, existiría $C > 0$ tal que $C\|x\| \leq \|Ax\|$ para todo $x \in \ell^1$. Para $x = e_k$ se obtiene $C \geq \lambda_k$ para todo k, lo cual es una contradicción a que $\lambda_k \to 0$. Luego A^{-1} existe, tiene imagen densa y es no acotado, así $0 \in \sigma_C(A)$. Como A es compacto, $\sigma(A) = \{0\} \cup \sigma_p(A)$, por tanto $\sigma_c(A) = \{0\}$.

■

5.3. Operadores autoadjuntos

Definición 27 *Si H es un espacio de Hilbert, decimos que $T \in \mathcal{L}(H)$ es autoadjunto si $T^* = T$.*

Es decir, un operador autoadjunto es caracterizado por la propiedad
$$(Tx, y)_H = (x, Ty)_H \quad \forall x, y \in H.$$
Los operadores autoadjuntos son la generalización de las matrices simétricas.

Ejemplo 33 *Si $H = \mathbb{R}^n$, los operadores autoadjuntos son las matrices simétricas.*

Ejemplo 34 *Si $M \subset H$ es un subespacio cerrado de H, entonces la proyección ortogonal P_M es un operador autoadjunto. (Se deja como ejercicio).*

Proposición 27 *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto. Entonces se cumplen las siguientes propiedades.*

1. *Si λ_1, λ_2 son valores propios de T, distintos y con espacios propios E_1 y E_2 respectivamente, entonces $E_1 \perp E_2$.*

2. *Si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son vectores propios de T, el subespacio $F := \langle\{e_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle^{\perp}$ es invariante bajo T.*

Demostración:
Se deja como ejercicio. ■

Lema 12 *Sea $A \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto tal que $(Ax, x)_H \geq 0$ para todo $x \in H$. Entonces A es biyectivo si y sólo si $m_A := \inf_{\|x\|=1}(Ax, x) > 0$.*

Demostración:
La prueba se basa en las propiedades de la forma bilineal definida, para cada $x, y \in H$, por

$$a(x, y) = (Ax, y)_H.$$

Claramente a es una forma bilineal, bicontinua (dado que A es acotado) y simétrica (pues A es autoadjunto). Además se tiene, por hipótesis, que

$$a(x, x) \geq m_A \|x\|_H$$

para todo $x \in H$. Si $m_A > 0$ entonces a es coerciva. Por el Teorema de Lax-Milgram (o simplemente por el Teorema de representación de Riesz), para cada $z \in H$ existe un único $x \in H$ tal que

$$(Ax, y)_H = (z, y)_H$$

para todo $y \in H$. Esto implica que A es biyectivo.
Por otra parte, supongamos que $m_A = 0$. Entonces existe una sucesión $\{x_n\} \subset H$ tal que $\|x_n\|_H = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $(Ax_n, x_n)_H \to 0$. Como a es simétrica, define un producto interno. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz para este producto se tiene:

$$\begin{aligned}
\|Ax_n\|_H^2 = (Ax_n, Ax_n)_H = (A^2 x_n, x_n)_H &= a(Ax_n, x_n) \\
&\leq a(Ax_n, Ax_n)^{1/2} a(x_n, x_n)^{1/2} \\
&= (A^2 x_n, Ax_n)_H^{1/2} (Ax_n, x_n)_H^{1/2} \\
&\leq \|A\|_{\mathcal{L}(H)}^{1/2} \|Ax_n\|_H \, (Ax_n, x_n)^{1/2}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto

$$\|Ax_n\|_H \leq \|A\|_{\mathcal{L}(H)}^{1/2} \, (Ax_n, x_n)^{1/2}, \tag{5.11}$$

lo cual implica que $\|Ax_n\|_H \to 0$. Teniendo en cuenta que $\|x_n\|_H = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto implica que A no es biyectivo. ■

Proposición 28 *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto. Definamos*

$$m = \inf_{\|u\|=1} (Tu, u), \quad M = \sup_{\|u\|=1} (Tu, u).$$

Entonces

$$\sigma(T) \subset [m, M], \quad \{m, M\} \subset \sigma(T) \ \ y \ \ \|T\|_{\mathcal{L}(H)} = \max\{|m|, |M|\}.$$

Demostración:
Si $\lambda < m$, por el Lema 12 aplicado al operador $A = T - \lambda I$ obtenemos $\lambda \in \rho(T)$. Para $\lambda > M$ se obtiene la misma conclusión analizando el operador $\lambda I - T$, y por lo tanto se tiene $\sigma(T) \subset [m, M]$.
Por el mismo Lema para los operadores $T - mI$ y $MI - T$ se deduce que $\{m, M\} \subset \sigma(T)$.
Se deja la identidad $\|T\|_{\mathcal{L}(H)} = \text{máx}\{|m|, |M|\}$ como ejercicio.
Sugerencia: Una desigualdad es directa. Para la restante, dados $x \in H$ y $r > 0$, defina $x_r = rx + r^{-1}Tx$, $\tilde{x}_r = rx - r^{-1}Ax$ y pruebe que

$$4\|Tx\|_H^2 = (Tx_r, x_r)_H - (T\tilde{x}_r, \tilde{x}_r)_H. \tag{5.12}$$

Luego tome $r^2 = \frac{\|Tx\|_H}{\|x\|_H}$, acote el lado derecho de (5.12) y concluya. ■

De la proposición anterior se tiene directamente el resultado siguiente.

Corolario 17 *Si $T \in \mathcal{L}(H)$ es un operador autoadjunto tal que $\sigma(T) = \{0\}$, entonces $T = 0$.*

Teorema 26 (Descomposición espectral de Hilbert) *Sean H un espacio de Hilbert separable y $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador compacto autoadjunto. Entonces existe una base hilbertiana $\{e_n\}_{\mathbb{N}}$ de H formada por vectores propios de T, cuyos valores propios $\{\lambda_n\}_{\mathbb{N}}$ son tales que $\lambda_n \to 0$.*

Demostración:
Sean $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ el conjunto de valores propios distintos de T (tomaremos $\lambda_0 = 0$ si es valor propio, y se supondrá que se trata de un conjunto numerable, el caso finito se prueba de la misma forma).
Sean $E_0 = ker(T)$, y $E_n = ker(T - \lambda_n I)$ para todo $n \geq 1$. Entonces se tiene $E_n \neq \{0\}$ para todo $n \geq 1$. Veamos que $dim(E_n) < \infty$: Si $x \in B_1 \cap E_n$ entonces

$$x = \frac{1}{\lambda_n} Tx \in \frac{1}{\lambda_n} T(B_1),$$

de donde resulta que $\overline{B_1} \cap E_n$ es compacta, y por tanto E_n tiene dimensión finita. (E_0 podría tener dimensión infinita, o ser trivial). En todo caso, E_n es un subespacio cerrado de H para todo $n \geq 0$, y cada espacio tiene una base ortonormal (finita, excepto eventualmente para E_0).
Por la Proposición 27, $E_n \perp E_m$ siempre que $n \neq m$ para todo $n, m \geq 0$. Por lo tanto, la unión de las bases de todos estos subespacios proporcional un conjunto ortonormal numerable $\{e_n\}$ de H.
Probaremos que este conjunto es completo. Sea $F := \langle \{e_n\} \rangle$
De nuevo por la Proposición 27 se tiene que $T(F^\perp) \subset F^\perp$, por lo que $T_0 := T|_{F^\perp} \in \mathcal{L}(F^\perp)$. Probaremos que se tiene $T_0 = 0$. Para esto, sea $\lambda \neq 0$valor propio de T_0. Entonces existe $u \in F^\perp \subset H$ tal que $T_0 u = \lambda u$. En particular $\lambda = \lambda_k$ para algún $k \geq 0$ y entonces $u \in E_k \subset F$. Por lo tanto $u \in F \cap F^\perp = \{0\}$. Por lo tanto $\sigma(T_0) = \{0\}$, y del Corolario 17 se sigue que $T_0 = 0$.

Esto implica que $T = 0$ en $F^\perp$, de donde $F^\perp \subset ker(T) = E_0 \subset F$. Entonces $F^\perp = \{0\}$ y por lo tanto $\overline{F} = H$. Es decir, $\{e_n\}$ es una base ortonormal de H. ■

Corolario 18 *Del Teorema 26, se tiene*

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_{E_n}$$

en $\mathcal{L}(H)$, donde P_{E_n} es la proyección ortogonal en $E_n := ker(T - \lambda_n I)$ para todo $n \geq 1$. Si $dim(E_n) = 1$ se tiene $P_{E_n} x = (x, e_n)_H e_n$ para cada $x \in H$.

Ejemplo 35 *Consideremos, para cada $f \in L^2(\Omega)$, la ecuación*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \Omega \\ \quad\; u = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.13}$$

Como vimos en el ejemplo **??**, *la ecuación* (5.13) *tiene solución única para cada $f \in L^2(\Omega)$.*
Definimos el operador

$$T : L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$$

por

$$Tf = u,$$

donde $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución de la ecuación (5.13)*. Veamos que T es autoadjunto:*

Demostración:
Dado $g \in L^2(\Omega)$, consideremos la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta v = g, & \Omega \\ \quad\; v = 0, & \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.14}$$

que posee una única solución $v \in H_0^1$. Entonces

$$(Tf, g)_{L^2} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = (f, Tg)_{L^2},$$

lo que implica que T es autoadjunto. ■

5.4. Problemas certamenes

Ejercicio 21 *(P1 C3 2016-1) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert.*

(a) Sean $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ (operador compacto), y $\{g_n\}$ una sucesión ortonormal. Probar que $\lim_{n\to\infty} Tg_n = 0$.
Sugerencia: pruebe que $\{g_n\}$ es débilmente convergente.

(b) Sea $\{e_n\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Probar que si $\sum \|Te_n\|^2 < \infty$ entonces T es un operador compacto. Decimos que T es un operador de **Hilbert - Schmidt***. Para esto:*

(i) Demuestre que el operador T_N definido por $T_N x = \sum_{n=1}^{N}(x, e_n)Te_n$ es compacto.

(ii) Pruebe que $T = \lim_{N\to\infty} T_N$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

(iii) Concluya.

(c) Sea T un operador de **Hilbert - Schmidt***. Demuestre que la suma del inciso anterior no depende de la base ortonormal de $\mathcal{H}$.*

Demostración:

(a) Por la desigualdad de Bessel para todo $g \in \mathcal{H}$

$$\sum_{n\geq 1} |\langle g_n, g\rangle|^2 \leq \|g\|^2$$

tal serie es convergente, sigue que $\langle g_n, g\rangle \to 0$ para todo $g \in \mathcal{H}$. Por Teorema de Representación de Riesz es claro que $g_n \rightharpoonup 0$. Como T es un operador compacto, se concluye que $Tg_n \to 0$.

(b) Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $\sum_n \|Te_n\|^2 < \infty$ donde $\{e_n\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Definir para todo $N \in \mathbb{N}$ el operador

$$T_N x = \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle Te_n, \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

el cual satisface $T_N \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ pues por bilinealidad del producto interno T_N es lineal y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\|T_N x\| \leq \sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle| \cdot \|Te_n\| \leq \|x\| \sum_{n=1}^{N} \|Te_n\|$$

para todo $x \in \mathcal{H}$, lo cual implica $\|T_N\| < \infty$. Más aún, para todo N el operador T_N tiene rango finito, por lo cual $T_N \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ para todo N. Se tiene entonces por Cauchy-Schwarz

$$\|Tx - T_N x\|^2 \leq \left(\sum_{n>N} |\langle x, e_n \rangle| \cdot \|Te_n\| \right)^2 \leq \left(\sum_{n>N} \langle x, e_n \rangle^2 \right) \left(\sum_{n>N} \|Te_n\|^2 \right)$$

utilizando la desigualdad de Bessel y dado que $(\|Te_n\|)_n \in \ell^2$

$$\|T - T_N\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \sum_{n>N} \|Te_n\|^2 \to 0$$

a medida que $N \to \infty$. Sigue que $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ por ser límite uniforme de operadores compactos.

(c) Sean $\{e_n\}$ y $\{f_k\}$ bases ortonormales de $\mathcal{H}$, por la identidad de Parseval obtenemos

$$\sum_n \|Te_n\|^2 = \sum_n \sum_k |\langle Te_n, f_k \rangle| = \sum_n \sum_k |\langle e_n, T^* f_k \rangle| =^{(1)} \sum_k \sum_n |\langle e_n, T^* f_k \rangle| = \sum_k \|T^* f_k\|^2$$

por otro lado

$$\sum_k \|T^* f_k\|^2 = \sum_k \sum_n |\langle T^* f_k, f_n \rangle| = \sum_n \sum_k |\langle f_k, T f_n \rangle| = \sum_n \|T f_n\|^2$$

luego la suma no depende de la elección de las bases. Más aún, se tiene que T es un operador de Hilbert-Schmidt ssi T^* es un operador de Hilbert-Schmidt.
Obs.: El hecho que en $^{(1)}$ se haya podido intercambiar la suma, sigue del siguiente resultado estudiado en Teoría de la medida, aplicado al espacio $\mathcal{N}$ con la σ-álgebra usual y la medida de conteo.
Resultado. Sea $f_n : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to [0, \infty]$ una sucesión de funciones medibles, entonces $\sum_n f_n(x)$ es medible y

$$\int_\Omega \sum_{n \geq 1} f_n(x) d\mu = \sum_{n \geq 1} \int_\Omega f_n(x) d\mu.$$

■

Ejercicio 22 *(P2 C3 2016-1) Denotamos $x \in \mathcal{H} := \ell^2$ por $x = \{x_n\} = (x_1, x_2, \ldots)$. Definimos los operadores*

$$S_r x = (0, x_1, x_2, \ldots),$$

$$S_l x = (x_2, x_3, \ldots),$$

(operadores shift a la derecha y shift a la izquierda, respectivamente).

(a) Determine las normas de cada uno de estos dos operadores. Determine si son compactos.

(b) Identifique el adjunto de cada operador.

(c) Encuentre el espectro, el conjunto de valores propios, y los correspondientes espacios propios, para cada operador S_r y S_l

Demostración:
Sean $x, y \in \ell^2$, notar que

$$\langle S_r x, y\rangle = \sum_{n\geq 1} |x_n y_{n+1}| = \langle x, S_l y\rangle$$

luego $(S_r)^* = S_l$. Daremos por sentado este hecho y no haremos referencia a este cuando sea utilizado.
Notar que

$$\|S_r x\|_2^2 = \sum_{n\geq 1} |x_n|^2 = \|x\|_2^2$$

sigue que $\|S_r\| = 1$ y $\|S_l\| = \|(S_l)^*\| = \|S_r\| = 1$.
A continuación determinaremos el espectro y el espectro puntual de los operadores Shift.

1. $\overline{B}(0,1) = \sigma(S_l) = \sigma(S_d)$: Notar que

$$\|S_l^n\| = \|S_d^n\| = 1$$

para todo $n \in \mathcal{N}$, luego

$$r_\sigma(S_l) = \lim_{n\to\infty} \|S_l^n\|^{1/n} = r_\sigma(S_d) = \lim_{n\to\infty} \|S_d^n\|^{1/n} = 1$$

sigue que $\sigma(S_l), \sigma(S_d) \subset \overline{B}(0,1)$.
Veamos que $B(0,1) \subset \sigma_p(S_l)$. Sea $\lambda \in B(0,1)$, si $\lambda = 0$ es claro que $x = (1, 0, \ldots) \in ker(S_l - \lambda)$, si $\lambda \neq 0$ entonces $(S_l - \lambda)x = 0$ implica $x_n = \lambda x_{n-1}$ para todo $n \geq 2$, por recursión es fácil ver que $x_n = \lambda^{n-1} x_1$ para $n \geq 1$, entonces $x = x_1(1, \lambda, \ldots, \lambda^n, \ldots) \in \ell^2$ ssi $|\lambda| < 1$ (vía producto interno esto es directo), luego tomando en particular $x_1 = 1$

$$S_l x = (\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots) = \lambda(1, \lambda, \lambda^2, \ldots) = \lambda x$$

en cualquier caso $ker(S_l - \lambda) \neq \{0\}$.
Por lo anterior

$$B(0,1) \subset \sigma_p(S_l) \subset \sigma(S_l) \subset \overline{B}(0,1)$$

como el espectro es un conjunto compacto, tomando cerradura se obtiene

$$\sigma(S_l) = \overline{B}(0,1).$$

Ahora $\lambda \in \sigma(S_l)$ ssi $S_l - \lambda$ no es invertible ssi $(S_l - \lambda)^* = S_d - \overline{\lambda}$ no es invertible ssi $\overline{\lambda} \in \sigma(S_d)$, concluimos entonces que $\sigma(S_d) = \overline{B}(0,1)$.

2. $\sigma_p(S_l) = B(0,1)$: Por el resultado dado en 1. basta probar que $\partial B(0,1) \cap \sigma_p(S_l) = \emptyset$. Sea $\lambda \in \partial B(0,1) \cap \sigma_p(S_l)$, entonces $|\lambda| = 1$ y $\ker(S_l - \lambda) \neq \{0\}$ entonces existe un vector no nulo $x \in \ell^2, S_l x = \lambda x$ de ello $x_n = \lambda x_{n-1}$ para $n \geq 2$ entonces $x = x_1(1, \lambda, \lambda^2, \dots) \notin \ell^2$ pues $|\lambda| = 1$. Se concluye que $\sigma_p(S_l) = B(0,1)$.

3. $\sigma_p(S_d) = \emptyset$: Si $\lambda \in \sigma_p(S_d)$ entonces existe un vector no nulo $x \in \ell^2, S_d x = \lambda x$ lo cual implica $\lambda x_1 = 0$ y $x_n = \lambda x_{n+1}$ para $n \geq 1$, de ello es directo concluir que $x = 0$, por lo cual S_d no posee valores propios.

Para $\lambda \in B(0,1)$ el espacio propio asociado es $N(S_l - \lambda I) = \text{span}\{(\lambda^n)_{n\geq 0}\}$. Puesto que $\overline{B}(0,1) = \sigma(S_l) = \sigma(S_d) \subset \ell^2$ son conjuntos no numerables, por Teorema visto en aula, es directo concluir que S_d, S_l no son operadores compactos. ■

Ejercicio 23 *(P3 C3 2016-1) Sea $T \in K(\mathcal{H})$ autoadjunto y positivo. Demuestre que existe un operador $S \in K(\mathcal{H})$ tal que $S^2 = T$ (que denotaremos por $S = \sqrt{T} = T^{1/2}$). Pruebe que S es el único operador acotado positivo con tal propiedad.*
Sugerencia: Use el Teorema de descomposición espectral para T, y defina S de manera conveniente.

Demostración:
Se cumplen las hipótesis del Teorema Espectral para T, por lo cual

$$Tx = \sum_{k\geq 1} \lambda_k \langle x, \phi_k \rangle \phi_k$$

donde $\{\phi_k\}$ es un sistema ortonormal de vectores propios de T asociados a sus respectivos autovalores $\{\lambda_k\}$. Más aún, como T es un operador autoadjunto y positivo se verifica que $\lambda_k > 0$ pues si x_k es autovector asociado a λ_k

$$\langle Tx_k, x_k \rangle = \langle \lambda_k x_k, x_k \rangle = \lambda_k \|x_k\|^2 > 0$$

como $\|x_k\| > 0$ por ser autovector, se tiene $\lambda_k > 0$ para todo k (claro que $\lambda_k \neq 0$). Definimos el operador lineal $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por

$$Sx = \sum_{k\geq 1} \sqrt{\lambda_k} \langle x, \phi_k \rangle \phi_k$$

el cual es compacto y autoadjunto por el Teorema Espectral, pues $\{\phi_k\}$ es un conjunto ortonormal de vectores en $\mathcal{H}$ y $\sqrt{\lambda_k} \to 0$. Claro que

$$\begin{aligned} S^2 x = S(Sx) = \sum_{k\geq 1} \sqrt{\lambda_k} \langle Sx, \phi_k \rangle \phi_k &= \sum_{k\geq 1} \sqrt{\lambda_k} \left\langle \sum_{j\geq 1} \sqrt{\lambda_j} \langle x, \phi_j \rangle \phi_j, \phi_k \right\rangle \phi_k \\ &= \sum_{k\geq 1} \sqrt{\lambda_k} \langle \sqrt{\lambda_k} \langle x, \phi_k \rangle \phi_k, \phi_k \rangle \phi_k \\ &= \sum_{k\geq 1} \lambda_k \langle x, \phi_k \rangle \phi_k \end{aligned}$$

por lo que S satisface las condiciones requeridas.
Sea $Q \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ autoadjunto tal que $Q^2 = T$. Es claro que todo vector propio de Q es también vector propio de T y viceversa. Denotando $\{q_j\}$ el conjunto de valores propios asociados a tales vectores propios, Q es necesariamente de la forma

$$Qx = \sum_{j\geq 1} q_j \langle x, \phi_j \rangle \phi_j.$$

Se ve que

$$Q^2\phi_j = q_j^2\phi_j = \lambda_j\phi_j = T\phi_j$$

luego $q_j^2 = \lambda_j$ para todo j. Como Q es un operaor positivo sigue directamente que $q_j = \sqrt{\lambda_j}$ para todo j. Se concluye que $Q = S$, lo cual demuestra la unicidad del operador. ■

Ejercicio 24 *(P1 C3 2017-1) Considere el operador T definido en $L^2([0,1])$ por*

$$Tf(x) = \int_0^{1-x} f(t)dt, \quad \forall x \in [0,1].$$

Pruebe que $T \in \mathcal{L}(L^2([0,1]))$ y que T es un operador compacto. Determine su espectro.

Demostración:
El operador T es lineal por la linealidad de la integral. Para la continuidad, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\|Tf\|^2_{L^2([0,1])} &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 \chi_{[0,1-x]}(t)|f(t)|dt \right)^2 dx \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 \chi_{[0,1-x]}(t)dt \right) \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right) dx \\
&= \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2([0,1])}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $T \in \mathcal{L}(L^2([0,1]))$.
Ahora, sea $f \in B(0,R) \subset L^2([0,1])$, entonces

$$\|Tf\|_{L^2([0,1])} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} R$$

por lo que $TB(0,R)$ es un conjunto acotado. Dados $x, y \in [0,1]$

$$|Tf(x) - Tf(y)| = \left| \int_{1-y}^{1-x} f(t)dt \right| \leq |x-y| \|f\|_{L^2([0,1])} \leq R|x-y|$$

así $TB(0,R)$ es un conjunto uniformemente equicontinuo. Por el Teorema de Ascoli-Arzelá $TB(0,R)$ es un conjunto precompacto en $(C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Por último, como

$\|\cdot\|_{L^2([0,1])} \leq \|\cdot\|_\infty$, vía sucesiones se ve que $TB(0,R)$ es precompacto en $L^2([0,1])$, por lo cual T es un operador compacto.
De lo anterior se tiene que $T(L^2([0,1])) \subset C([0,1])$. Como T es un operador compacto, $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}$. Para cada valor propio $\lambda > 0$, existe $f \in L^2$ no nula tal que $Tf = \lambda f$. Por lo tanto

$$\lambda f(x) = \int_0^{1-x} f(t)dt \tag{5.15}$$

de donde se ve que $f \in C^1([0,1])$ por TFC. Derivando (5.15) se tiene

$$\lambda f'(x) = -f(1-x) = -\frac{1}{\lambda}\int_0^x f(t)dt \tag{5.16}$$

y derivando nuevamente (5.16) se obtiene la EDO

$$\lambda^2 f''(x) = -f(x). \tag{5.17}$$

De (5.15) y (5.16) obtenemos $f(1) = 0$ y $f'(0) = 0$ respectivamente. Las soluciones de (5.17) con $f'(0) = 0$ son múltiplos de $f(x) = \cos\left(\frac{x}{\lambda}\right)$. De la condición $f(1) = 0$ se obtiene que $\lambda_n = 2/((2n-1)\pi)$. Por lo tanto

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \left\{\frac{2}{(2n-1)\pi}\right\}_{n\geq 1}$$

■

Ejercicio 25 *(P2 C3 2017-1) Si H es un espacio de Hilbert, pruebe que un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es compacto si y solo si T^* es compacto.*
Sugerencia: Si $\{x_n\} \subset H$ es acotada, acotar $\|T^*x_n - T^*x_m\|^2$ usando la definición de T^*.

Demostración:
Suponer T compacto y sea $\{x_n\}_n \subset H$ una sucesión acotada, digamos por $M > 0$. Como T^* es lineal continuo, sigue que la composición TT^* es un operador compacto, así $\{TT^*x_n\}_n$ tiene una subsucesión convergente, digamos $\{TT^*x_{n_k}\}_k$. Para $k > j$ tenemos

$$\begin{aligned}\|T^*x_{n_k} - T^*x_{n_j}\|^2 &= \langle TT^*(x_{n_k} - x_{n_j}), x_{n_k} - x_{n_j}\rangle \\ &\leq \|TT^*(x_{n_k} - x_{n_j})\|\|x_{n_k} - x_{n_j}\| \\ &\leq 2M\|TT^*(x_{n_k} - x_{n_j})\|\end{aligned}$$

y este último converge a cero a medida que $j \to \infty$, por lo que $\{T^*x_{n_k}\}_k$ es una sucesión de Cauchy, y por tanto convergente. Luego T^* es compacto.
Ahora, si T^* es compacto, por lo anterior $T^{**} = T$ es compacto. ■

Ejercicio 26 *(P3 C3 2017-1) Sea H un espacio de Hilbert y B_H su bola unitaria cerrada. Demuestre cada una de las siguientes afirmaciones*

1. *El conjunto de puntos extremos de B_H es $S := \{x \in H : \|x\| = 1\}$.*
2. *El operador proyección em B_H está dado por la proyección radial.*
3. *Si $P \in \mathcal{L}(H)$ es un operador proyección ($P^2 = P$), entonces P es una proyección ortogonal si y solo si P es autoadjunto.*

Demostración:

1. Probaremos que los puntos extremos de $\overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{C}$ son los puntos en la circunferencia unitaria. Por definición los puntos extremos de un conjunto convexo deben pertenecer a la cerradura topológica del conjunto, por lo cual, necesariamente los puntos extremos de $\mathcal{D}$ tienen módulo 1. Sea $z \in \text{ext}\overline{\mathcal{D}}$ con $|z| = 1$. Existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Asumir $z = t\lambda + (1-t)\mu$ para algún $t \in (0,1)$ y $\lambda, \mu \in \overline{\mathcal{D}}$. Por desigualdad triangular $|\lambda| = |\mu| = 1$ y por tanto existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda = \cos\alpha + i\sin\alpha$ y $\mu = \cos\beta + i\sin\beta$. Entonces
$$1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 + 2t^2 - 2t + 2t(1-t)\cos(\alpha - \beta)$$
lo cual implica $\cos(\alpha - \beta) = -1$, esto es, $\alpha = \beta + (2k+1)\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Luego $\lambda = \mu = 1$, lo cual demuestra lo que enunciado al principio.

   Sea $\xi \in S_{\mathcal{H}}$ y suponer que $\xi = t\eta + (1-t)\nu$ para algunos $\eta, \nu \in B_{\mathcal{H}}$ y $t \in (0,1)$. Tomando producto interno
$$1 = t\langle \eta, \xi\rangle + (1-t)\langle \nu, \xi\rangle$$
y por Cauchy-Schwarz se tiene que 1 está expresado como combinación lineal de elementos en el disco unitario $\overline{\mathcal{D}}$. Siendo 1 punto extremo de $\overline{\mathcal{D}}$ se tiene $1 = \langle \eta, \xi\rangle = \langle \nu, \xi\rangle$. Como se tiene igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz, existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{C}$ tales que $\eta = \lambda_1\xi$ y $\nu = \lambda_2\xi$. Notando que $1 = \langle \eta, \xi\rangle = \lambda_1\langle \xi, \xi\rangle = \lambda_1$, ídem para ν, se tiene $\eta = \nu = \xi$ y por tanto $\xi \in \text{ext}B_{\mathcal{H}}$.

2. El conjunto $B_{\mathcal{H}}$ es cerrado y convexo, por esto la proyección sobre $B_{\mathcal{H}}$ viene dado por la solución al problema $\min_{x \in B_{\mathcal{H}}}\|x - v\|$. Si $v = 0$ entonces $x = 0$, asumimos $v \neq 0$. En tal caso todo, $x \in \mathcal{H}$ puede ser escrito $x = \lambda v + w$ donde $v \perp w$. Por pitágoras se tiene $\|x\|^2 = \lambda^2\|v\|^2 + \|w\|^2$ luego $\|x - v\|^2 = (1-\lambda)^2\|v\|^2 + \|w\|^2$. Si $x \in B_{\mathcal{H}}$ entonces $\lambda v \in B_{\mathcal{H}}$ y $\|v - \lambda v\|^2 \leq \|x - v\|^2$. Considerando $V = \text{span}\{v\}$ se tiene $\min_{x \in B_{\mathcal{H}}}\|x - v\| = \min_{\lambda v \in B_{\mathcal{H}}}(1-\lambda)^2\|v\|^2$. Como $\lambda v \in B_{\mathcal{H}}$ ssi $|\lambda| \leq 1/\|v\|$ el problema de minimización es resuelto por $\lambda = \min\{1, 1/\|v\|\} = 1/\max\{1, \|v\|\}$, esto es, $x = v/\max\{1, \|v\|\}$. El operador proyección buscado es
$$Px = \frac{x}{\max\{1, \|x\|\}} = \begin{cases} x, & \|x\| \leq 1 \\ \frac{x}{\|x\|}, & \|x\| > 1. \end{cases}$$

3. Suponga que P es un operador de proyección ortogonal. Existe $E \leq \mathcal{H}$ cerrado tal que $P = P_E$, por descomposición en suma directa, sean $\xi = \xi_E + \xi_{E^\perp}, \eta = \eta_E + \eta_{E^\perp} \in \mathcal{H}$ entonces

$$\langle P\xi, \eta\rangle = \langle \xi_E, \eta_E + \eta_{E^\perp}\rangle = \langle \xi_E, \eta_E\rangle = \langle \xi, P\eta\rangle$$

sigue que P es autoadjunto.
Suponer P autoadjunto. Definamos

$$E = \{\xi \in \mathcal{H} : P\xi = \xi\} = \ker(I - P)$$

el cual es un subespacio cerrado pues P es acotado. Dado $\xi \in \mathcal{H}$ notar que $\xi = P\xi + (I - P)\xi$ con $P\xi \in E$, pues $P(P\xi) = P^2\xi = P\xi$ y $(I - P)\xi \in E^\perp$ pues para todo $\eta \in E$ se tiene

$$\langle \eta, (1 - P)\xi\rangle = \langle P\eta, (I - P)\xi\rangle = \langle \eta, (P - P^2)\xi\rangle = 0.$$

Por la unicidad de suma directa $\mathcal{H} = E \oplus E^\perp$ se tiene $\mathrm{Img}P = E$ y $E^\perp = \mathrm{Img}(I - P)$. Notando que $P\xi_E = P(P\xi) = P^2\xi = P\xi = \xi_E$ y $P\xi_{E^\perp} = P(I - P)\xi = 0$ se tiene $P|_E = I|_E$ y $P|_{E^\perp} = I|_{E^\perp}$, se concluye que $P = P_E$.

■

Ejercicio 27 *(P1 C3 2018-1) Sea H un espacio de Hilbert real, y $T \in \mathcal{L}(H)$.*

1. *Demuestre que el operador adjunto T^* está caracterizado como el elemento en $\mathcal{L}(H)$ que cumple la identidad*

$$(Tx, y)_H = (x, T^*y)_H \quad \forall x, y \in H. \tag{5.18}$$

2. *Pruebe que la identidad (5.18) implica que $\|T^*\|_{\mathcal{L}(H)} = \|T\|_{\mathcal{L}(H)}$.*

3. *Pruebe que T^*T es un operador autoadjunto.*

4. *Demuestre que $\sigma(T^*T) \subset [0, \infty)$*

5. *Pruebe que $\|T^*T\|_{\mathcal{L}(H)} = \|T\|^2_{\mathcal{L}(H)}$.*

Demostración:

1. Por definición $T^* : H^* \to H^*$. Si $\varphi \in H^*$ entonces $(T^*\varphi)x = \varphi(Tx)$ para todo $x \in H$, y por Riesz existe $y \in H$ tal que $\varphi(x) = (x, y)_H$ para todo $x \in H$. Entonces $(T^*\varphi)x = (Tx, y)_H$, y nuevamente por Riesz se deduce que existe T^*y representante de $T^*\varphi$, por lo cual

$$(T^*y, x) = (Tx, y), \quad \forall x, y \in H.$$

2. Tenemos

$$\|T^*y\|^2 = (T^*y, T^*y) = (TT^*y, y) \leq \|TT^*y\|\|y\| \leq \|T\|\|T^*y\|\|y\|$$

entonces

$$\|T^*y\| \leq \|T\|\|y\|, \quad \forall y \in H,$$

de lo cual $\|T\| \leq \|T^*\|$. La identidad obtenida en el inciso 1. es simétrica, de lo cual se sigue la igualdad deseada.

3. Para todo $x, y \in H$

$$(T^*Tx, y)_H = (Tx, Tx)_H = (x, T^*Ty)_H.$$

4. Para todo $x \in H$

$$(T^*Tx, x)_H = (Tx, Tx)_H = \|Tx\|_H^2 \geq 0,$$

así $\inf_{x\in H}(T^*Tx, x) \geq 0$. De la proposición (28) se obtiene $\sigma(T^*T) \subset [0, \infty)$.

5. Del hecho

$$\|T^*Tx\| \leq \|T^*\|\|T\|\|x\|, \quad \forall x \in H$$

y que $\|T^*\| = \|T\|$ se sigue que $\|T^*T\| \leq \|T\|^2$. Vemos que

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) \leq \|T^*T\|\|x\|^2, \quad \forall x \in H$$

luego $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$ y se sigue la igualdad.

$\blacksquare$

Ejercicio 28 *(P2 C3 2018-1) Consideremos $H = L^2([0,1])$, y definimos $T : H \longrightarrow H$ por*

$$Tf(x) = \int_0^x f(y)dy.$$

1. *Demuestre que $T \in \mathcal{L}(H)$.*

2. *Determine el operador adjunto T^*.*

3. *Demuestre que*

$$TT^*f(x) = \int_0^x yf(y)dy + x\int_x^1 f(y)dy \tag{5.19}$$

y deduzca que existe $K : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $TT^*f(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$.

4. *Pruebe que $S := TT^* \in \mathcal{L}(H)$ es un operador compacto autoadjunto.*
   Sugerencia: Dada $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2([0,1])$ acotada, aplique el Teorema de Arzelá-Ascoli a la familia $\{Sf_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en el espacio adecuado, concluya.

5. *Determine el espectro de TT^*, y deduzca las normas $\|TT^*\|_{\mathcal{L}(H)}$ y $\|T\|_{\mathcal{L}(H)}$. Sugerencia: Para determinar los valores propios, obtenga, a partir de (5.19), una ecuación diferencial en $(0,1)$ con condiciones en los extremos.*
   Deberá obtener $\|T\|_{\mathcal{L}(H)} = 2/\pi$.

Demostración:

1. Claramente T es lineal por la linealidad de la integral. Para toda $f \in H$ se tiene

$$\begin{aligned}\|Tf\|^2 = \int_0^1 \left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 dx &\leq \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|^2 dt\right)\left(\int_0^x 1dt\right) dx \\ &\leq \left(\int_0^1 xdx\right)\left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right) \\ &= \frac{1}{2}\|f\|^2.\end{aligned}$$

   Por lo tanto $T \in \mathcal{H}$ y $\|T\| \leq 1/\sqrt{2}$.

2. Dados $f, g \in H$

$$(Tf,g)_{L^2} = \int_0^1 \left(\int_0^x f(t)dt\right) g(x)dx = \int_0^1 \int_0^1 \chi_{(0,x)}(t)f(t)g(x)dtdx$$

   donde χ denota la función indicatriz de un conjunto. Como $\chi_{(0,x)}(t) = \chi_(t,1)(x)$ para todo $x, t \in [0,1]$, por el Teorema de Fubini

$$(Tf,g)_{L^2} = \int_0^1 \int_0^1 \chi_{(t,1)}(x)f(t)g(x)dxdt = \int_0^1 f(t)\left(\int_t^1 g(x)dx\right) dt.$$

   Por lo tanto

$$T^*g(y) = \int_y^1 g(x)dx, \quad \forall g \in L^2([0,1]).$$

3. Para toda $f \in H$

$$\begin{aligned}TT^*f(x) = \int_0^x T^*f(y)dy = \int_0^x \int_y^1 f(t)dtdy& \\ &= -\int_0^x (-f(y))ydy + y\int_y^1 f(t)dt\Big|_{y=0}^{y=x} \\ &= \int_0^x yf(y)dy + x\int_x^1 f(y)dy.\end{aligned}$$

Entonces la función K buscada debe satisfacer

$$K(x,y) = \begin{cases} y, & 0 \le y \le x \\ x, & x \le y \le 1 \end{cases} \tag{5.20}$$

de ello, deducimos que $K(x,y) = \text{mín}\{x,y\}$ (evidentemente continua) satisface

$$TT^*f(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy.$$

4. Sea $x_n \to x$. Como K es continua, $K(x_n,y) \to K(x,y)$ para todo $y \in [0,1]$. Además $K(\cdot,y)f(y) \in L^2 \subset L^1$ y $|K| \le 1$. Por TCD tenemos

$$Sf(x_n) = \int_0^1 K(x_n,y)f(y)dy \to \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$

así $S\big(L^2([0,1])\big) \subset C([0,1])$. Ahora, si $\{f_n\} \subset L^2$ es acotada, $\{Sf_n\}_n$ verifica ser (uniformemente) acotada

$$|Sf_n(x)| \le \int_0^1 |K(x,y)||f(y)|dy \le \left(\int_0^1 |f_n(x)|^2dx\right)^{1/2} \le M.$$

Por último, veamos que $\{Sf_n\}_n$ es equicontinua. Sean $x,z \in [0,1]$. Primero, no es difícil probar que K verifica

$$|K(x,y) - K(z,y)| \le |x-z|$$

así

$$|Sf_n(x) - Sf_n(z)| \le \int_0^1 |x-z||f(y)|dy \le |x-z|\left(\int_0^1 |f_n(x)|^2dx\right)^{1/2} \le M|x-z|.$$

Por el Teorema de Ascoli-Arselá, existe una subsucesión tal que $Sf_{n_k} \to g$ en $C([0,1])$. Como la norma L^2 está acotada por la norma del supremo, sigue que $Sf_{n_k} \to g$ en $L^2([0,1])$. Se concluye que S es un operador compacto. Ya fue probado que $S = TT^*$ es autoadjunto.

5. Como TT^* es compacto, $\sigma(TT^*) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}$. Cada valor propio $\lambda = \lambda_n \ge 0$ es tal que existe $f \in L^2$ no nula tal que $Sf = \lambda f$. Por lo tanto

$$\lambda f(x) = \int_0^x yf(y)dy + x\int_x^1 f(y)dy \tag{5.21}$$

obteniéndose que $f \in C^2([0,1])$ por TFC. Derivando (5.21) obtenemos

$$\lambda f'(x) = xf(x) + x(-f(x)) + \int_x^1 f(y)dy = \int_x^1 f(y)dy \tag{5.22}$$

y consecuentemente

$$\lambda f''(x) = -f(x). \tag{5.23}$$

De (5.21) y (5.22) obtenemos $f(0) = 0$ y $f'(1) = 0$ respectivamente. Las soluciones de (5.23) con $f(0) = 0$ son multiplos de $f(x) = \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$. De la condición $f'(1) = 0$ se obtiene que

$$0 = f'(1) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

de lo cual $\lambda_n = 4/((2n-1)\pi)^2$. De (5.23) se ve que 0 no es valor propio, así $\sigma(TT^*) = \{\lambda_n\}$. Siendo TT^* autoadjunto, se sigue que

$$\|TT^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(TT^*)\} = \lambda_1 = \frac{4}{\pi^2}. \tag{5.24}$$

Sigue entonces que $\|T\| = 2/\pi$.

■

Ejercicio 29 *(P3 C3 2018-1) Sea H un espacio de Hilbert separable en $\mathbb{R}$, y sea $T \in \mathcal{L}(H)$ compacto autoadjunto. Para cada $\lambda \in vp(T) \setminus \{0\}$, denotamos por P_λ al operador proyección ortogonal sobre $E_\lambda := ker(\lambda I - T)$. Sea $y \in H$. Probar que la ecuación*

$$Tx = y$$

tiene solución si y solo si se satisfacen las dos condiciones siguientes:

1. *$y \in (ker(T))^\perp$, y*
2. $\displaystyle\sum_{\lambda \in vp(T)\setminus\{0\}} \frac{\|P_\lambda y\|^2}{\lambda^2} < +\infty.$

Y en tal caso, se tiene que las soluciones están dadas por

$$x = z + \sum_{\lambda \in vp(T)\setminus\{0\}} \frac{P_\lambda y}{\lambda},\ z \in ker(T).$$

Obs: Se ha denotado $vp(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda \text{ es valor propio de } T\}$.

Demostración:
Dado que T es compacto, se tiene que $\sigma(T) \setminus \{0\} = vp(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_k\}$, conjunto numerable de valores propios,.
Para cada $k \geq 0$, sea P_k el operador proyección sobre $E_k := E_{\lambda_k}$, con $E_0 = ker(T)$.
Como T es autoadjunto, por el Teorema Espectral se tiene

$$Tx = \sum_{k\geq 1} \lambda_k P_k x,\ \forall x \in H. \tag{5.25}$$

Además, sabemos que $E_n \perp E_m$ para cada $n \neq m$, y $H = \bigoplus_{k\geq 0} E_k$.

($\Longrightarrow$) Dado $y \in H$ suponga que existe $x \in H$ tal que $Tx = y$. Entonces

$$y = Tx = \sum_{k \geq 1} \lambda_k P_k x \in \bigoplus_{k>0} E_k = ker(T)^{\perp}$$

Entonces

$$P_k y = P_k(Tx) = \lambda_k P_k x \tag{5.26}$$

para cada $k \geq 1$. Por tanto

$$\sum_{\lambda \in vp(T)\setminus\{0\}} \frac{\|P_\lambda y\|^2}{\lambda^2} = \sum_{k \geq 1} \frac{\|P_k y\|^2}{\lambda_k^2} = \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda_k^2 \|P_k x\|^2}{\lambda_k^2} = \sum_{k \geq 1} \|P_k x\|^2 \leq \|x\|.$$

($\Longleftarrow$) Sea $x \in H$, y supongamos (a) y (b). Dado $z \in ker(T)$, definimos

$$x = z + \sum_{k \geq 1} \frac{P_k y}{\lambda_k}.$$

Por (b) se tiene que x está bien definido. Además, por (5.25) se tiene

$$Tx = Tz + \sum_{k \geq 1} \frac{TP_k y}{\lambda_k} = 0 + \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda_k P_k y}{\lambda_k} = \sum_{k \geq 1} P_k y.$$

Por la descomposición de H en los subespacios E_k se tiene $y = \sum_{k \geq 0} P_k y$, y dado que $y \in ker(T)^{\perp}$, se tiene $P_0 y = 0$, de donde $y = \sum_{k \geq 1} P_k y$. Concluimos que $Tx = y$.

$\blacksquare$

Ejercicio 30 *Sea H un espacio de Hilbert real.*

1. *Demuestre que si $\{x_n\} \subset H$ es tal que $x_n \rightharpoonup x$ y $\|x_n\|_H \to \|x\|_H$ entonces $x_n \to x$ en H.*

2. *Si $\{e_n\} \subset H$ es un conjunto ortonormal, pruebe que $e_n \rightharpoonup 0$.*

3. *Exhiba una sucesión $\{x_n\} \subset H$ que converja débilmente y cuya norma converja en $\mathbb{R}$, tal que $\{x_n\}$ no converja en H. Explique por qué esto no entra en contradicción con el inciso 1).*

4. *Sean $H = H^1(0,1)$ y $M = H_0^1(0,1)$ Determine explícitamente $M^{\perp}$.*

Demostración:

1. Notar que, por el Teorema de Representación de Riesz, $x_n \rightharpoonup x$ equivale a decir que $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ para todo $y \in H$. En particular se tiene $\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle$. Por definición de norma inducida por un producto interno tenemos

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\langle x_n, x\rangle + \|x\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x\|^2 - 2\langle x, x\rangle + \|x\|^2 = 0, \quad (5.27)$$

es decir, x_n converge fuerte a x.

2. Por el Teorema de Representación de Riesz, basta probar que $\langle e_n, y\rangle \to 0$ para todo $y \in H$. Dado $y \in H$, como $\{e_n\}$ es un conjunto ortonormal ortonormal, por la desigualdad de Bessel tenemos

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n, y\rangle|^2 \leq \|y\|^2 < \infty$$

siendo la serie de coeficientes finita, sigue que el término general converga a cero, lo cual es precisamente lo que debíamos probar.

3. Si $\{e_n\} \subset H$ es una base ortonormal, entonces por el inciso anterior $e_n \rightharpoonup 0$ y $\|e_n\| = 1$ pra todo $n \in \mathcal{N}$. Sin embargo, del hecho $\|e_n - e_m\| = 2$ para todo $n \neq m$ se deduce que $\{e_n\}$ no es de Cauchy, y por tanto no converge en H. Lo anterior no contradice el inciso 1) pues la norma del límite débil no coincide con el número al que converge la norma de la sucesión.

4. Recordemos que el espacio de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ está dotado del producto interno

$$\big(u, v\big)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx.$$

Ahora, el complemento ortogonal de $H_0^1(0,1)$ se define por

$$H_0^1(0,1)^\perp = \{u \in H^1(0,1) : \big(u, v\big)_{H_0^1(0,1)} = 0,\ \forall v \in H_0^1(0,1)\}. \quad (5.28)$$

Dadas $u \in H^1(0,1)$ y $v \in H_0^1(0,1)$, notamos que

$$\langle -u'', v\rangle = \langle u', v'\rangle = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx \quad (5.29)$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota el producto en dualidad. Si consideramos en $H^1(0,1)$ el operador diferencial $P = -''$, entonces por (5.29) se tiene que $(u,v)_{H_0^1(0,1)} = 0$ para toda $v \in H_0^1(0,1)$ es equivalente a $\langle Pu, v\rangle = 0$ para toda $v \in H^1(0,1)$, y esto último equivale a $Pu = 0$ en $\mathcal{D}'(0,1)$. Luego (5.28) toma la forma

$$H_0^1(0,1)^\perp = \{u \in H^1(0,1) : Pu = 0 \text{ en } \mathcal{D}'(0,1)\}.$$

■

Ejercicio 31 *(P2 CG 2018-1)*

1. *Sea H un espacio de Hilbert separable. Sean $K \subset H$ un conjunto no vacío cerrado y convexo, y $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, bicontinua, coerciva y simétrica. Dado $f \in H^*$, definimos para cada $v \in H$*

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - f(v).$$

Demuestre que existe un único $u \in K$ que minimiza J en K y que está caracterizado por

$$a(u, v-u) \geq f(v-u), \ \forall v \in K. \tag{5.30}$$

Para esto

a) *Pruebe que $H_a = (H, a(\cdot,\cdot)^{1/2})$ es un espacio de Hilbert.*

b) *Sea $w \in H$ resultante de aplicar el Teorema de Lax-Milgram a la forma bilineal a y al funcional f en H. Sea $u = P_K^a w$ proyección de w al convexo K en H_a. Demuestre que se tiene (5.30).*

c) *Demuestre que*

$$2[f(v-u) - a(u, v-u)] \leq a(v-u, v-u), \ \forall v \in K.$$

d) *Concluya.*

2. *Considere $H = H_0^1(0,1)$. Definamos*

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 |v'(x)|^2 dx - \int_0^1 v(x)dx$$

para cada $v \in H_0^1(0,1)$ y $K = \{v \in H_0^1(0,1) : |v(x)| \leq 1, \ \forall x \in (0,1)\}$. Demuestre que J alcanza un mínimo en K.

Demostración:

1. Supondremos que H es un espacio de Hilbert real.

a) Debemos probar que a define un producto interno en H y que este es completo con la norma inducida. La simetría y bilinealidad de un producto interno se siguen por hipótesis para a. Notar que la coercividad de a implica directamente que a es definida positiva, y más la continuidad $x = 0$ si y solo si $a(x,x) = 0$, así a define un producto interno en H y consecuentemente $a^{1/2}$ es una norma en H. Resta ver que el espacio H_a es completo. En efecto, si $\{x_n\} \subset H_a$ una sucesión de Cauchy, por la coercividad de a se tiene

$$a(x_n - x_m, x_n - x_m) \geq \alpha \|x_n - x_m\|_H^2, \ \alpha > 0$$

luego $\{x_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy en H, y por tanto converge a algún $x \in H$, que por la continuidad de a satisface

$$a(x_n - x, x_n - x) \leq C\|x_n - x\|_H^2, \ C > 0$$

de lo cual se sigue que $x_n \to x$ en H_a.

b) En efecto, se verifican las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram sobre la forma bilineal a y el funcional f, por lo cual es posible halar un único $w \in H$ tal que $a(w,v) = f(v)$ para todo $v \in H$. Al definir $u = P_K^a w$ (el cual existe pues K es convexo no vacío), por caracterizacón de proyección sobre un conjunto convexo en el espaciod e Hilbert H_a se tiene la desigualdad

$$a(w-u, v-u) \leq 0, \ \forall v \in K$$

de lo cual se sigue

$$f(v-u) - a(u, v-w) = a(w, v-u) - a(u, v-w) = a(w-u, v-u) \leq 0, \ \forall v \in K$$

lo cual prueba (5.30).

c) Como vimos en el inciso (a), la coercividad de a implica que es definida positiva, así de (5.30) se tiene

$$2[f(v-u) - a(u, v-u)] \leq 0 \leq a(u-v, u-v), \ \forall v \in K. \tag{5.31}$$

d) Si desarrollamos por completo (5.31) vemos que

$$f(v) - f(u) - a(u,v) + a(u,u) \leq \frac{1}{2}a(v,v) - a(u,v) + \frac{1}{2}a(u,u), \ \forall v \in K$$

que reordenando es equivalente a

$$\frac{1}{2}a(u,u) - f(u) \leq \frac{1}{2}a(v,v) - f(v), \ \forall v \in K.$$

Es decir, tenemos $J(u) \leq J(v)$ para toda $v \in K$, así u minimiza a J en K, el cual es único pues w es único por Lax-Milgram y la proyección sobre un convexo, cerrado y no vacío en un espacio de Hilbert (en este caso H_a) es única.

2. El conjunto K está bien definido gracias a las inyecciones de Sobolev. Probar que K es no vacío, cerrado y convexo es directo. Definamos la forma $a : H \times H \to \mathbb{R}$ por

$$a(u,v) = \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)v'(x)dx,$$

la cual verifica ser lineal por coordenada (heredada de la linealidad de la integral), evidentemente simétrica, cooerciva pues

$$a(u,u) = \frac{1}{2}\int_0^1 |u'(x)|^2 dx = \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(0,1)}$$

y bicontinua, pues por Cauchy-Schwarz

$$|a(u,v)| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |u'(x)v'(x)|dx \leq \frac{1}{2}\left(\int_0^1 |u'(x)|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 |v'(x)|^2 dx\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1(0,1)}\|v\|_{H_0^1(0,1)}.$$

Por último, $f : H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(v) = \int_0^1 v(x)dx$ es lineal (linealidad de la integral) y continuo, pues, utilizando Cauchy-Schwarz y la desigualdad de Poincaré, existe $C > 0$ tal que

$$|f(u)| \leq \int_0^1 |u(x)|dx \leq \left(\int_0^1 |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq C \left(\int_0^1 |u'(x)|^2 dx \right)^{1/2} = C\|u\|_{H_0^1(0,1)}.$$

Se verifican las hipótesis del ítem 1., luego $J(u) := a(u,u)/2 - f(u),\ u \in H$ alcanza un único mínimo en K. ■